

## 不确定多重时滞随机中立系统鲁棒 $H_\infty$ 控制

谢立<sup>1</sup>, 刘济林<sup>1</sup>, 许晓鸣<sup>2</sup>

(1. 浙江大学信息与电子工程系, 浙江杭州 310027; 2. 上海交通大学自动化系, 上海 200030)

**摘要:** 针对一类不确定多重时滞随机中立系统, 研究了鲁棒  $H_\infty$  控制设计问题. 该随机中立系统的状态项、控制项、微分项、外部干扰输入项均含有时滞, 系统中的不确定性满足广义匹配条件. 首先, 利用随机 Lyapunov 稳定性理论和 Ito 微分法则, 推导出系统的随机鲁棒可镇定的充分条件. 在此基础上, 进一步给出了鲁棒  $H_\infty$  控制器存在的充分条件. 本文的研究结果以线性矩阵不等式的形式给出, 仿真结果表明了此控制器设计方法的有效性.

**关键词:** 随机中立系统; 多重时滞; 线性矩阵不等式; 随机鲁棒镇定; 鲁棒  $H_\infty$  控制

**中图分类号:** TP13      **文献标识码:** A

## Robust H-infinity control for uncertain stochastic neutral systems with multiple time delays

XIE Li<sup>1</sup>, LIU Ji-lin<sup>1</sup>, XU Xiao-ming<sup>2</sup>

(1. Department of Information and Electronics Engineering, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China;

2. Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

**Abstract:** The robust H-infinity control problem for uncertain stochastic neutral systems with multiple time delays is investigated in this paper. The parameter uncertainties in the systems are assumed to satisfy the generalized matching conditions, while the time delays exist in state, control, measure output, exogenous disturbance input and derivative state simultaneously. Firstly, stochastic robust stabilizable criterion is developed via Ito differential rule based on stochastic Lyapunov stability theory. A sufficient condition is then derived for the existence of robust H-infinity control law. All the results are expressed in terms of linear matrix inequality. Finally, a numerical example is given to show that the results are valid.

**Key words:** stochastic neutral systems; multiple time delays; linear matrix inequality; stochastic robust stabilization; robust H-infinity control

### 1 引言(Introduction)

传统鲁棒控制所研究的系统是确定型不确定系统(deterministic uncertain system), 通常此类系统模型包含了确定型名义系统和确定型不确定项, 而鲁棒控制主要研究对象为工业技术领域中的各类系统, 其不可避免地受到各类确定型以及随机型干扰的影响. 确定型系统在系统建模时往往不考虑随机因素的影响, 因此只适用于理想化情况或对系统精度要求不高的情况. 如果对于系统研究有较高精度要求, 则在真实系统建模时必须充分考虑随机因素的作用, 运用随机型模型来进行系统描述, 此时的系统模型中包含了确定型项和随机型项两个组成部分.

由于早先在随机 Lyapunov 函数分析过程存在着

理论障碍, 一直以来关于随机系统鲁棒控制的研究无法得到很大的发展, 文献[1]对随机系统的稳定性分析和控制器设计做了较为详细的介绍, 其中的大部分结果是在非 Lyapunov 稳定意义下给出的. 文献[2]提供了如何运用 Lyapunov 稳定性理论来研究随机系统稳定性的研究思路, 在很大程度上促进了随机系统鲁棒控制的发展. 在此基础上, Deng 利用反推设计方法研究了严格反馈非线性随机系统在概率意义下状态反馈与输出反馈镇定问题<sup>[3,4]</sup>, Xie 进一步研究了严格反馈非线性随机大系统的分散镇定问题<sup>[5]</sup>.

自从 1998 年由 Hinrichsen 首次提出利用线性矩阵不等式(LMI)方法研究随机系统  $H_\infty$  控制以来<sup>[6]</sup>, 随机系统的鲁棒镇定和控制设计问题引起了广大研究

者的注意. 随后, Hinrichsen等人将该研究结果推广到了离散随机系统中<sup>[7]</sup>. 由于传输、测量等各类因素的影响, 时滞现象普遍存在于现实系统中, 它们常常是引起系统不稳定的一个重要因素. 因此, 对于时滞随机系统鲁棒控制问题进行研究就显得十分有意义. Xie运用LMI研究了随机时滞大系统的分散鲁棒镇定问题<sup>[8]</sup>, Xu研究了随机时滞系统的鲁棒 $H_\infty$ 控制问题<sup>[9]</sup>. 值得注意的是, 目前有关于中立型随机系统鲁棒控制的研究报道还不多, 尤其是利用线性矩阵不等式(LMI)方法来研究随机中立系统的鲁棒控制器设计问题的成果很少见到. 本文中笔者将对同时在状态项、控制项、状态微分项、外部干扰输入项以及评估输出项中含有时滞和参数不确定性的多重时滞不确定随机中立系统鲁棒 $H_\infty$ 控制问题进行较为详细的分析.

