

基于有理平方根逼近的非高斯随机分布系统的故障诊断和容错控制

姚利娜¹, 王 宏^{1,2,3}

(1. 中国科学院 自动化研究所, 北京 100080; 2. 英国曼彻斯特大学 控制中心, 英国 曼彻斯特;
3. 东北大学, 辽宁 沈阳 110006)

摘要: 随机分布系统指的是输入为常规向量而输出为系统输出的概率密度函数所描述的一类随机系统. 该系统控制算法的目标是选择一个控制输入使得系统的实际输出概率密度函数尽可能跟踪一个事先给定的概率密度函数. 本文对采用有理平方根B样条逼近其输出概率密度函数的非高斯动态随机分布系统, 提出了一种基于非线性自适应观测器的故障诊断方法. 该方法可快速有效地诊断出非高斯随机分布系统故障. 通过对故障系统的重组, 使故障后系统的输出概率密度函数仍能跟踪给定的分布, 实现了该随机系统的容错控制, 提高了随机系统的可靠性.

关键词: 有理平方根逼近; 非高斯随机分布系统; 故障诊断; 容错控制

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Fault diagnosis and tolerant control for non-Gaussian stochastic distribution control systems based on the rational square-root approximation model

YAO Li-na¹, WANG Hong^{1,2,3}

(1. Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;
2. Control System Centre, the University of Manchester, Manchester M60 QD, UK;
3. Northeast University, Shenyang Liaoning 110006, China)

Abstract: Stochastic distribution control (SDC) systems are a group of systems where the outputs considered are the measured probability density functions (PDFs) of the system output whilst subjected to a normal crisp input. The purpose of the control algorithm design of such systems is to choose a control input such that the output PDF of the system output can follow a pre-specified PDF as close as possible. Using the rational square-root B-spline model to represent the dynamics between the output PDF and the input, a nonlinear adaptive observer based fault diagnosis algorithm is proposed to diagnose the fault in the dynamic part of the system in this paper. Through the controller reconfiguration, a good output PDF tracking can still be realized when fault occurs, which has been shown to be able to enhance the reliability of the SDC system.

Key words: rational square-root approximation; non-Gaussian SDC systems; fault diagnosis; fault tolerant control

1 引言(Introduction)

为了提高实际随机系统的可靠性和安全性, 随机系统的故障诊断和容错控制成为控制工程研究领域的重要组成部分. 当故障和其他扰动输入是随机变量时, 主要有两类方法处理这类故障诊断问题: 一是源于统计理论, 用似然比或贝叶斯方法并结合一些数值计算方法如蒙特卡罗法或粒子滤波(见参考文献[1~6])来估计状态或参数的突然变化. 文献[6]给出了一种非线性时变随机系统的传感器故障的检测与诊断方法. 它用非线性系统的伪偏差分离估计算法在线估计系统的状态与偏差, 再用修正的Bayes分类算法进行故障检测. 最后用传感器偏差

估计值在一个数据窗内的变化量来判断故障类型, 通过与正常状态下的传感器偏差的均值相比较, 从而确定故障幅值. 这种方法也适用于多个传感器故障. 另一种方法是用基于状态观测器或滤波器设计的方法^[7~10], 观测器和滤波器被用来产生残差, 通过对残差信息的分析和处理来检测和诊断故障.

在现存的文献中, 容错控制问题一般在确定性系统中提出来, 但这些系统的模型不能描述故障的随机性和事先不能预知的变化, 事实上在随机系统中提出容错控制的概念更合适些^[11~13]. 现有的随机系统的故障诊断和容错控制文献, 大都是针对随机变量服从高斯分布的系统, 然而大多数随机系统, 其

故障、输入、输出或噪声并不一定服从高斯分布.因此研究服从非高斯分布随机系统的故障诊断和容错控制是很有必要的.而且,在实际中,一些系统的输出为系统输出的概率密度函数,而不是实际的输出值.对这类系统来说反馈控制的输出是可测的输出概率密度函数.因此称这类随机系统为随机分布系统.王宏博士从1996年提出了随机分布控制的概念,控制的目标是整个系统输出概率密度函数的形状.设计控制器使系统输出概率密度函数形状跟踪给定概率密度函数,并建立多种控制方法^[14],克服了一般随机系统控制方法对不满足高斯输入假设的随机系统将不再能控制输出概率密度函数形状的缺点.

在随机分布系统的故障检测和诊断方面,对线性B样条模型的随机分布系统,文[10]首次提出一种基于观测器的故障检测方法来检测该随机分布系统中发生的故障,虽然线性B样条模型具有简单直观的特点,但也有一些缺点,如当基函数个数较少时,由于数值鲁棒性较弱可能使反馈控制所产生的权值出现负值.因此,需要提出新的逼近模型来提高数值鲁棒性.随后又提出了有理B样条模型、平方根B样条模型^[14],和有理平方根B样条模型^[15].平方根B样条模型克服了线性B样条模型权值有时出现负值的弱点,能完全保证在反馈控制中输出概率密度函数的非负性.但对平方根B样条模型和线性B样条模型来说,对采用 n 个基函数的函数逼近,实际上只有 $n-1$ 个权值是相互独立的.有理B样条模型的提出解决了这一难题,它满足概率密度函数在定义域内积分为1的条件.因此, n 个基函数的函数权值是相互独立的.但有理B样条模型同时也带来了另一个问题,即权值的惟一性不能得到保证.有理平方根B样条模型综合了有理B样条模型和平方根B样条模型的特点,其权值都是相互独立的,权值的可行域几乎是整个区域.因此对该模型进行故障诊断的研究还是很有意义的.据作者所知,目前还没有文献报道过非高斯随机系统的容错控制,本文试图对非高斯随机系统的容错控制进行探索性的研究.

本文对采用有理平方根B样条逼近的非高斯随机分布系统提出了一种基于非线性自适应观测器的故障诊断方法,诊断算法能快速诊断出系统出现的故障,并具有一定的鲁棒性.为使得故障发生后系统的输出概率密度函数仍能跟踪给定的分布,进行了系统控制器重组,在设计全局最优跟踪控制律的时候考虑到故障的影响,得到了重组控制器,并对跟踪误差的收敛性问题进行了分析和证明.在重组控制

律的作用下,系统的输出概率函数仍能跟踪给定的分布,达到了容错控制目的.

