第 23 卷第 4 期
2006 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 23 No. 4
Aug. 2006

文章编号：1000−8152(2006)04−0556−05

具连续分布时滞的抛物型系统的变结构控制

罗毅平[1,2], 邓飞其[2], 胡根生[2]

(1.湖南工程学院 数理系, 湖南 湘潭 411101; 2.华南理工大学 系统工程研究所, 广东 广州 510640)

摘要: 基于比较原理, 利用推广的向量Hanalay微分不等式, Dini导数, 结合Green公式及不等式分析技术, 研究一类具分布时滞的抛物型控制系统的变结构控制问题. 首先对所导出的滑动模运动方程, 在仅要求系数矩阵是个M-矩阵的条件下, 获得了滑动模运动方程全局指数稳定性的充分条件, 建立了滑动模运动方程全局指数稳定性定理. 其次, 设计了仅由状态函数描述的变结构控制器, 给出了运动轨线到达滑动模态区的时间的估计.

关键词: 向量Hanalay不等式; Dini导数; 变结构控制; 分布时滞; 全局指数稳定性; 抛物型系统

中图分类号: O175　　**文献标识码**: A

Variable structure control of parabolic type systems with continuous distributed delays

LUO Yi-ping[1,2], DENG Fei-qi[2], HU Gen-sheng[2]

(1.Department of Mathematics and Physics, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan Hunan 411101, China;
2.Institute of System Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: Based on comparison principle, the variable structure control problems for a class of parabolic type system with continuous distributed delays is investigated by using general vector Hanalay's differential inequality, Dini's derivative, Green formulation, and technique of inequality analysis. Firstly, only with M-matrix coefficient constraint, sufficient conditions are found for global exponential stability for the sliding mode equations with continuous distributed delays and several theorems of the global exponential stability for the sliding mode equations are established. Secondly, the variable structure controller of the system described only by state functions is designed. Furthermore, the length of time for motion trajectories to reach the sliding mode are estimated.

Key words: vector Hanalay inequality; Dini's derivative; variable structure controller; distributed delay; global exponential stability; parabolic type systems

1 引言(Introduction)

由于许多领域提出的模型都是抛物型系统[1~4], 所以, 抛物型系统的研究一直是人们研究的热点. 文献[4～10]研究了离散型时滞抛物型系统的稳定性、变结构控制等方面的工作; 然而, 从客观事实来看, 分布时滞更能反映事物的本质. 如文献[2]提出的材料热加工与人类的变迁模型都是具分布时滞的抛物型控制系统, 并且分布时滞的系统包含了n个时滞的时滞控制系统[11]. 尽管这类模型十年以前就出现了, 但研究其特性的文献仍然很少. 就笔者所知, 只有文献[12]讨论了具分布时滞的抛物型系统的振动性, 文献[13]讨论了一类特殊的具分布时滞的抛物型系统的镇定性; 并且, 文献[13]是以半群算子理论为工具设计的控制器, 而文献[9]指出, 以半群算子理论为工具设计的控制器给实际应用带来较大的困难. 所以对时滞抛物型系统, 寻找一种好的控制方法一直是控制界的热门课题. 变结构控制以其算法简单, 抗干扰性能好及容易在线实现等优点一经提出便得到广泛与深入的发展[9]. 为了避免文献[9]指出的变结构控制器设计中遇到的问题, 国内许多学者提出了利用矩阵范数为工具来设计变结构控制器, 如文献[7, 8]针对一类时滞分布参数系统提出了一种基于状态函数的变结构控制方法. 这种方法虽然克服了用半群方法引起的问题, 但控制器中的矩阵范数项仍难以检验; 而且其滑动模到达时间估计值比较粗糙. 基于此, 本文的目的就是对下面的具分布时滞的抛物型系统, 研究其变结构控制问题, 同时避免控制器中含有范数项.