## 2 系统描述(Systems descriptions)

考虑下列多重时滞不确定随机中立系统

$$\left\{ \begin{aligned} & d\{x(t) + A_2(t)x(t - \varsigma(t))\} = \\ & \{A(t)x(t) + A_1(t)x(t - d(t)) + \\ & B(t)u(t) + B_1(t)u(t - \tau(t)) + \\ & B_v(t)v(t) + B_{v1}(t)v(t - \rho(t))\}dt + \\ & \{A'(t)x(t) + A'_1(t)x(t - h(t)) + \\ & B'_v(t)v(t) + B'_{v1}(t)v(t - \rho(t))\}dw(t), \\ & z(t) = C(t)x(t) + C_1(t)x(t - d(t)) + \\ & D(t)u(t) + D_1(t)u(t - \tau(t)), \\ & x(t) = \varphi(t), \forall t \in [-\mu, 0]. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

其中: 系统状态变量 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , 控制输入 $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $v(t) \in \mathbb{R}^p$ 为外部干扰输入,  $w(t)$ 为一维零均标准维纳过程,  $z(t) \in \mathbb{R}^q$ 为控制输出;  $A, A_1, B, B_1, B_v, B_{v1}, A', A'_1, B'_v, B'_{v1}$ 为已知适维实常系数矩阵;  $\Delta A(t), \Delta A_1(t), \Delta B(t), \Delta B_1(t), \Delta B_v(t), \Delta B_{v1}(t), \Delta A'(t), \Delta A'_1(t), \Delta B'_v(t), \Delta B'_{v1}(t)$ 代表系统模型中的时变不确定参数, 其为连续的实矩阵函数并具有恰当的维数;  $d(t), \tau(t), \varsigma(t), h(t), \rho(t)$ 为时变系统状态时滞、控制项时滞、微分项状态时滞、随机项状态时滞、干扰输入项时滞;  $\phi(t)$ 为定义在时域区间 $[-\mu, 0]$ 上连续的初始实函数.

本文对系统(1)中的时变时滞和时变参数不确定性做下列假设:

**假设 1** 时变时滞 $d(t), \tau(t), h(t), \varsigma(t), \rho(t)$ 满足下列限制条件:

A1)

$$0 \leq \max\{d(t), \tau(t), h(t), \varsigma(t), \rho(t)\} < \mu < \infty.$$

(2)

A2)

$$\dot{d}(t) < \bar{d} < 1, \dot{h}(t) < \bar{h} < 1, \dot{\tau}(t) < \bar{\tau} < 1, \dot{\varsigma}(t) < \bar{\varsigma} < 1. \quad (3)$$

其中:  $\mu, \bar{d}, \bar{h}, \bar{\tau}$ 和 $\bar{\varsigma}$ 为已知实常数;  $A, A_1, B, B_1, B_v, B_{v1}, A', A'_1, B'_v, B'_{v1}$ 为已知适维实常系数矩阵;  $\Delta A(t), \Delta A_1(t), \Delta B(t), \Delta B_1(t), \Delta B_v(t), \Delta B_{v1}(t), \Delta A'(t), \Delta A'_1(t), \Delta B'_v(t), \Delta B'_{v1}(t)$ 代表系统模型中时变不确定参数, 它们都是连续的恰维实矩阵函数.

**假设 2** 时变不确定参数 $\Delta A(t), \Delta A_1(t), \Delta B(t), \Delta B_1(t), \Delta B_v(t), \Delta B_{v1}(t), \Delta A'(t), \Delta A'_1(t)$ 满足下列限制广义匹配条件:

$$\begin{aligned} & [\Delta A(t) \ \Delta A_1(t) \ \Delta A_2(t) \ \Delta B(t) \\ & \Delta B_1(t) \ \Delta B_v(t) \ \Delta B_{v1}(t)] = \\ & F_1 \Pi_1(t) [E_A \ E_{A_1} \ E_{A_2} \ E_B \ E_{B_1} \ E_{B_v} \ E_{B_{v1}}], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & [\Delta A'(t) \ \Delta A'_1(t) \ \Delta B'_v(t) \ \Delta B'_{v1}(t)] = \\ & F_2 \Pi_2(t) [E'_A \ E'_{A_1} \ E'_{B'_v} \ E'_{B'_{v1}}], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & [\Delta C(t) \ \Delta C_1(t) \ \Delta D(t) \ \Delta D_1(t)] = \\ & F_3 \Pi_3(t) [E_C \ E_{C_1} \ E_D \ E_{D_1}]. \end{aligned} \quad (6)$$

其中:  $E_A, E_{A_1}, E_{A_2}, E_B, E_{B_1}, E_{B_v}, E_{B_{v1}}, E_{A'}, E_{A'_1}, E_{B'_v}, E_{B'_{v1}}, E_C, E_{C_1}, E_D, E_{D_1}, F_1, F_2, F_3$ 为已知常数实矩阵;  $\Pi_1(t), \Pi_2(t)$ 和 $\Pi_3(t)$ 为具有Lebesgue可测量元素的适维时变未知矩阵, 满足条件

$$\begin{cases} \Pi_1^T(t) \Pi_1(t) \leq I, \Pi_2^T(t) \Pi_2(t) \leq I, \\ \Pi_3^T(t) \Pi_3(t) \leq I, \forall t. \end{cases} \quad (7)$$

本文的研究目的是构造适当的状态反馈控制器

$$u(t) = Kx(t). \quad (8)$$

其中 $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为状态反馈控制器增益. 在此控制器作用下, 使得

1) 在零输入条件下, 闭环随机中立系统对任何容许不确定性和时滞在概率意义下为随机鲁棒稳定;

2) 在零初值条件下, 对于任何容许不确定性和时滞, 随机中立系统(1)在概率意义下为随机鲁棒可镇定, 同时具有干扰衰减系数 $\gamma$ 和 $\gamma_1$ , 即对任何非零干扰输入 $v(t), v(t - \rho(t))$ 和控制输出 $z(t)$ 存在关系

$$\|z(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|v(t)\|_2^2 + \gamma_1^2 \|v(t - \rho(t))\|_2^2. \quad (9)$$

其中矢量函数 $f(t)$ 的范数 $\|f(t)\|_2$ 定义为

$$\|f(t)\|_2 := \sqrt{\int_0^\infty f^T(t) f(t) dt}.$$

## 3 主要结果(Main results)

在本节里, 将分别讨论多重时滞不确定中立系统的鲁棒镇定问题和鲁棒 $H_\infty$ 控制问题.