2 系统模型描述(System model description)

记 $\eta(t) \in [a, b]$ 为一致有界随机过程并假定其为随机系统在 t 时刻的输出,并记 $u(t)$ 为具有合适维数的控制 $\eta(t)$ 分布的控制输入向量.在任意时刻, $\eta(t)$ 的分布可以用它的条件概率密度函数 $\gamma(y, u(t))$ 来表述,其定义式如下:

$$P(a \leq \eta(t) < \xi | u(t)) = \int_a^\xi \gamma(y, u(t)) dy.$$

其中 $P(a \leq \eta(t) < \xi | u(t))$ 表示系统在 $u(t)$ 作用下输出 $y(t)$ 落在区间 $[a, \xi]$ 内的概率;即 $\eta(t)$ 的概率密度函数 $\gamma(y, u(t))$ 的形状可由 $u(t)$ 控制.假设区间 $[a, b]$ 已知,输出概率密度函数 $\gamma(y, u(t))$ 连续且有界,由B样条函数逼近原理可知^[16],可以用如下有理平方根B样条模型^[15]来逼近概率密度函数 $\gamma(y, u(t))$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma(y, u(t))} &= \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i B_i(y)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j \int_a^b B_i(y) B_j(y) dy}} = \\ &= \frac{C(y)V}{\sqrt{V^T E V}}, \quad \forall y \in [a, b]. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $B_i(y) (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2)$ 是预先指定的基函数, $\omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是仅和控制输入 $u(t)$ 相关的逼近权值, n 是基函数的个数. $C(y) = [B_1(y), B_2(y), \dots, B_n(y)]$, $E = \int_a^b C^T(y) C(y) dy$, $V = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^T$ 且 $V \neq 0$.

假设由B样条权值描述的系统动态部分能够表示为线性连续定常系统,则所考虑的动态系统可表示为

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = AV(t) + Bu(t) + GF, \\ \sqrt{\gamma(y, u(t))} = C(y)V(t) / \sqrt{V(t)^T E V(t)}. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\{A, B, G\}$ 为已知有合适维数的参数矩阵, F 代表系统的故障,当系统无故障时 $F = 0$.对该模型来说,第1个方程是关于 $V(t)$, $u(t)$ 和 F 的一般线性动态关系式,第2个方程代表系统输出概率密度函数的B样条表达式.

3 故障检测(Fault detection)

故障检测的目的地是利用系统(2)的输入向量 $u(t)$ 和输出概率密度函数 $\gamma(y, u(t))$ 来检测故障 F .因为系统由状态方程表示,拟用基于观测器的故障检测方法检测系统(2)的故障.为此,根据式(2)的结构,构造如下故障检测观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{V}} = A\hat{V} + Bu(t) + K_d(t)\varepsilon_d(t), \\ \varepsilon_d(t) = \int_a^b (\sqrt{\hat{\gamma}} - \sqrt{\gamma})dy, \\ \sqrt{\hat{\gamma}(y, u(t))} = C(y)\hat{V}(t)/\sqrt{\hat{V}^T(t)E\hat{V}(t)}. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $K_d(t)$ 是一特定的自适应增益, ε_d 为观测器的残差信号. 令误差向量为

$$e_d(t) = \hat{V}(t) - V(t). \quad (4)$$

由式(2)(3)可得下列误差系统方程

$$\begin{cases} \dot{e}_d = A\hat{V}(t) + Bu(t) + K_d(t)\varepsilon_d(t) - AV(t) - Bu(t) - GF, \\ \varepsilon_d(t) = \int_a^b C(y) \left(\frac{\hat{V}(t)}{\sqrt{\hat{V}^T(t)E\hat{V}(t)}} - \frac{V(t)}{\sqrt{V^T(t)EV(t)}} \right) dy. \end{cases} \quad (5)$$

令 $\Sigma = \int_a^b C(y)dy$, 并且假设 (A, Σ) 是一个可观测对. 则

$$\varepsilon_d(t) = \frac{\Sigma e_d}{\sqrt{\hat{V}^T E \hat{V}}} + \frac{\Sigma V}{\sqrt{\hat{V}^T E \hat{V}}} - \frac{\Sigma V}{\sqrt{V^T E V}}. \quad (6)$$

为了进一步分析式(5)的性质, 首先给出如下引理:

引理 对于 $(\sqrt{V^T E V} - \sqrt{\hat{V}^T E \hat{V}})$ 存在一个 $\lambda(T_1 \leq |\lambda| \leq T_2)$ 使得下列等式成立:

$$\begin{aligned} \sqrt{V^T E V} - \sqrt{\hat{V}^T E \hat{V}} &= \\ \lambda(\sqrt{V^T V} - \sqrt{\hat{V}^T \hat{V}}) &= \lambda(\|V\| - \|\hat{V}\|). \end{aligned} \quad (7)$$

其中: $T_1 = \lambda_{\min}(E)/\lambda_{\max}(E)$, $T_2 = \lambda_{\max}(E)/\lambda_{\min}(E)$.