收稿日期: 2004−07−12; 收修改稿日期: 2005−10−24.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60374023); 湖南省教育厅自然科学基金重点课题(04A012);湖南省自然科学基金资助项目(05JJ40093).

$$\frac{\partial w}{\partial t}=D\Delta W(x,t)+A_0W(x,t)+\sum_{q=1}^{z}\int_{-\tau}^{0}K_A^q(s)W(x,(t+s))\mathrm{d}s+Bu(x,t). \tag{1}$$

其中: $(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+$, $D>0$和$\tau>0$都是常数; $A_0=(a_{ij}^0)$, $K^q(s)=(k_{ij}^q(s))$, $B=(b_{ij})$ 是具有相应阶的常数矩阵: 且矩阵B是列满秩的;$\Omega=\{x, \|x\|<l<+\infty\}\subset\mathbb{R}^d$ 是具有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域, 状态函数$W(x,t)=\mathrm{col}(w_1(x,t),w_2(x,t),\cdots,w_n(x,t))\in\mathbb{R}^n$, $\Delta=\sum\limits_{l=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$ 为Ω上的Laplace扩散算子. 并假定$\tilde{k}_{ij}^q(s)>0, s\in[-\tau,0]$, $\int_{-\tau}^{0}\tilde{k}_{ij}^q(s)\mathrm{d}s=\tilde{k}_{ij}^q>0(q=1,\cdots,z,i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n)$为常数. 其初边值条件满足

$$W(x,t)=0,\ \ \frac{\partial W}{\partial n}=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(-\tau,+\infty) \tag{2}$$

或者

$$W(x,t)=\varphi(x,t),\ \ (x,t)\in\Omega\times[-\tau,0]. \tag{3}$$

n是$\partial\Omega$的单位外法向量, $\varphi(x,t)$是适当光滑的函数.

与一般变结构控制方法[4~10]不同的是, 本文对模型(1)~(3)建立的滑动模运动方程, 采用一种全新的方法——利用推广的向量Hanalay不等式结合Green公式, 在仅要求系统本身所固有的参数满足是一个M–矩阵的条件下得出其指数稳定性的判据. 然后利用不等式技巧在所选取的变结构控制器上证明了整个切换面为滑动模态区. 并给出了利用所设计的控制器, 从任意的初始位置出发的轨线平均到达滑动模态区上的时间估计式.

本文所获得的滑动模运动方程全局指数稳定的充分条件较之已有类似文献的结果[7,8]要宽松与简单. 此外, 与现有方法比较[7,8], 本文所获得的滑动模平均到达时间的估计式更加精确.

2 定义和引理(Definitions and lemmas)

假定系统的平衡点为零点, 当初始条件满足式(3)时, 可以通过适当的变换使得系统的平衡点化为零点. 记L_2–模为

$$\|W(t)\|_2=(\int_\Omega\|W(x,t)\|^2\mathrm{d}x)^{1/2}.$$

其中$\|W(x,t)\|$表示向量$W(x,t)$的Eucild模, 并称为E–模. 记$L_2(\Omega)$是Ω上的实可测函数空间且对于L_2–构成一个Banach 空间. 记

$$P_i^s(t)=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}P_i(t+s),\ \ i=1,2,\cdots,n,$$

$$P^s=\mathrm{col}(p_1^s(t),p_2^s(t),\cdots,p_n^s(t)),$$

$$\|\varphi_j(t)\|_2^s=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}\|\varphi_j(x,t+s)\|_2^s,\ \ j=1,\cdots,n,$$

$$\|\varphi(t)\|_2^s=(\sum_{j=1}^{n}(\|\varphi_j(t)\|_2^s)^2)^{1/2},$$

$$(P_1)^+=\mathrm{col}(\|p_1^1\|,\|p_2^1\|,\cdots,\|p_m^1\|),$$

$$\|p_j^1\|_2^s=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}\|p_j^1(t+s)\|_2^s\cdot|A|=(|a_{ij}|).$$

其中A为矩阵.

定义 1 若存在正数δ和M, 使得

$$\|W(t)\|_2\leqslant Le^{-\delta t},\ (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}, \tag{4}$$

则称边值问题(1)~(3)的平凡解是$L_2(\Omega)$– 指数渐近稳定的, 简称系统(1)是$L_2(\Omega)$– 指数渐近稳定的.