**3.1 随机鲁棒镇定(Stochastic robust stabilization)**

当  $v(t) = 0$  时, 考虑多重时滞不确定随机中立系统

$$d\{x(t) + [A_2 + \Delta A_2(t)]x(t - \zeta(t))\} = \{[A + \Delta A(t) + (B + \Delta B(t))K]x(t) + [A_1 + \Delta A_1(t)]x(t - d(t)) + [B_1 + \Delta B_1(t)]Kx(t - \tau(t))\}dt + \{[A' + \Delta A'(t)]x(t) + [A'_1 + \Delta A'_1(t)]x(t - h(t))\}dw(t) \quad (10)$$

的随机鲁棒镇定.

**定理 1** 考虑无干扰输入 ( $v(t) = 0$ ) 条件下的多重时滞不确定随机中立系统(1), 若存在对称正定矩阵  $X, \bar{R}, \bar{T}, \bar{S}, \bar{Q}$ , 以及矩阵  $Y$  和正常数  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) 满足线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} < 0. \quad (11)$$

其中:

$$M_{11} = AX + XA + BY + Y^T B^T + \varepsilon_3 F_1 F_1^T + \bar{R} + \bar{S} + \bar{T} + \bar{Q},$$

$$M_{12} = M_{21}^T = [A_1 X, 0, BY, 0],$$

$$M_{13} = M_{31}^T = [X E_A^T + Y^T E_B^T, X A^T + Y^T B^T, 0, 0],$$

$$M_{14} = M_{41}^T = [X E_A^T + Y^T E_B^T, X A^T, X E_{A'}^T, 0],$$

$$M_{22} = \text{diag}(-(1 - \bar{d})\bar{R}, -(1 - \bar{\zeta})\bar{T}, -(1 - \bar{\tau})\bar{S}, -(1 - \bar{h})\bar{Q}),$$

$$M_{23} = M_{32}^T = \begin{bmatrix} X E_{A_1}^T & X A_1^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X A_2^T & X E_{A_2}^T \\ Y^T E_{B_1}^T & Y^T B_1^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{24} = M_{42}^T = \begin{bmatrix} X E_{A_1}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y^T E_{B_1}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X A_1^T & X E_{A_1}^T & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{33} = \text{diag}(-\varepsilon_1 I, \varepsilon_1 F_1 F_1^T, \varepsilon_2 F_1 F_1^T - \zeta_1 I, -\varepsilon_2 I),$$

$$M_{44} = \text{diag}(-\varepsilon_3 I, \varepsilon_4 F_2 F_2^T - X, -\varepsilon_4 I, \zeta_1 I),$$

$$M_{34} = M_{43}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

则存在状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t), \quad K = YX^{-1}. \quad (12)$$

在此控制器作用下, 对于任何时滞和容许不确定项, 闭环多重时滞不确定随机中立系统(10)在概率意义下为随机鲁棒稳定.

**证** 建立如下Lyapunov函数

$$V(x, t) = \bar{x}^T(t)P\bar{x}(t) + \int_{t-d(t)}^t x^T(s)Rx(s)ds + \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s)Sx(s)ds + \int_{t-h(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds + \int_{t-\zeta(t)}^t x^T(s)Tx(s)ds. \quad (13)$$

其中:  $\bar{x}(t) = x(t) + [A_2 + \Delta A_2(t)]x(t - \zeta(t))$ ,  $P, R, S, Q$  为对称正定矩阵. 不难得到, 存在  $q_i > 0$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), 使得  $V(x, t)$  满足

$$\begin{cases} \lambda_{\min}(P) \|\bar{x}(t)\|^2 \leq V(x, t) \leq (\lambda_{\max}(P) + \mu\bar{\lambda}_q) \|\bar{x}(t)\|^2, \\ \bar{\lambda}_q = q_1 \lambda_{\max}(R) + q_2 \lambda_{\max}(S) + q_3 \lambda_{\max}(Q) + q_4 \lambda_{\max}(T). \end{cases} \quad (14)$$