证 首先可以证明

$$|\sqrt{V^T E V} - \sqrt{\hat{V}^T E \hat{V}}| = \frac{|V^T E V - \hat{V}^T E \hat{V}|}{\sqrt{V^T E V} + \sqrt{\hat{V}^T E \hat{V}}}. \quad (8)$$

又因 $V^T E V$ 和 $\hat{V}^T E \hat{V}$ 均为标量, 所以

$$\begin{aligned} |\sqrt{V^T E V} - \sqrt{\hat{V}^T E \hat{V}}| &= \\ \frac{\|(V - \hat{V})E(V + \hat{V})\|}{\sqrt{V^T E V} + \sqrt{\hat{V}^T E \hat{V}}} &\leq \frac{\lambda_{\min}(E)}{\sqrt{\lambda_{\max}(E)}} \frac{\|V^T V - \hat{V}^T \hat{V}\|}{\sqrt{V^T V} + \sqrt{\hat{V}^T \hat{V}}} \leq \\ |\sqrt{V^T E V} - \sqrt{\hat{V}^T E \hat{V}}| &\leq \frac{\lambda_{\max}(E)}{\sqrt{\lambda_{\min}(E)}} \frac{\|V^T V - \hat{V}^T \hat{V}\|}{\sqrt{V^T V} + \sqrt{\hat{V}^T \hat{V}}}. \end{aligned}$$

上式又可进一步写为

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{\min}(E)}{\sqrt{\lambda_{\max}(E)}} \frac{|(V^T V - \hat{V}^T \hat{V})|}{\sqrt{V^T V} + \sqrt{\hat{V}^T \hat{V}}} &\leq \\ |\sqrt{V^T E V} - \sqrt{\hat{V}^T E \hat{V}}| &\leq \\ \frac{\lambda_{\max}(E)}{\sqrt{\lambda_{\min}(E)}} \left(\frac{|V^T V - \hat{V}^T \hat{V}|}{\sqrt{V^T V} + \sqrt{\hat{V}^T \hat{V}}} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

这里可以证明

$$\text{不等式右端} = \lambda_{\max}(E)/\sqrt{\lambda_{\min}(E)} |\sqrt{V^T V} - \sqrt{\hat{V}^T \hat{V}}| = T_2 |\sqrt{V^T V} - \sqrt{\hat{V}^T \hat{V}}|,$$

$$\text{不等式左端} = \lambda_{\min}(E)/\sqrt{\lambda_{\max}(E)} |\sqrt{V^T V} - \sqrt{\hat{V}^T \hat{V}}| = T_1 |\sqrt{V^T V} - \sqrt{\hat{V}^T \hat{V}}|.$$

其中:

$$T_1 = \lambda_{\min}(E)/\sqrt{\lambda_{\max}(E)},$$

$$T_2 = \lambda_{\max}(E)/\sqrt{\lambda_{\min}(E)}.$$

因此, 存在一常数 $\lambda(T_1 \leq |\lambda| \leq T_2)$ 使得 $\sqrt{V^T E V} - \sqrt{\hat{V}^T E \hat{V}} = \lambda(\sqrt{V^T V} - \sqrt{\hat{V}^T \hat{V}}) = \lambda(\|V\| - \|\hat{V}\|)$. 证毕.

由式(2)和(3)可以进一步得到下列误差动态系统:

$$\begin{aligned} \dot{e}_d(t) &= Ae_d(t) + K_d(t) \frac{\Sigma e_d}{\sqrt{\hat{V}^T E \hat{V}}} + \\ &K_d(t) \Sigma \left(\frac{V}{\sqrt{\hat{V}^T E \hat{V}}} - \frac{V}{\sqrt{V^T E V}} \right) - GF. \end{aligned} \quad (10)$$

因为 (A, Σ) 是一个可观测对, 可设存在定常矩阵 L 使得 $H = A + L\Sigma$ 为一Hurwitz矩阵. 这表明存在正定矩阵 $P_1 > 0$ 和 $Q_1 > 0$ 使得下列Lyapunov方程成立:

$$H^T P_1 + P_1 H = -Q_1. \quad (11)$$

对式(10), 选择时变观测器增益为

$$K_d = L\sqrt{\hat{V}^T E \hat{V}}. \quad (12)$$

又由引理可知存在 λ_1 使得 $\sqrt{V^T E V} - \sqrt{\hat{V}^T E \hat{V}} = \lambda_1(\|V\| - \|\hat{V}\|)$. 这表明当 $F = 0$ (系统无故障时), 误差动态系统(10)可进一步简化成

$$\dot{e}_d = (A + L\Sigma)e_d + L\Sigma V \frac{\lambda_1(\|V\| - \|\hat{V}\|)}{\sqrt{V^T E V}}. \quad (13)$$

这是一个非线性误差系统. 对于式(13)所表示的误差系统, 可取如下形式的二次型Lyapunov函数

$$\pi = \frac{1}{2} e_d^T P_1 e_d. \quad (14)$$

利用式(13)的结构, 可得到关于Lyapunov函数 π 的一阶导数为

$$\begin{aligned} \dot{\pi} &= -\frac{1}{2} e_d^T Q_1 e_d + e_d^T P L \Sigma V \frac{\lambda_1(\|\hat{V} - e_d\| - \|\hat{V}\|)}{\sqrt{V^T E V}} \leq \\ &-\frac{1}{2} \lambda_{Q_1} \|e_d\|^2 + \frac{T_2 \|e_d\| \|P_1 L \Sigma\| \|V\| \|e_d\|}{\|V\| \sqrt{\|E\|}} = \\ &-\frac{1}{2} \left(\lambda_{Q_1} - \frac{2T_2 \|P_1 L \Sigma\|}{\sqrt{\|E\|}} \right) \|e_d\|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

当下列条件满足

$$\lambda_{Q_1} > \frac{2T_2 \|P_1 L \Sigma\|}{\sqrt{\|E\|}} \quad (16)$$

及系统无故障时($F = 0$), $\dot{\pi} < 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_d(t) = 0$. 这表明当系统无故障时由式(10)~(12)所组成的观测器是渐近稳定的. 因此 $\|\varepsilon_d(t)\| > \tau$ 时表明故障已经发生($F \neq 0$), 这里 τ ($\tau > 0$) 是一预先指定的门限值.

注 1 显然, 对任给的 L 使得式(11)成立并不一定能保证式(16)成立, 但对于任给的很小的 L 矩阵 ($L \rightarrow 0$), 当 A 是稳定的矩阵时, 命题显然成立.

由上面的推导可得具体的寻找 L 的步骤如下:

a) 用极点配置的方法确定出 L 的一个初值, 使得 H 为 Hurwitz 阵, 并尽可能地使 L 很小 ($L \rightarrow 0$);

b) 任给一个正定矩阵 Q_1 , 解式(11)所示的 Lyapunov 方程, 确定出正定矩阵 P_1 ;

c) 将 L, P, Q_1 代入到式(16)中验证, 看式(16)是否满足, 如不满足, 则回到步骤 a) 进行迭代, 直到式(11)和(16)都满足为止.