引理 1[14] 假设向量函数

$$x(t)=\mathrm{col}(x_1(t),\cdots,x_n(t)),$$

$$y(t)=\mathrm{col}(y_1(t),\cdots y_n(t)),$$

$$x^s:=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}x(t+s)=\mathrm{col}(x_1^s(t),\cdots,x_n^s(t)),$$

$$x_i^s(t+s)=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}x_i(t+s),$$

$$y^s:=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}y(t+s)=\mathrm{col}(y_1(s),\cdots,y_n(s)),$$

$$y_i^s(t+s)=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}y_i(t+s),\ \ i=1,\cdots,n$$

满足下列条件:

1) $x(t)<y(t),\ t\in[t_0-\tau,t_0]$;

2) $D^+y(t)>F(t,y(t),y^s(t)),\ t\geqslant t_0\geqslant 0$, $D^+x(t)\leqslant F(t,x(t),x^s(t)),\ t\geqslant t_0\geqslant 0$, 则

$$x(t)<y(t),\ t\geqslant t_0. \tag{5}$$

其中$F(t,x,y)=\mathrm{col}(f_1(t,x,y),\cdots,f_n(t,x,y))$是$\mathrm{H}_n$-函数[14].

3 滑动模运动方程的建立(Constructing sliding mode movement equations)

根据已知条件, 可设$\det B_2\neq 0$, 其中$B=\mathrm{col}(B_1,B_2)$, $B_1\in\mathbb{R}^{(n-m)\times m}$, $B_2\in\mathbb{R}^{m\times m}$. 对系统(1)作非奇异线性变换$TP(x,t)=W(x,t)$,其中

$$T=\begin{pmatrix} I_{n-m} & B_1B_2^{-1} \\ 0 & I_m \end{pmatrix}.$$

为了方便, 记$P_i(x,t)=P_i$, $P(x,t)=P$, $u(x,t)=u$. 于是系统(1)转化为

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\tilde{D}\Delta P+\tilde{A}_0P+\sum_{q=1}^{z}\int_{-\tau}^{0}\hat{K}^q(s)P(x,t+s)\mathrm{d}s+\tilde{B}u. \tag{6}$$

式中: $\tilde{D}=D$, $\tilde{B}=T^{-1}B=\mathrm{col}(0,B_2)$, $\tilde{A}_0=T^{-1}A_0T$, $\hat{K}^q(s)=T^{-1}K^q(s)T$. 记

$$\tilde{A}_0=\begin{pmatrix}A_{11}^0 & A_{12}^0\\ A_{21}^0 & A_{22}^0\end{pmatrix},$$

$$\hat{K}^q(s)=\begin{pmatrix}\hat{K}_{11}^q(s) & \hat{K}_{12}^q(s)\\ \hat{K}_{21}^q(s) & \hat{K}_{22}^q(s)\end{pmatrix}.$$

式中: 矩阵$A_{11}^0,\hat{K}_{11}^q\in\mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$, $A_{12}^0,\hat{K}_{12}^q\in\mathbb{R}^{(n-m)\times m}$, $A_{21}^0,\hat{K}_{21}^q\in\mathbb{R}^{m\times(n-m)}$, $A_{22}^0,\hat{K}_{22}^q\in\mathbb{R}^{m\times m}$. 这样系统(6)可改写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P_1}{\partial t}=D\Delta P_1+A_{11}^0P_1+A_{12}^0P_2+\\ \quad\sum\limits_{q=1}^{z}\int_{-\tau}^{0}\Big(\hat{K}_{11}^q(s)P_1(x,t+s)+\\ \quad\hat{K}_{12}^q(s)P_2(x,t+s)\Big)\,\mathrm{d}s,\\ \dfrac{\partial P_2}{\partial t}=D\Delta P_2+A_{21}^0P_1+A_{22}^0P_2+\\ \quad\sum\limits_{q=1}^{z}\int_{-\tau}^{0}\Big(\hat{K}_{21}^q(s)P_1(x,t+s)+\\ \quad\hat{K}_{22}^q(s)P_2(x,t+s)\Big)\,\mathrm{d}s+B_2u.\end{cases}\tag{7}$$

设切换函数为

$$S(x,t)=C_1P_1+C_2P_2.\tag{8}$$

式中$C_1\in\mathbb{R}^{m\times(n-m)}$,$C_2\in\mathbb{R}^{m\times m}$为待定矩阵. 于是, 切换面为

$$S_0=\left\{(P_1,P_2)^{\mathrm{T}}\,|C_1P_1+C_2P_2=0\right\}.\tag{9}$$

现在取C_2可逆, 则切换面S_0上有$P_2=-C_2^{-1}C_1P_1$, 代入式(7)的第1式, 得到滑动模运动方程

$$\frac{\partial P_1}{\partial t}=D\Delta P_1+GP_1+\sum_{q=1}^{z}\int_{-\tau}^{0}\tilde{H}^q(s)P_1(x,t+s)\mathrm{d}s.\tag{10}$$

其中: $G=A_{11}^0-A_{12}^0C_2^{-1}C_1$, $\tilde{H}^q(s)=\hat{K}_{11}^q(s)-\hat{K}_{12}^q(s)C_2^{-1}C_1$, $\tilde{H}^q(s)=(\tilde{h}_{ij}^q(s)),q=1,\cdots,z$.