沿着系统(10)的轨迹, 运用Ito微分法则, 对式(13)取导, 得到微分生成算子

$$LV(x, t) = \sum_{i=1}^8 U_i(x, t). \quad (15)$$

其中

$$\begin{cases} U_1(x, t) = x^T P(A + BK)x + x^T (A + BK)^T P x + x^T P A_1 x_d + x_d^T A_1^T P x + x^T P B_1 K x_\tau + x_\tau^T B_1^T K^T P x, \\ U_2(x, t) = x_\zeta^T \bar{A}_2^T P (\bar{A} + \bar{B}K)x + x^T (\bar{A} + \bar{B}K)^T P \bar{A}_2 x_\zeta + x_\zeta^T \bar{A}_2^T P \bar{A}_1 x_d + x_d^T \bar{A}_1^T P \bar{A}_2 x_\zeta + x_\zeta^T \bar{A}_2^T P \bar{B}_1 K x_\tau + x_\tau^T K^T \bar{B}_1^T P \bar{A}_2 x_\zeta, \\ U_3(x, t) = 2x^T P \{(\Delta A + \Delta BK)x + \Delta A_1 x_d + \Delta B_1 K x_\tau\}, \\ U_4(x, t) = (\bar{A}'x + \bar{A}'_1 x_h)^T P (\bar{A}'x + \bar{A}'_1 x_h), \\ U_5(x, t) = x^T R x - (1 - \dot{d}(t))x_d^T R x_d \leq x^T R x - (1 - \bar{d})x_d^T R x_d, \\ U_6(x, t) = x^T S x - (1 - \dot{\tau}(t))x_\tau^T S x_\tau \leq x^T S x - (1 - \bar{\tau})x_\tau^T S x_\tau, \\ U_7(x, t) = x^T Q x - (1 - \dot{h}(t))x_h^T Q x_h \leq x^T Q x - (1 - \bar{h})x_h^T Q x_h, \\ U_8(x, t) = x^T T x - (1 - \dot{\zeta}(t))x_\zeta^T T x_\zeta \leq x^T T x - (1 - \bar{\zeta})x_\zeta^T T x_\zeta. \end{cases} \quad (16)$$

为简洁起见, 令:  $x$ 表示 $x(t)$ ,  $x_\zeta$ 表示 $x(t - \zeta(t))$ ,  $x_d$ 表示 $x(t - d(t))$ ,  $x_\tau$ 表示 $x(t - \tau(t))$ ,  $x_h$ 表示 $x(t - h(t))$ ,  $v$ 表示 $v(t)$ ,  $v_\rho$ 表示 $v(t - \rho(t))$ ,  $\bar{A}$ 表示 $A + \Delta A(t)$ ,  $\bar{B}$ 表示 $B + \Delta B(t)$ ,  $\bar{A}'$ 表示 $A' + \Delta A'(t)$ ,  $\bar{A}'_1$ 表示 $A'_1 + \Delta A'_1(t)$ .

运用文献[9]中的引理, 可以得到

a) 若满足 $N_1 = \zeta_1^{-1} P^{-1} P^{-1} - \varepsilon_1 F_1 F_1^T > 0$ 与 $\zeta_1 I - \varepsilon_2 F_1 F_1^T > 0$ , 则有

$$U_2(x, t) \leq T_1^T \{ \zeta_1 [\bar{A} + \bar{B}K, \bar{A}_1, 0, \bar{B}_1 K]^T P P [\bar{A} + \bar{B}K, \bar{A}_1, 0, \bar{B}_1 K] + \zeta_1^{-1} [0, 0, \bar{A}_2, 0]^T [0, 0, \bar{A}_2, 0] \} T_1 \leq T_1^T \{ \varepsilon_1^{-1} [E_A + E_B K, E_{A_1}, 0, E_{B_1} K]^T [E_A + E_B K, E_{A_1}, 0, E_{B_1} K] + [A + BK, A_1, 0, B_1 K]^T \cdot N_1^{-1} [A + BK, A_1, 0, B_1 K] + [0, 0, A_2, 0]^T \cdot (\zeta_1 I - \varepsilon_2 F_1 F_1^T)^{-1} [0, 0, A_2, 0] + \varepsilon_2^{-1} [0, 0, E_{A_2}^T, 0]^T [0, 0, E_{A_2}, 0] \} T_1, \quad (17)$$

b)

$$U_3(x, t) \leq \varepsilon_3 x^T P F_1 F_1^T P x + \varepsilon_3^{-1} [(E_A + E_B K)x + E_{A_1} x_d + E_{B_1} K x_\tau]^T [(E_A + E_B K)x + E_{A_1} x_d + E_{B_1} K x_\tau]; \quad (18)$$

c) 若满足 $P^{-1} - \varepsilon_4 F_2 F_2^T > 0$ , 则有

$$U_4(x, t) \leq [x^T, x_h^T] \left\{ \begin{bmatrix} A'^T \\ A_1^T \end{bmatrix} (P^{-1} - \varepsilon_4 F_2 F_2^T)^{-1} [A', A'_1] + \varepsilon_4^{-1} \begin{bmatrix} E_{A'}^T \\ E_{A'_1}^T \end{bmatrix} [E_{A'}, E_{A'_1}] \right\} \begin{bmatrix} x \\ x_h \end{bmatrix}, \quad (19)$$

于是可得

$$LV(x, t) \leq T^T W T. \quad (20)$$

其中:

$$T^T = [x^T \ x_d^T \ x_\zeta^T \ x_\tau^T \ x_h^T],$$

$W =$

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & 0 & \Omega_{14} & 0 \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_{33} & 0 & 0 \\ \Omega_{41} & 0 & 0 & \Omega_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{55} \end{bmatrix} +$$

$$\varepsilon_1^{-1} [E_A + E_B K, E_{A_1}, 0, E_{B_1} K, 0]^T [E_A + E_B K, E_{A_1}, 0, E_{B_1} K, 0] + [A + BK, A_1, 0, B_1 K, 0]^T.$$