4 故障诊断(Fault diagnosis)

一旦系统故障被检测出来, 就需要对系统进行故障诊断以估计出故障的大小. 为此, 构造如下诊断观测器:

$$\begin{cases} \dot{V}_m(t) = AV_m(t) + Bu(t) + K_d(t)\varepsilon(t) + G\hat{F}, \\ \varepsilon_m(t) = \int_a^b (\sqrt{\hat{\gamma}} - \sqrt{\gamma}) dy, \\ \sqrt{\hat{\gamma}} = \frac{C(y)V_m(t)}{\sqrt{V_m^T E V_m}}. \end{cases} \quad (17)$$

这里 \hat{F} 是 F 的估计值. 设 $e_m = V_m - V$, $\tilde{F} = \hat{F} - F$. 又因存在 λ_2 使得 $\sqrt{V^T E V} - \sqrt{V_m^T E V_m} = \lambda_2(\|V\| - \|V_m\|)$. 则可得到诊断误差系统为

$$\dot{e}_m = H e_m + L \Sigma V \frac{\lambda_2(\|V\| - \|V_m\|)}{\sqrt{V^T E V}} + G(\hat{F} - F). \quad (18)$$

故障诊断的目的是选择 F 的估计值, 使得 $e_m \rightarrow 0$. 为此, 选择如下的 Lyapunov 函数

$$\pi = \frac{1}{2} e_m^T P_1 e_m + \frac{1}{2} \tilde{F}^T \tilde{F}. \quad (19)$$

对该 Lyapunov 函数求一阶导数

$$\dot{\pi} = -\frac{1}{2} e_m^T Q_1 e_m + e_m^T P_1 L \Sigma V \frac{\lambda_2(\|V\| - \|V_m\|)}{\sqrt{V^T E V}} + e_m^T P_1 G \tilde{F} + \tilde{F}^T \dot{\tilde{F}}. \quad (20)$$

假设故障的上界为已知的 $\frac{M}{2}$ (即 $\|F\| \leq \frac{M}{2}$), 并选择

如下的 \hat{F} 的自适应调节律

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{F}}{dt} &= -\Gamma \sqrt{V_m^T E V_m} \varepsilon_m(t) (\|\hat{F}\| \geq \frac{M}{2}), \\ \frac{d\hat{F}}{dt} &= 0 (\|\hat{F}\| \leq \frac{M}{2}). \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $\Gamma > 0$ 是一预先指定的学习系数. 该自适应调节律应使 $\|\hat{F}\| \leq \frac{M}{2}$.

令 $\bar{P}_1 = G^T P_1 - \Gamma \Sigma$, 则可以证明

$$\begin{aligned} \dot{\pi} &= -\frac{1}{2} e_m^T Q_1 e_m + e_m^T P_1 L \Sigma V \frac{\lambda_2(\|V\| - \|V_m\|)}{\sqrt{V^T E V}} + \\ &e_m^T P_1 G \tilde{F} - \tilde{F}^T \Gamma \sqrt{V_m^T E V_m} \left(\frac{\Sigma V_m}{\sqrt{V_m^T E V_m}} - \frac{\Sigma V}{\sqrt{V^T E V}} \right) = \\ &-\frac{1}{2} e_m^T Q_1 e_m + e_m^T P_1 L \Sigma V \frac{\lambda_2(\|V\| - \|V_m\|)}{\sqrt{V^T E V}} + \\ &\tilde{F}^T \bar{P}_1 e_m - \tilde{F}^T \Gamma \left(\frac{\sqrt{V^T E V} - \sqrt{V_m^T E V_m}}{\sqrt{V^T E V}} \right) \Sigma V \leq (22) \\ &-\frac{1}{2} (\lambda_{\min}(Q_1) - \frac{2 \|P_1 L \Sigma\| T_2}{\sqrt{\|E\|}}) \|e_m\|^2 + \\ &\|\tilde{F}\| \left(\|\bar{P}_1\| + \frac{T_2 \|\Gamma\| \cdot \|\Sigma\|}{\sqrt{\|E\|}} \right) \|e_m\| = \\ &-\delta_1 \|e_m\|^2 + \delta_2 \|\tilde{F}\| \|e_m\|. \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\delta_1 = \lambda_{\min}(Q_1) - \frac{2T_2 \|P_1 L \Sigma\|}{\sqrt{\|E\|}}, \quad \delta_2 = \|\bar{P}_1\| + \frac{T_2 \Sigma \|\Gamma\|}{\sqrt{\|E\|}}. \quad (24)$$

因为已假设故障的上界为已知的 $\frac{M}{2}$ ($\|F\| \leq \frac{M}{2}$), 并且通过自适应律(21)可使得 $\|\hat{F}\| \leq \frac{M}{2}$. 于是式(23)可化简为

$$\dot{\pi} \leq -\delta_1 (\|e_m\| - \frac{M\delta_2}{2\delta_1})^2 + \frac{M^2\delta_2^2}{4\delta_1} < 0. \quad (25)$$

因此当 $\|e_m\| \geq \frac{M\delta_2(\delta_1 + \sqrt{\delta_1})}{2\delta_1}$ 时, $\dot{\pi} < 0$. 这表明当系统无故障时由式(17)和(21)所组成的观测器是稳定的. 上述结果可总结成如下定理:

定理 1 (收敛性定理) 假设 $\|F\| \leq \frac{M}{2}$ 且通过自适应律(21)可使得 $\|\hat{F}\| \leq \frac{M}{2}$, 则能保证观测误差满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_m\| \leq \frac{M\delta_2(\delta_1 + \sqrt{\delta_1})}{2\delta_1}. \quad (26)$$

该定理表明当自适应调节律(21)用于诊断观测器(17)时, 诊断误差系统(18)是稳定的.