4 滑动模运动方程的指数渐近稳定性(Global exponential stability of sliding mode movement equations)

定理 1 若$M=-(\bar{G}+\tilde{G}^{+}+\sum\limits_{q=1}^{z}H_q^{+})$是一个M-矩阵[15], 则滑动模运动方程(10)的平凡解是$L_2(\Omega)$-全局指数稳定的. 其中

$$\bar{G}=(\bar{g}_{ij})=\begin{cases}g_{ij}, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\quad \tilde{G}=(\tilde{g}_{ij})=\begin{cases}0, & i=j,\\ g_{ij}, & i\neq j,\end{cases}$$

$$\tilde{g}_{ij}^{+}=|\tilde{g}_{ij}|,\ \tilde{G}^{+}=(\tilde{g}_{ij}^{+}),$$

$$H_q^{+}=(|h_{ij}^q|),\ \left|h_{ij}^q\right|=\int_{-\tau}^{0}\left|\tilde{h}_{ij}^q(s)\right|\mathrm{d}s.$$

证 略. 其证明方法与文献[16]的证明方法相似.

注 1 与文献[7,8]比较, 用本文的方法获得的滑动模方程指数稳定性的条件要容易检验. 根据M-矩阵的性质[14], 容易得出以下许多判定条件, 限于篇幅此处就不一一列举. 特别地, 对于系统(1)~(3), 当$D=0$时, 则该系统转化为下列变时滞线性系统

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=A_0W+\sum_{q=1}^{z}\int_{-\tau_r}^{0}K_A^q(s)W(t+s)\mathrm{d}s+Bu,\tag{11}$$

初始条件为$W(t)=0,t\in[-\tau,+\infty)$, 本文与方程(1)类似地建立滑动模方程为

$$\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}t}=GP_1+\sum_{q=1}^{z}\int_{-\tau}^{0}\tilde{H}^q(s)P_1(t+s)\mathrm{d}s.\tag{12}$$

其中G和H^q与方程(10)的G和$\tilde{H}^q(s)$定义相同. 则有

推论 1 假设$M=-(\bar{G}+\tilde{G}^{+}+\sum\limits_{q=1}^{z}H_q^{+})$是一个M-矩阵, 则系统(12)的平凡解关于E– 模是全局指数稳定的.

5 变结构控制器的设计(Design of variable structure)

定理 2 若矩阵方程组$C_1K_{11}^q(s)+C_2K_{21}^q(s)=(C_1K_{12}^q(s)+C_2K_{22}^q(s))C_2^{-1}C_1$ $(q=1,\cdots,z)$成立, 则选取变结构控制器

$$\begin{aligned}&u=\\&(C_2B_2)^{-1}\{-\delta S(x,t)-(C_1A_{11}^0+C_2A_{21}^0)P_1-\\&(C_1A_{12}^0+C_2A_{22}^0)P_2-\\&\sum_{q=1}^{z}[\int_{-\tau}^{0}(C_1\hat{K}_{11}^q(s)+C_2\hat{K}_{21}^q(s))P_1(x,t+s)\mathrm{d}s+\\&\int_{-\tau}^{0}(C_1\hat{K}_{12}^q(s)+C_2\hat{K}_{22}^q(s))P_2(x,t+s)\mathrm{d}s]\}\end{aligned}\tag{13}$$

时, 整个切换面S_0为滑动模态区, 其中δ,α和ρ都为正常数, 并且满足$\delta>D$.