$$N_1^{-1} [A + BK, A_1, 0, B_1 K, 0] + [0, 0, A_2, 0, 0]^T \cdot (\zeta_1 I - \varepsilon_2 F_1 F_1^T)^{-1} [0, 0, A_2, 0, 0] + \varepsilon_2^{-1} [0, 0, E_{A_2}, 0, 0]^T [0, 0, E_{A_2}, 0, 0] + \varepsilon_3^{-1} [E_A + E_B K, E_{A_1}, 0, E_{B_1} K, 0]^T \cdot [E_A + E_B K, E_{A_1}, 0, E_{B_1} K, 0] + [A', 0, 0, 0, A'_1]^T (P^{-1} - \varepsilon_4 F_2 F_2^T)^{-1} \cdot [A', 0, 0, 0, A'_1] + \varepsilon_4^{-1} [E_{A'}, 0, 0, 0, E_{A'_1}]^T \cdot [E_{A'}, 0, 0, 0, E_{A'_1}]. \quad (21)$$

上式中

$$\begin{cases} \Omega_{11} = P(A + BK) + (A + BK)^T P + \varepsilon_3 P F_1 F_1^T P + R + S + Q, \\ \Omega_{21} = \Omega_{12}^T = A_1^T P, \quad \Omega_{41} = \Omega_{14}^T = K^T B^T P, \\ \Omega_{22} = -(1 - \bar{d})R, \quad \Omega_{33} = -(1 - \bar{\zeta})T, \\ \Omega_{44} = -(1 - \bar{\tau})\bar{S}, \quad \Omega_{55} = -(1 - \bar{h})\bar{Q}. \end{cases} \quad (22)$$

若存在实常数 $\zeta_i, \varepsilon_i > 0 (i = 1, \dots, 4)$ , 矩阵 $K$ , 以及正定对称矩阵 $P, R, T, S, Q$ 满足矩阵不等式 $W < 0$ , 则有 $LV(x, t) < 0$ , 此时闭环系统(10)在任何容许不确定以及时滞条件下是概率意义上鲁棒随机稳定的.

对线性矩阵不等式 $W < 0$ 分别左乘与右乘矩阵 $\text{diag}(P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1})$ , 并记 $X = P^{-1}$ ,  $Y = KP^{-1}$ ,  $\bar{R} = P^{-1}RP^{-1}$ ,  $\bar{T} = P^{-1}TP^{-1}$ ,  $\bar{S} = P^{-1}SP^{-1}$ ,  $\bar{Q} = P^{-1}QP^{-1}$ , 运用矩阵初等变换及Schur补引理, 可知 $W < 0$ 等价于不等式(11).

至此, 定理得证.

**注 1** 定理1针对多重时变时滞不确定随机中立系统, 给出了保证在状态反馈控制器作用下闭环系统随机鲁棒稳定的充分条件. 控制器可解的存在条件以线性矩阵不等式的形式给出, 便于利用MATLAB软件包求解.

### 3.2 随机鲁棒 $H_\infty$ 控制(Stochastic robust $H_\infty$ control)

下面讨论在零初始状态下, 含有外部干扰输入的中立型随机时滞系统的鲁棒 $H_\infty$ 控制问题.

**定理 2** 考虑同时含有状态与控制时滞的不确定随机时滞系统(1), 若存在对称正定矩阵 $X, \bar{R}, \bar{S}, \bar{Q}$ , 以及矩阵 $Y$ 和正常数 $\zeta_i, \varepsilon_i (i = 1, \dots, 5)$ , 满足线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} & \Theta_{24} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} & 0 \\ \Theta_{41} & \Theta_{42} & 0 & \Theta_{44} \end{bmatrix} < 0. \quad (23)$$

其中:

$$\Theta_{11} = AX + XA + BY + Y^T B^T + \bar{R} + \bar{S} + \bar{T} + \bar{Q} + \varepsilon_4 F_1 F_1^T,$$

$$\Theta_{12} = \Theta_{21}^T = [A_1 X \ 0 \ BY \ 0 \ B_v X \ B_{v1} X],$$

$$\Theta_{13} = \Theta_{31}^T = [XC^T + Y^T D, XE_C^T + Y^T E_D^T, 0, 0, XA^T + Y^T B^T],$$

$$\Theta_{14} = \Theta_{41}^T = [XE_A^T + Y^T E_B^T, XE_A^T + Y^T E_B^T, XA'^T, XE_A'^T, 0],$$

$$\Theta_{22} = \text{diag}(-(1 - \bar{d})\bar{R}, -(1 - \bar{\zeta})\bar{T}, -(1 - \bar{\tau})\bar{S}, -(1 - \bar{h})\bar{Q}, -\gamma^2 I, -\gamma_1^2 I),$$

$$\Theta_{23} = \Theta_{32}^T = \begin{bmatrix} XC_1^T & XE_{C_1}^T & 0 & 0 & XA_1^T \\ 0 & 0 & XE_{A_2}^T & XA_2^T & 0 \\ Y^T D_1^T & Y^T E_{D_1}^T & 0 & 0 & Y^T B_1^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_v^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{v1}^T \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{24} = \Theta_{42}^T = \begin{bmatrix} XE_{A_1}^T & XE_{A_1}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y^T E_{B_1}^T & Y^T E_{B_1}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & XA_1^T & XE_{A_1}^T & 0 \\ E_{B'_v}^T & E_{B'_v}^T & B'_v{}^T & E_{B'_v}^T & 0 \\ E_{B'_{v1}}^T & E_{B'_{v1}}^T & B'_{v1}{}^T & E_{B'_{v1}}^T & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{33} = \text{diag}(\varepsilon_1 F_3 F_3^T - I, -\varepsilon_1 I, -\varepsilon_2 I, \varepsilon_2 F_1 F_1^T - \zeta_1 I, \varepsilon_3 F_1 F_1^T),$$

$$\Theta_{34} = \Theta_{43}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{44} = \text{diag}(-\varepsilon_3 I, -\varepsilon_4 I, \varepsilon_5 F_2 F_2^T - X, -\varepsilon_5 I, -\zeta_1 I).$$