F 和 \hat{F} 的接近程度是故障诊断的关键. 可以从上面的分析过程看到, 当 $\|e_m\| \geq$

$\frac{M\delta_2(\delta_1 + \sqrt{\delta_1})}{2\delta_1}$ 时(即 e_m 在闭球外面时), $\dot{\pi} < 0$, 这表明 $\tilde{F} \rightarrow 0$. 当 $\|e_m\| \leq \frac{M\delta_2(\delta_1 + \sqrt{\delta_1})}{2\delta_1}$ 时, e_m 在闭球内. 此时有 $\|\hat{F}\| \leq \frac{M}{2}(\delta_1 + \sqrt{\delta_1})$, $\delta_1 = \lambda_{\min}(Q_1) - \frac{2T_2\|P_1L\Sigma\|}{\sqrt{\|E\|}}$. 这表明可通过 P_1, Q_1 的选取使得 δ_1 很小. 因此 \tilde{F} 事实上还是很小的, 即 F 和 \hat{F} 是很接近的.

5 容错控制过程(Fault tolerant control process)

5.1 无故障时系统输出概率密度函数最优跟踪控制律 u_1 的设计(Design of the fault-free optimal tracking controller u_1)

输出概率密度函数控制算法的设计目标是选择一个控制输入使得系统的实际输出概率密度函数尽可能跟踪一个事先给定的连续概率密度函数 $g(y)$, 这里 $g(y)$ 也是定义在 $[a, b]$ 区间上的函数. 假设无故障时系统输出概率密度函数最优跟踪控制律为 $u_1(t)$.

类似于对 $\gamma(y, u(t))$ 的逼近, 目标概率密度函数也可用有理平方根模型描述如下:

$$g(y) = C(y)V_g / \sqrt{V_g^T E V_g}. \quad (27)$$

其中 V_g 是期望目标的一个伪权值向量. 为实现输出概率密度函数最优跟踪, 当系统无故障时, 采用如下的二次型性能指标:

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\int_a^b (\sqrt{\gamma(y, u_1(t))} - \sqrt{g(y)})^2 dy + \zeta_1^T(t) R_1 \zeta_1(t) \right] dt. \quad (28)$$

其中: $R_1 = R_1^T > 0$, ζ_1 是由 $B\zeta_1(t) = Bu_1(t) + AV_g$ 定义的. 当系统正常工作时, $F = 0$, 将式(2)和(27)代入式(28), 式(28)的第一项为非线性项, 因此不能直接应用线性二次型准则求解最优的 ζ_1 . 为此, 需转换控制策略, 采用次优控制思想, 并构造如下的线性二次型性能指标以代替式(28):

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty [e_1^T(t) E e_1(t) + \zeta_1^T(t) R_1 \zeta_1(t)] dt. \quad (29)$$

式中 $e_1(t) = V(t) - V_g$ 为输出伪权值向量和目标伪权值向量的跟踪误差, 由此可得误差模型为

$$\dot{e}_1(t) = A e_1(t) + B \zeta_1(t). \quad (30)$$

不难发现, 式(29)和式(30)是一个典型的二次型最优调节问题. 虽然这是一个次优控制, 但是只要式(29)到达最小值时, 原目标函数(28)也到达了最小

值, 这样处理可使控制算法大为简化. 应用经典的控制理论不难求出反馈增益矩阵 K_1 . 具体地, 通过求解Riccati方程(31)求出矩阵 \tilde{P} (\tilde{P} 是一正定对称矩阵), 将所求出的 \tilde{P} 代入式(32)即可求出增益矩阵 K_1 :

$$\tilde{P}A + A^T \tilde{P} - \tilde{P}B R_1^{-1} B^T \tilde{P} + E = 0, \quad (31)$$

$$K_1 = -R_1^{-1} B^T \tilde{P}. \quad (32)$$

当 B 非奇异时, 可得到控制量为

$$u_1(t) = \zeta_1(t) - B^{-1} A V_g = -K_1 e_1(t) - B^{-1} A V_g. \quad (33)$$

因伪权值 $V(t)$ 在实际中不可测量, 因此要使用控制器 $u_1(t)$ 还须估计出状态变量(伪权值 $V(t)$). 这里采用状态观测器方法来获得伪权值.

在 $t < t_f$ 时, 故障检测观测器只观测原系统的状态, 而不会发出故障报警, 因此, 可以用故障检测观测器的状态代替控制器中系统的状态, 从而得到实际的控制器.

将式(3)中的 \hat{V} 代替 V 则得到的实际控制器为

$$u_1(t) = -K_1(\hat{V}(t) - V_g) - B^{-1} A V_g. \quad (34)$$

在控制律(34)的作用下及系统(2)正常工作时, 其输出概率密度函数跟踪了给定的分布.

$t > t_f$ 时, 系统中出现故障, $F \neq 0$, 为使得系统输出的概率密度函数仍能跟踪给定的分布, 可利用诊断出的故障 \hat{F} 的信息进行控制系统重组.

5.2 故障后控制系统重组(Post-fault controller re-configuration)

控制系统重组的任务是使故障后系统的输出概率密度函数仍能跟踪给定的分布. 故障估计出后, 可认为 $\hat{F} \approx F$. 为求出控制系统重组后的控制器 u_2 重新定义性能指标如下:

$$J_2 = \frac{1}{2} \left[\int_a^b (\sqrt{\gamma(y, u_2(t))} - \sqrt{g(y)})^2 dy + \zeta_2^T(t) R_2 \zeta_2(t) \right]. \quad (35)$$

同样构造如下线性二次型性能指标:

$$J_2 = \frac{1}{2} [e_2^T(t) E e_2(t) + \zeta_2^T(t) R_2 \zeta_2(t)]. \quad (36)$$

其中 $e_2(t) = V(t) - V_g$.

注2 容错控制时定义的性能指标是瞬时性能指标, 因为当系统发生故障时, 随机分布系统的输出概率密度函数不会再完全跟踪给定的概率密度函数. 所以重新定义瞬时性能指标, 使得发生故障后随机系统的输出概率密度函数尽可能跟踪给定的概率密度函数, 以实现随机分布系统的容错控制, 只是跟踪的精度会有所下降.