证 分两步证明:

第 1 步 任给$x\in\Omega$, 有$S^{\mathrm{T}}(x,t)\Delta S(x,t)\leqslant S^{\mathrm{T}}(x,t)S(x,t)$. 事实上, 对$S(x,t)\neq0$, 有

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=D\Delta S(x,t)-\delta S(x,t).\tag{14}$$

将式(14)两边同乘以$S^{\mathrm{T}}(x,t)$,则有

$$\begin{aligned}&S^{\mathrm{T}}(x,t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=\\&D\phi(x,t)-(\delta-D)S^{\mathrm{T}}(x,t)S(x,t).\end{aligned}\tag{15}$$

其中$\phi(x,t)=S^{\mathrm{T}}(x,t)\Delta S(x,t)-S^{\mathrm{T}}(x,t)S(x,t)$, $x\in\Omega$. 可以证明, 对任意的$x\in\Omega$, 都有

$$\phi(x,t)\leqslant0.\tag{16}$$

令$\Omega_1=\{x|\phi(x,t)>0,x\in\Omega\}$, $\Omega_2=\{x|\phi(x,t)\leqslant0,x\in\Omega\}$. 下面证明$\Omega_1$是空集. 事实上, 假设$\Omega_1$非空, 任给$x\in\Omega_1$, 可算得

$$0 < \int_{\Omega_1} \phi(x,t)\mathrm{d}x = S^{\mathrm{T}}(x,t)\nabla S(x,t)\,|_{\partial\Omega_1} - \int_{\Omega_1} (\nabla S(x,t))^{\mathrm{T}}(\nabla S(x,t))\mathrm{d}x - \int_{\Omega_1} S^{\mathrm{T}}(x,t)S(x,t)\mathrm{d}x. \tag{17}$$

另一方面, 因为对任意的$x \in \partial\Omega_1$, 有$\phi(x,t) = 0$, 则从$\phi(x,t)$的定义, 可知$\forall x \in \partial\Omega_1$, 有$\nabla S(x,t) = S(x,t)$. 将其代入式(15)得

$$S^{\mathrm{T}}(x,t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = -(\delta - D)S^{\mathrm{T}}(x,t)S(x,t),\ x \in \partial\Omega_1, \tag{18}$$

因此, 对任意的$x \in \partial\Omega_1$,有

$$\frac{\partial}{\partial t}[S^{\mathrm{T}}(x,t)S(x,t)] = -2(\delta - D)S^{\mathrm{T}}(x,t)S(x,t,), \tag{19}$$

可算得

$$\lim_{t\to\infty} \|S(x,t)\| = 0,\ x \in \partial\Omega_1. \tag{20}$$

因此, 当$x \in \partial\Omega_1$且t 充分大时, $\|\Delta S(x,t)\|$是充分地小, 从而$\nabla S(x,t)$在$\partial\Omega_1 \times [0,\infty]$上是有界的. 因而, 当$t$充分大时, $|S^{\mathrm{T}}(x,t)\nabla S(x,t)|_{\partial\Omega_1}$充分地小. 这与式(17)矛盾. 所以, 集合$\Omega_1$是空集. 因此, 证明了对任意的$x \in \Omega$, 有$\phi(x,t) \leqslant 0$.

第 2 步　证明当$S(x,t) \neq 0$时, 有

$$S^{\mathrm{T}}(x,t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} < 0.$$

事实上, 对于$S(x,t) \neq 0$, 注意到对任意的$x \in \Omega$有$\phi(x,t) \leqslant 0$, 则由式(17)可得

$$S^{\mathrm{T}}(x,t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} \leqslant -(\delta - D)S^{\mathrm{T}}(x,t)S(x,t) < 0, \tag{21}$$

即整个切换面S_0为滑动模态区.

注 2　与文献[7,8]所用的控制器比较, 去掉了一个比较难验证的矩阵范数项.

定理 3　在式(13)所设计的变结构控制器$u(x,t)$下, 从任意初始位置$p(x,0)$出发的轨线$p(x,t)$在平均有限时间T 内到达滑动模态区S_0 上, 且存在常数$k > 0$,使得

$$T \leqslant \frac{k}{(\delta - D)} \ln \|S(0)\|_2. \tag{22}$$

证　由定理2的证明的后半部可以看出, 对所有的$x \in \Omega, t \geqslant 0$, 当$S(x,t) \neq 0$时, 有

$$S^{\mathrm{T}}(x,t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} \leqslant -(\delta - D)S^{\mathrm{T}}(x,t)S(x,t). \tag{23}$$

两边同时对x 积分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\int_{\Omega} \|S(x,t)\|^2\mathrm{d}x) \leqslant -2(\delta-D)\int_{\Omega} \|S(x,t)\|^2\,\mathrm{d}x. \tag{24}$$