则存在状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t), \quad K = YX^{-1}. \quad (24)$$

在此控制器作用下, 对任何时滞和容许参数不确定项, 多重时滞不确定随机中立系统(1)在概率意义下为同时具有干扰衰减系数  $\gamma$  和  $\gamma_1$  鲁棒随机可镇定.

证 引入  $H_\infty$  性能测度为

$$J = E\left\{\int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \gamma^2 \nu^T(t)\nu(t) - \gamma_1^2 \nu^T(t - \rho(t))\nu(t - \rho(t))]dt\right\}. \quad (25)$$

由文献[9]可知, 存在

$$J \leq E\left\{\int_0^\infty [LV(x(t)) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 \nu^T(t)\nu(t) - \gamma_1^2 \nu^T(t - \rho(t))\nu(t - \rho(t))]dt\right\}. \quad (26)$$

不妨令

$$\Xi(t) = LV(x(t)) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 \nu^T(t)\nu(t) - \gamma_1^2 \nu^T(t - \rho(t))\nu(t - \rho(t)). \quad (27)$$

按照与定理1相同的证明思路, 可得

$$\Xi(t) \leq T^T W T. \quad (28)$$

其中:

$$T^T = [x^T \ x_d^T \ x_c^T \ x_\tau^T \ x_h^T \ v^T \ v_\rho^T]^T,$$

$W =$

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & 0 & \Omega_{14} & 0 & \Omega_{16} & \Omega_{17} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_{41} & 0 & 0 & \Omega_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{55} & 0 & 0 \\ \Omega_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{66} & 0 \\ \Omega_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{77} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{aligned} & [C + DK, C_1, 0, D_1 K, 0, 0, 0]^T (I - \varepsilon_1 F_3 F_3^T)^{-1} [C + DK, C_1, 0, D_1 K, 0, 0, 0] + \\ & \varepsilon_1^{-1} [E_C + E_D K, E_{C_1}, 0, E_{D_1} K, 0, 0, 0]^T [E_C + E_D K, E_{C_1}, 0, E_{D_1} K, 0, 0, 0] + \varepsilon_2^{-1} [0, 0, E_{A_2}, 0, 0, 0, 0]^T [0, 0, E_{A_2}, 0, 0, 0, 0] + \\ & [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T [0, 0, E_{A_2}, 0, 0, 0, 0] + [0, 0, A_2, 0, 0, 0, 0]^T (\zeta_1 I - \varepsilon_2 F_1 F_1^T)^{-1} [0, 0, A_2, 0, 0, 0, 0] + \\ & [A + BK, A_1, 0, B_1 K, 0, B'_v, B'_{v1}]^T N_1^{-1} [A + BK, A_1, 0, B_1 K, 0, B'_v, B'_{v1}] + \varepsilon_3^{-1} [E_A + E_B K, E_{A_1}, 0, E_{B_1} K, 0, E_{B'_v}, E_{B'_{v1}}]^T [E_A + E_B K, E_{A_1}, 0, E_{B_1} K, 0, E_{B'_v}, E_{B'_{v1}}] + \varepsilon_4^{-1} [E_A + E_B K, E_{A_1}, 0, E_{B_1} K, 0, E_{B_v}, E_{B_{v1}}]^T [E_A + E_B K, E_{A_1}, 0, E_{B_1} K, 0, E_{B_v}, E_{B_{v1}}] + [A', 0, 0, 0, A_1, B'_v, B'_{v1}]^T (P^{-1} - \varepsilon_5 F_2 F_2^T)^{-1} [A', 0, 0, 0, A_1, B'_v, B'_{v1}] + \varepsilon_5^{-1} [E_{A'}', 0, 0, 0, E_{A_1}', E_{B'_v}, E_{B'_{v1}}]^T [E_{A'}', 0, 0, 0, E_{A_1}', E_{B'_v}, E_{B'_{v1}}]. \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$\begin{cases} \Omega_{11} = P(A + BK) + (A + BK)^T P + \varepsilon_4 P F_1 F_1^T P + R + S + T + Q, \\ \Omega_{21} = \Omega_{12}^T = A_1^T P, \quad \Omega_{41} = \Omega_{14}^T = K^T B^T P, \\ \Omega_{61} = \Omega_{16}^T = B_v^T P, \quad \Omega_{71} = \Omega_{17}^T = B_{v1}^T P, \\ \Omega_{22} = -(1 - \bar{d})R, \quad \Omega_{33} = -(1 - \bar{\zeta})T, \\ \Omega_{44} = -(1 - \bar{\tau})\bar{S}, \quad \Omega_{55} = -(1 - \bar{h})\bar{Q}, \\ \Omega_{66} = -\gamma^2 I, \quad \Omega_{77} = -\gamma_1^2 I. \end{cases} \quad (30)$$

若存在 $\zeta_1, \varepsilon_i > 0 (i = 1, \dots, 5)$ , 矩阵 $K$ , 以及正定对称矩阵 $P, R, T, S, Q$ 满足矩阵不等式 $W < 0$ , 则有 $J(x, t) \leq E\{\int_0^\infty (T^T W T) dt\} < 0$ , 此时不确定随机中立系统(1)在任何容许不确定以及时滞条件下是概率意义上同时具有干扰衰减系数 $\gamma$ 和 $\gamma_1$ 鲁棒随机可镇定的.