下面的任务是重新设计重组控制器 $u_2(t)$. 仍然借助全局跟踪时的控制器设计思想, 并让 $\zeta_2(t)$ 考虑故障的影响, 令 $B\zeta_2(t) = Bu'_2(t) + AV_g + G\hat{F}$. u'_2 为

要重新设计的控制器,仍对误差模型(30)进行二次型最优调节.则可得到

$$u_2'(t) = \zeta_2(t) - B^{-1}AV_g - B^{-1}E\hat{F} = -K_2e_2(t) - B^{-1}AV_g - B^{-1}G\hat{F}. \quad (37)$$

在控制律 u_2' 的作用下使得性能指标(36)达到最小,从而使目标函数(35)也达到最小.

实际中,系统状态一般不能直接得到,诊断观测器(17)一方面能估计出故障的幅值,另外也观测出了故障发生后动态随机分布系统的状态 $V_m(t)$,将观测状态代替系统的状态,得到实际的重组控制器为

$$u_2(t) = -K_2(V_m(t) - V_g) - B^{-1}AV_g - B^{-1}G\hat{F}. \quad (38)$$

通过对控制律 u_1 重新设计,得到控制律 u_2 可使得故障后系统输出概率密度函数仍能跟踪给定分布.

注3 在重组控制器的时候重新定义了瞬时性能指标,而重组控制器的设计仍借助了全局最优的思想来设计.如果所经历时间不足够长,全局性能指标(28)未必优于暂态性能指标(35).

以下对故障重组后的系统的稳定性加以分析.也即考察误差系统

$$e_2(t) = V(t) - V_g \quad (39)$$

的稳定性问题.首先可以证明误差系统满足

$$\dot{e}_2(t) = \dot{V}(t) - \dot{V}_g = AV(t) + Bu_2 + GF - \dot{V}_g.$$

将式(38)代入式(39)并考虑到 V_g 是一个常向量,可得到下式:

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= AV(t) + Bu_2 + GF = \\ & AV(t) + B(-K_2(V_m(t) - V_g) - \\ & B^{-1}AV_g - B^{-1}G\hat{F}) + GF = \\ & Ae_2 - BK_2e_2 + BK_2(V - V_m) - G\tilde{F} = \\ & (A - BK_2)e_2 - BK_2e_m - G\tilde{F}. \end{aligned} \quad (40)$$

显然, $A - BK_2$ 是一个稳定矩阵,从而存在正定矩阵 P_2 使得下式成立:

$$(A - BK_2)^T P_2 + P_2(A - BK_2) = -Q_2. \quad (41)$$

选择如下Lyapunov函数

$$\pi = e_2^T P_2 e_2.$$

并沿式(40)对Lyapunov函数求一阶导数得到

$$\begin{aligned} \dot{\pi} &= e_2^T [P_2(A - BK_2) + (A - BK_2)^T P_2] e_2 - \\ & 2e_2^T P_2 BK_2 e_m - 2e_2^T P_2 G\tilde{F} = \\ & -e_2^T Q_2 e_2 - 2e_2^T P_2 BK_2 e_m - 2e_2^T P_2 G\tilde{F} \leq \\ & -\lambda_{\min}(Q_2) \|e_2\|^2 + 2\|e_2\| \|P_2\| \cdot \\ & (\|BK_2\| \|e_m\| + \|\tilde{F}\| \|G\|). \end{aligned}$$

利用定理1可得到下式:

$$\begin{aligned} \dot{\pi} &\leq -\lambda_{\min}(Q_2) \|e_2\|^2 + 2\|e_2\| \cdot \\ & (\|P_2\| \|BK_2\| \frac{M\delta_2(\delta_1 + \sqrt{\delta_1})}{2\delta_1} + M\|G\| \|P_2\|) = \\ & -\omega_1 \|e_2\|^2 + 2\omega_2 \|e_2\|. \end{aligned}$$

其中

$$\omega_1 = \lambda_{\min}(Q_2),$$

$$\omega_2 = \|P_2\| \|BK_2\| \frac{M\delta_2(\delta_1 + \sqrt{\delta_1})}{2\delta_1} + M\|G\| \|P_2\|.$$

于是有

$$\dot{\pi} \leq -\omega_1 (\|e_2\| - \frac{\omega_2}{\omega_1}) + \frac{\omega_2^2}{\omega_1} < 0.$$

当 $\|e_2\| \geq \frac{\omega_2(\omega_1 + \sqrt{\omega_1})}{\omega_1}$, Lyapunov函数的一阶导数为负.从而有如下定理成立:

定理2 在定理1成立的前提下,如式(38)所示的重组控制律 u_2 保证了跟踪误差 e_2 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_2\| \leq \frac{\omega_2(\omega_1 + \sqrt{\omega_1})}{\omega_1}, \quad (42)$$

所以重组控制律 u_2 使得故障后的有界随机分布系统输出概率密度函数仍能跟踪给定的概率密度函数,实现了有理平方根有界随机分布系统的容错控制.

6 计算机仿真举例(Computer simulation examples)

为了进一步说明上述方法,考虑一个随机系统,其输出概率密度函数可以由如下的B样条函数 $B_i(y)$ ($i = 1, 2, 3$)来逼近.

$$\begin{cases} B_1(y) = 0.5(y-2)^2 I_1 + (-y^2 + 7y - 11.5) I_2 + \\ \quad 0.5(y-5)^2 I_3, \\ B_2(y) = 0.5(y-3)^2 I_2 + (-y^2 + 9y - 19.5) I_3 + \\ \quad 0.5(y-6)^2 I_4, \\ B_3(y) = 0.5(y-4)^2 I_3 + (-y^2 + 11y - 29.5) I_4 + \\ \quad 0.5(y-7)^2 I_5. \end{cases} \quad (43)$$

其中

$$I_i = \begin{cases} 1, & y \in [i, i+1] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

假定系统动态方程可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 0.8 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} V(t) + \\ & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \\ -0.5 & -0.2 & 0.1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1.5 \end{bmatrix} F. \end{aligned} \quad (44)$$

F 代表动态系统(44)的故障. $F = 0$ 时系统(44)正常工作,当 $t \geq 5$ s后 $F = 2$. 采样步长选择为0.05 s.