令$f(t) = \|S(t)\|_2^2 = \int_{\Omega} \|S(x,t)\|^2\,\mathrm{d}x$, 其中$\|S(t)\|_2$为$L_2-$ 模, 则式(24)即变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) \leqslant -2(\delta - D)f(t). \tag{25}$$

根据文献[15] P.35 – P.36得

$$f(t) \leqslant f(0)\mathrm{e}^{-2(\delta-D)t},\ t \geqslant 0. \tag{26}$$

当$t < T$时, 则有

$$t \leqslant \frac{1}{2(\delta - D)}[\ln f(0) - \ln f(t)],\ 0 < t < T. \tag{27}$$

取$t = \dfrac{T}{k}$, k的选取以保证$f(\dfrac{T}{k}) \geqslant 1$,则式(27)可算得

$$T \leqslant \frac{k}{(\delta - D)} \ln \|S(0)\|_2. \tag{28}$$

注 3　与文献[7,8]比较, 它们获得的到达滑动模时间估计值是本文获得的估计值的指数. 而且本文考虑的是滑动模对时间的全微分而不是偏导数. 该方法对文献[7,8]研究的模型同样适用.

6　举例(Example)

为了说明问题, 考虑一个算例, 对于模型(1), 取

$$\begin{cases} A_0 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1.5 & 1.5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{29}$$

并取$d = 1, D = 1$, 其中令$\tilde{k}(s) = \mathrm{e}^{-s}$. 可算得$\bar{G} = -0.5 < 0, \tilde{G} = 0, H^+ = 0$; 故定理1的条件满足. 又可算得$Q\hat{K}_{11}(s) + \hat{K}_{21}(s) = (Q\hat{K}_{12}(s) + \hat{K}_{22}(s))Q$, 定理2的条件满足, 从而可算得系统所对应的滑动模运动方程为

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} - 0.5p(x,t).$$

易算出滑动模方程渐近稳定. 令变结构控制器为

$$u = -\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4+2\delta \end{pmatrix} P_1 + \begin{pmatrix} 1/2+\delta & 0 \\ -1/2 & 2+\delta \end{pmatrix} P_2 + 3\int_{-\tau}^{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-s}P_1(x,t+s)\mathrm{d}s + 3\int_{-\tau}^{0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-s}P_2(x,t+s)\mathrm{d}s \right\}.$$

其中$\delta > D = 1$,而C_2是可供选择的非奇异矩阵, 由定理2可知, 滑动模运动方程从初始位置出发的轨线, 经时间T后, 必达到切换面S_0上, 其T的估计满足(28).

特别地, 令$D = 0$,则上面的算例即化为下面的形式:

$$\dot{W}(t) = A_0W(t) + A_1\int_{-\tau}^{0} \mathrm{e}^{-s}W(t+s)\mathrm{d}s + Bu(t). \tag{30}$$

其中$W(t), A_0, A_1, B$的定义如前. 通过上面相同的变换, 其滑动模运动方程为$\dot{p}(t) = -0.5p(t)$,则据推论2, 该方程是全局指数稳定的. 其轨迹如图1所示.

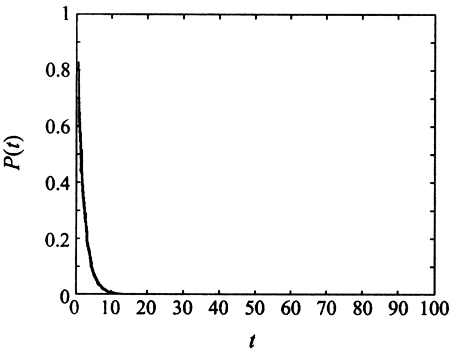

图 1 系统(30)的滑动模方程轨迹

Fig. 1 Trajectory of sliding model equation for system (30)

7 小结(Conclusion)

本文利用推广的Hanalay不等式结合Dini导数等知识研究了一类具分布时滞的抛物型控制系统的变结构控制问题. 设计了变结构控制器,给出了从任意初始位置$p(x,0)$出发的轨线$p(x,t)$在有限时间T内平均到达滑动模态区S_0上的时间估计式. 从任意轨线出发的轨线到达滑动模态区的时间是有限的.