对矩阵不等式 $W < 0$ 分别左乘与右乘矩阵 $\text{diag}(P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, I, I)$ , 并记 $X = P^{-1}, Y = KP^{-1}, \bar{R} = P^{-1}RP^{-1}, \bar{T} = P^{-1}TP^{-1}, \bar{S} = P^{-1}SP^{-1}, \bar{Q} = P^{-1}QP^{-1}$ , 运用矩阵初等变换以及Schur补引理, 可知 $W < 0$ 等价于不等式(23).

至此, 定理得证.

**注 2** 当系统(1)中的参数 $A_2 + \Delta A_2(t) = 0, B_1 + \Delta B_1(t) = 0, \Delta B_v(t) = 0, B_{v1} + \Delta B_{v1}(t) = 0, \Delta B'_v(t) = 0, B'_{v1} + \Delta B'_{v1}(t) = 0, \Delta C(t) = 0, C_1 + \Delta C_1(t) = 0, \Delta D(t) = 0, D_1 + \Delta D_1(t) = 0$ , 则系统简化为文献[9]所研究的系统, 文献[9]所给出的定理可看作是本文研究结果的特例.

#### 4 仿真示例(Simulation example)

在本节中, 给出一个数值示例来验证本文所提出的鲁棒 $H_\infty$ 控制器设计方法的有效性.

考虑多重时滞不确定随机中立系统(1), 系统参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ 0.4 & 0.15 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, B_v = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{v1} = \begin{bmatrix} 0.05 & -0.05 \\ 0.12 & 0.1 \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} -0.16 & -0.05 \\ 0.2 & 0.15 \end{bmatrix},$$

$$A'_1 = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.04 \\ -0.05 & 0.1 \end{bmatrix}, B'_v = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.5 \\ -1.25 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$B'_{v1} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ -0.05 & 0.2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -1.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.12 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ -0.2 & 0.5 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.15 \end{bmatrix}, F_3 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, E_A = [0.1 \ 0],$$

$$E_{A_1} = [0.05 \ 0.1], E_{A_2} = [0 \ 0.1],$$

$$E_B = [0 \ 0.2], E_{B_1} = [0 \ 0.1],$$

$$E_{B_v} = [0.05 \ 0.1], E_{B_{v1}} = [0.1 \ 0.1],$$

$$E_{A'} = [0 \ 0.05], E_{A'_1} = [0.1 \ 0.05],$$

$$E_{B'_v} = [0.1 \ 0.15], E_{B'_{v1}} = [0.05 \ 0.25],$$

$$E_C = [0.2 \ 0.25], E_{C_1} = [0.05 \ 0.1],$$

$$E_D = [0 \ 0.1], E_{D_1} = [0 \ 0.1],$$

$$\gamma = 1.2, \gamma_1 = 1, \bar{d} = 0.5,$$

$$\bar{h} = 0.3, \bar{\tau} = 0.4, \bar{\zeta} = 0.6.$$

采用本文的方法, 求解LMI(23), 可得状态反馈控制器为

$$u(t) = \begin{bmatrix} -0.2026 & 0.0840 \\ 1.1290 & -0.1274 \end{bmatrix} x(t).$$

在此控制器作用下, 多重时滞不确定随机中立系统(1)在一定概率意义下对于容许时滞和参数不确定性是鲁棒随机稳定的, 并且具有干扰衰减系数 $\gamma$ 和 $\gamma_1$ .

#### 5 结束语(Conclusion)

本文研究了一类不确定多重时滞随机中立系统的鲁棒 $H_\infty$ 控制问题, 该系统在状态项, 控制项, 微分状态项和外部干扰输入项同时含有时滞与参数不确定性. 文中导出了该系统随机鲁棒可稳定的充分条件, 并提出实现系统在一定概率意义下具有干扰衰减系数 $\gamma$ 和 $\gamma_1$ 鲁棒镇定的鲁棒 $H_\infty$ 控制器设计方法. 本文的研究结果以LMI形式给出, 可以利用MATLAB工具包方便求解. 通过数值实例仿真, 证明本文提出的控制器设计方法是可行的.

#### 参考文献(References):

- [1] 刘永清, 冯昭枢. 大型动力系统的理论与应用——随机、稳定与控制[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1992.  
(LIU Yongqing, FENG Zhaoshu. *Theory and Applications of Large-scale Dynamical Systems—Stochastic, Stability and Control*[M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1992.)
- [2] FLORCHINGER P. Lyapunov like techniques for stochastic stability[J]. *SIAM J of Control and Optimization*, 1995, 33(4): 1151 – 1169.
- [3] DENG H, KRSTIC M. Stochastic nonlinear stabilization I: a backstepping design[J]. *Systems & Control Letters*, 1997, 32(3):143 – 150.
- [4] DENG H, KRSTIC M. Stochastic nonlinear stabilization II: Inverse optimality[J]. *Systems & Control Letters*, 1997, 32(3): 151 – 159.
- [5] XIE S, XIE L. Decentralized stabilization of a class of interconnected stochastic nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(1): 132 – 137.
- [6] HINRICHSEN D, PRITCHARD A J. Stochastic  $H_\infty$ [J]. *SIAM J of Control and Optimization*, 1998, 36(5): 1504 – 1538.
- [7] el BOUHTOURI A, HINRICHSEN D, PRITCHARD A J.  $H_\infty$  type control for discrete-time stochastic systems[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 1999, 9(13): 923 – 948.