使式(12)中的 L 尽量小 将 L 取为 $L = [-0.1 \ 0.3 \ -0.15]^T$ 使得 $A + L\Sigma$ 为 Hurwitz 矩阵.

并选择 $Q_1 = \begin{bmatrix} 0.8121 & 0.0922 & 0.1662 \\ 0.0922 & 0.4249 & 0.3756 \\ 0.1622 & 0.3756 & 0.8386 \end{bmatrix}$, 求得 $P_1 =$

$$\begin{bmatrix} 0.0899 & 0.0522 & 0.0327 \\ 0.0522 & 0.1380 & 0.1076 \\ 0.0327 & 0.1076 & 0.1423 \end{bmatrix},$$

可使式(11)和式(16)同时得到满足, 且可使式(26)中 $\delta_1 = 0.0639$, $\delta_1 \rightarrow 0$, 因此 F 和 \hat{F} 非常接近. 提高了故障诊断算法的精度.

图1表示系统的残差随时间变化情况. 图2表示故障诊断结果, 该结果表明经过短暂的过渡过程, 故障估计 \hat{F} 可以准确地跟踪 F 的变化, 实现了快速有效的故障诊断.

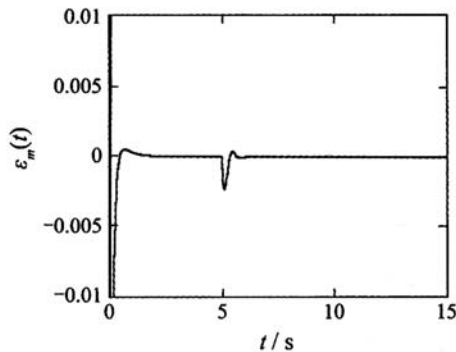


图 1 残差 $\varepsilon_m(t)$ 的变化

Fig. 1 Response of residual $\varepsilon_m(t)$

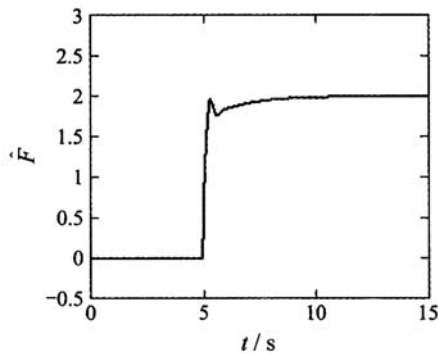


图 2 \hat{F} 的变化

Fig. 2 Response of \hat{F}

当系统(44)无故障时 ($F = 0$), 取

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

由式(31)可得

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.2632 & -0.0533 & -0.4075 \\ 0.5393 & 0.9570 & 0.3142 \\ 0.0472 & 0.1565 & 0.1394 \end{bmatrix}.$$

在控制器(34)的作用下, 初始条件分别为 $V(0) = [0.22 \ 0.32 \ -0.42]^T$, 目标为 $V_g = [10 \ 17 \ 10]^T$,

检测观测器和诊断观测器的初值分别为 $\hat{V}(0) = [0.4 \ 0.6 \ -0.6]^T$, $V_m(0) = [0.7 \ 0.8 \ -0.9]^T$, 系统正常工作时输出的概率密度函数对给定分布的跟踪结果如图3所示.

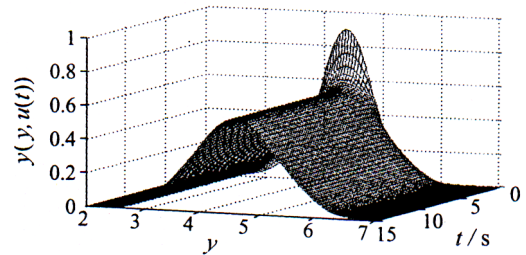


图 3 系统正常时输出概率密度函数 ($F = 0$)

Fig. 3 Normal output PDF ($F = 0$)

当 $t > 5$ s 后, 系统出现故障 ($F = 1$), 当诊断出故障后, 对系统进行控制器重组, 并取 $R_2 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}$, 在重组控制律(38)的作用下

系统输出概率密度函数的仿真结果如图4所示. 图5是发生故障不进行控制器重组与无故障时的最终概率密度函数 $\gamma(y, 300)$ 的比较, 由该图可看出, 发生故障后如果不进行控制器重组, 则系统输出的概率密度函数就不能跟踪给定的概率密度函数.

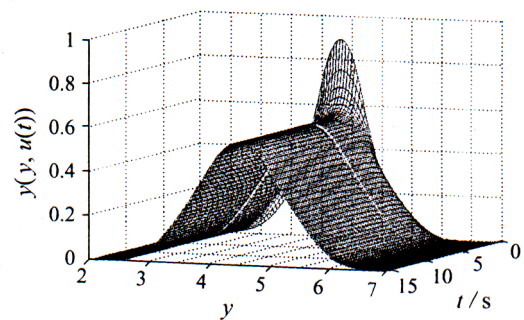


图 4 输出概率密度函数的容错控制效果

Fig. 4 Output PDF of the whole fault tolerant control process

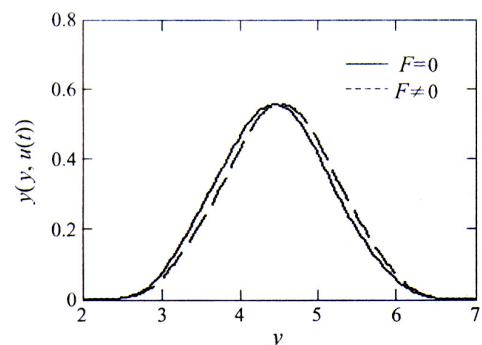


图 5 发生故障不进行控制器重组与无故障时的最终概率密度函数 $\gamma(y, 300)$ 的比较

Fig. 5 Final PDF $\gamma(y, 300)$ without controller reconfiguration in comparison with the normal final PDF