参考文献(References):

[1] ORLOV Y V, UTKIN V I. Sliding mode control in indefinite-dimensional systems [J]. *Automatica*, 1987, 23(6): 753 – 757.

[2] KOLMANOVSKII V, MYSHKIS A. *Applied Theory of Functional Differential Equations* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.

[3] 郑立辉, 冯珊, 潘德惠. 描述群体消费者行为的分布参数系统方法[J].系统工程学报, 1997, 12(4): 65 – 70.
(ZHENG Lihui, FENG Shan, PAN Dehui. A Distributed parameter system approach to the modeling of consumer's collective behavior [J]. *J of Systems Engineering*, 1997, 12(4): 65 – 70.)

[4] BANKS H T, MUSANTE C J, RAYE J K. Predictions for a distributed parameter model describing the Hepatic processing of 2.3.7.8—TCDD [J]. *Mathematical and Computer modeling*, 2001,33: 49 – 64.

[5] 崔宝同, 邓飞其, 刘永清. 不确定时滞反应扩散系统的滑动模控制[J], 系统工程与电子技术, 2004, 26(4): 501 – 504.
(CUI Baotong, DENG Feiqi, LIU yongqing. Exponential asymptotical stability for distributed parameter systems with time delays [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2004, 26(4): 501 – 504.)

[6] FARKAS G, SIMON P L. Stability properties of positive solutions to partial differential equations with delays [J]. *Electronic J of Differential Equations*, 2001,64: 1 – 8.

[7] 刘永清, 谢胜利. 滞后分布参数系统的稳定性与变结构控制[M]. 广州：华南理工大学出版社, 1998.
(LIU Rongqin, XIE Shengli. *The Stability and Variable Structure Control of Distributed Parameter Systems with Delays* [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1998.)

[8] 崔宝同, 邓飞其, 王伟, 等. 时滞分布参数系统的变结构控制的设计[J]. 华南理工大学学报, 2003, 31(5)：1 – 5.
(CUI Baotong, DENG Feiqi, WANG Wei, et al. Design of variable structure controller for distributed parameter systems with delays [J]. *J of South China University of Technology*, 2003, 31(5): 1 – 5.)

[9] 胡跃明, 周其节. 分布参数变结构控制系统[M]. 北京：国防工业出版社, 1996.
(HU Yuemin, ZHOU Qijie. *The Distributed Parameter Variable Structure Systems* [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1996.)

[10] 陈振韬. 一类时滞抛物型偏微分方程解的振动性质[J]. 数学物理学报, 1994, 14(1): 115 – 120.
(CHEN Zhentao. The oscillation character of a class of partial differential equation's solution [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 1994, 14(1): 115 – 120.)

[11] 高存臣, 袁付顺, 肖会敏. 时滞变结构控制系统[M]. 北京：科学出版社, 2004.
(GAO Cuncheng, YUAN Fushun, XIAO Huimin. *Variable Structure Control Systems with Delays* [M]. Beijing: Science Press, 2004.)

[12] HENRIQUEZ H R. Stabilization of hereditary distribution parameter control system [J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 44: 35-43.

[13] HALANAY A. *Differential Equations: Stability Oscillations Time-Lags* [M]. New York: Academic, 1966.

[14] 廖晓昕. 动力系统的稳定性理论和应用[M]. 北京：国防工业出版社, 2000.
(LIAO Xiaoxin. *Theory and Application of Stability for Dynamical Systems* [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2000.)

[15] 丁同仁, 李承治. 常微分方程教程[M]. 北京：高等教育出版社, 2001.
(DING Tongren, LI Chengzhi. *Ordinary Differential Equation Tutorial* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2001.)

[16] 罗毅平, 邓飞其. 变时滞分布参数系统的全局指数稳定性[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(4): 1 – 5.
(LUO Yiping, DENG Feiqi. Global Exponentil stability for distributed parameter systems with varying delay [J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(4): 1 – 5.)

作者简介:

罗毅平 (1966—), 男, 博士研究生, 近期主要从事神经网络动力学行为与分布参数系统的控制理论及应用研究, E-mail:lyp8688@sohu.com;

邓飞其 (1962—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为复杂非线性系统的控制理论、方法及应用, E-mail:aufqdeng@scut.edu.cn;

胡根生 (1971—), 男, 博士研究生, 近期主要从事机器学习、支持向量机的理论及应用研究, E-mail:hugs2906@sina.com.