其中:

$$\begin{aligned} \alpha(z, x_1, x_2, \hat{\theta}_1) &= \\ b_1 x_2 + (x_2 - z)\hat{\theta}_1 + (1 + z + x_1)^2 x_1, \\ \beta(z, x_1, x_2, \hat{\theta}_1) &= \hat{\theta}_1 - b_1 - b_1 x_1 + 2 x_1 \hat{\theta}_1. \end{aligned}$$

## 5 结论 (Conclusion)

本文研究了相当广泛的一类非线性系统的鲁棒自适应镇定, 得到了系统可镇定的充要条件, 给出了控制器的算法, 该结论可以容易地推广到多变量和全局的情形. 给出的例子表明, 该结论可以有效地应用于部分非最小相位非线性系统和不存在相对阶的系统.

## 参考文献 (References):

- [1] BARMISH B R, LEITMANN G. On ultimate boundedness control of uncertain systems in the absence of matching assumptions[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1982, 27(1): 153 – 158.
- [2] CORLESS M J, LEITMANN G. Continuous-state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1981, 26(5): 1139 – 1144.
- [3] QU Z. Robust control of nonlinear uncertain systems under generalized matching conditions[J]. *Automatica*, 1993, 29(3): 985 – 998.
- [4] ISIDORI A. *Nonlinear Control System*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [5] 于占东, 王庆超. 一类非线性系统的微分平滑反步自适应输出反馈控制[J]. *控制理论与应用*, 2005, 22(5): 687 – 693. (YU Zhandong, WANG Qingchao. Differential flatness adaptive backstepping output feedback control for a class of nonlinear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(5): 687 – 693.)
- [6] SASTRY S S, ISIDORI A. Adaptive control of linearizable systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(11): 1123 – 1131.
- [7] 费树岷, 冯纯伯. 模有界非线性不确定系统的鲁棒镇定[J]. *东南大学学报*, 1998, 28(4): 77 – 82. (FEI Shumin, FENG Chunbao. Nonlinear uncertain systems and Lyapunov-type stabilizability[J]. *J of Southeast University*, 1998, 28(4): 77 – 82.)
- [8] KANELLAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V, MORES A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(11): 1241 – 1253.
- [9] MARINO R, TOMEI P. Global adaptive output feedback control nonlinear systems, part 11: nonlinear parameterization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(1): 33 – 48.
- [10] 程代展. 非线性系统的几何理论[M]. 北京: 科学出版社, 1988. (CHENG Daizhan. *Geometry Theory of Nonlinear Systems*[M]. Beijing: Science Press, 1988.)

## 作者简介:

余焱 (1968—), 1995年获武汉大学博士学位, 1995年~1997年在东北大学自动控制系进行博士后研究工作, 1997年起任上海交通大学副教授, 研究方向为非线性系统的微分几何方法、鲁棒控制、变结构控制、自适应控制及非线性大系统等, E-mail: yanshe@sjtu.edu.cn;

姜建国 (1959—), 上海交通大学教授, 博士生导师, 研究方向为非线性控制、大功率电力传动等;

张嗣瀛 (1958—), 中科院院士, 东北大学教授, 博士生导师, 研究方向为非线性控制、大系统、复杂系统分析与控制.

(上接第928页)

- [8] XIE S, XIE L. Stabilization of a class of uncertain large-scale stochastic systems with time delays[J]. *Automatica*, 1999, 36(1): 161 – 167.
- [9] XU S, CHEN T. Robust  $H_\infty$  control for uncertain stochastic systems with state delay[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(12): 2089 – 2094.

## 作者简介:

谢立 (1974—), 男, 浙江大学信息与电子工程系副教授, 分别于1996年和1999年在浙江大学获学士学位和硕士学位, 1999年至2003年在上海交通大学自动化系学习, 获博士学位, 目前研究方向为智能机器人控制、鲁棒信号处理、非线性控制, E-mail: xiehan@zju.edu.cn;

刘济林 (1947—), 男, 教授, 博士生导师, 浙江大学信息与通信

工程研究所所长, 浙江大学“通信与信息系统”国家重点学科主要负责人, 1970年本科毕业于清华大学精仪系, 1981年在中科院获硕士学位, 1970年至1978年为清华大学教师, 1981年起为浙江大学教师, 曾任柏林工业大学和加州大学伯克利分校访问学者, 目前研究方向为基于视觉传感的月球车导航控制、智能交通系统、信号与信息处理, E-mail: liujl@zju.edu.cn;

许晓鸣 (1957—), 男, 上海交通大学自动化系教授, 博士生导师, 同时任上海理工大学校长, 上海系统科学研究院院长, 1982年在原华中工学院获学士学位, 1987年获上海交通大学博士学位, 1988年至1990年获洪堡基金资助在慕尼黑工业大学从事博士后研究工作, 研究方向为系统工程、过程优化控制、预测控制等, E-mail: xmxu@sjtu.edu.cn.