图6给出了系统(44)正常($F = 0$)时输出的最终概率密度函数 $\gamma(y, 300)$ 和系统发生故障并进行控制器重组后系统输出的最终概率密度函数 $\gamma(y, 300)$ 。图7给出了整个控制过程中控制器 $u_2(t)$ 的变化曲线,其中 $u_2(1)$, $u_2(2)$, $u_2(3)$ 为多输入 u_2 的3个分量。从图4和图6可看出仍能使故障后系统(44)的输出概率密度函数跟踪给定的概率密度函数,跟踪的精度接近无故障时的跟踪精度,容错控制效果良好。

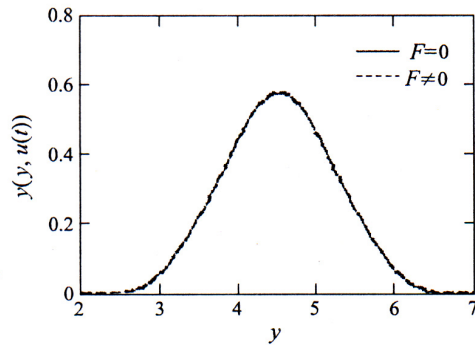


图6 系统正常($F = 0$)和故障时($F \neq 0$)的最终概率密度函数 $\gamma(y, 300)$

Fig. 6 Normal final PDF $\gamma(y, 300)$ ($F = 0$) and the final $\gamma(y, 300)$ ($F \neq 0$)

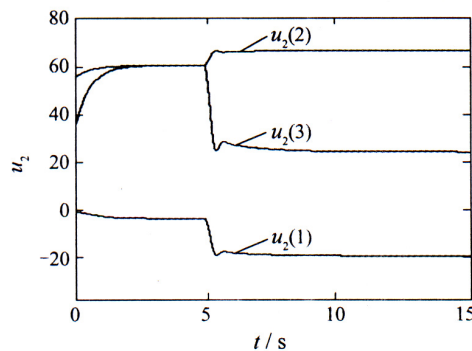


图7 控制器 u_2 的变化

Fig. 7 Response of the controller u_2

7 结论(Conclusion)

对采用有理平方根B样条逼近的非高斯动态随机分布系统,采用基于非线性自适应观测器的故障诊断方法,快速有效地诊断出该随机系统的非期望故障变化。当系统故障发生后,对控制器进行重新设计,设计全局最优跟踪控制律时考虑到故障的影响,使得故障重组后系统的输出概率密度函数仍能跟踪给定的分布,实现了该非高斯随机分布系统的容错控制。计算机仿真显示所提出的故障诊断和容错控制算法的有效性。

参考文献(References):

[1] BASSEVILLE M. On-board component fault detection and isolation using the statistical local approach [J]. *Automatica*, 1998, 34(11): 1391 – 1415.

- [2] CHARALAMBOUS C D, LOGOTHETIS A. Maximum likelihood parameter estimation from incomplete data via the sensitivity equations: the continuous-time case [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(5): 928 – 934.
- [3] LI P, KADIRKAMANATHAN V. Particle filtering based likelihood ratio approach to fault diagnosis in nonlinear stochastic systems [J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics-Part C*, 2001, 31(3): 337 – 343.
- [4] HIBEY J L, CHARALAMBOUS C D. Conditional densities for continuous-time nonlinear hybrid systems with applications to fault detection [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(11): 2164 – 2170.
- [5] 周东华, 孙优贤, 席裕庚, 等. 一类非线性系统参数偏差型故障的实时检测与诊断[J]. *自动化学报*, 1993, 19(2): 184 – 189. (ZHOU Donghua, SUN Youxian, XI Yugeng, et al. Real-time detection and diagnosis of “parameter bias” faults for nonlinear systems [J]. *Acta Automatic Sinica*, 1993, 19(2): 184 – 189.)
- [6] 周东华. 一类非线性系统的传感器故障检测与诊断新方法[J]. *自动化学报*, 1995, 21(3): 362 – 365. (ZHOU Donghua. A new approach of sensor fault detection and diagnosis of nonlinear systems [J]. *Acta Automatic Sinica*, 1995, 21(3): 362 – 365.)
- [7] PATTON R J, FRANK P M, CLARKE R N. *Fault Diagnosis in Dynamic Systems: Theory and Application* [M]. Engle-wood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [8] CHEN R H, MINGORI D L, SPEYER J L. Optimal stochastic fault detection filter [J]. *Automatica*, 2003, 39 (3): 377 – 390.
- [9] CHEN R H, SPEYER J L. A generalized least-squares fault detection filter [J]. *Int J of Adaptive Control and Signal Processing*, 2000, 14 (7): 747 – 757.
- [10] WANG H, LIN W. Applying observer based FDI techniques to detect faults in dynamic and bounded stochastic distributions [J]. *Int J Control*, 2000, 73(15): 1424 – 1436.
- [11] MARITON M. Detection delays, false alarm rates and reconfiguration of control systems[J]. *Int J Control*, 1989, 49 (4): 981 – 992.
- [12] SICHANDER R, WALKER B K. Stochastic stability analysis for continuous-time fault tolerant control systems[J]. *Int J Control*, 1993, 56(2): 433 – 452.
- [13] MAHMOUD M M, JIANG J, ZHANG Y M. Stochastic stability analysis of fault tolerant control systems in the present of noise[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(11): 1810 – 1815.
- [14] WANG H. *Bounded Dynamic Stochastic Systems: Modeling and Control*[M]. London: Springer-Verlag, 2000.
- [15] ZHOU J L, YUE H, WANG H. Shaping of output probability density functions based on the rational square-root B-spline model[J]. *Acta Automatic Sinica*, 2005, 31(3): 343 – 351.
- [16] GIROSI F, POGGIO T. Networks and the best approximation property[J]. *Biological Cybernetics*, 1990, 63(3): 169 – 176.

作者简介:

姚利娜 (1977—), 女, 博士生, 研究方向为动态系统的故障诊断和容错控制(确定系统与随机系统)、混沌控制与同步等, E-mail: michelle_lnxq@126.com;

王宏 (1960—), 男, 博士, 教授, 研究领域为有界随机分布控制系统的建模、控制与应用、动态系统故障诊断(确定系统与随机系统)等。