

## 一种基于小波的模糊建模方法

张平安<sup>1</sup>, 李人厚<sup>2</sup>

(1. 深圳信息职业技术学院 计算机应用系, 广东 深圳 518029; 2. 西安交通大学 系统工程研究所, 陕西 西安 710049)

**摘要:**为克服一般Takagi-Sugeno模糊模型的局限性, 提出了一种新的用于复杂系统建模的模糊模型. 理论分析表明该模型可表示任何一个紧集上的连续函数. 该模型的一个显著特点是, 模糊模型的输入输出关系与使用特殊母波函数的小波变换的形式相同. 基于该性质, 可方便地运用小波变换理论确定模糊模型的结构并初始化模型参数. 本文详细地介绍了辨识该模糊模型的算法. 通过对一个复杂非线性系统的建模并与以前的结果进行比较, 验证了本文方法的有效性.

**关键词:** 模糊建模; 小波变换; 模糊模型

**中图分类号:** TP393      **文献标识码:** A

## Wavelet-based approach to fuzzy modelling

ZHANG Ping-an<sup>1</sup>, LI Ren-hou<sup>2</sup>

(1. Department of Computer Applications, Shenzhen Institute of Information Technology, Shenzhen Guangdong 518029, China;

2. Institute of Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi 710049, China)

**Abstract:** A new fuzzy model for complex systems is presented to overcome the limitation of the general Takagi-Sugeno fuzzy models. Theoretical analysis is given to show that the proposed fuzzy model can represent any continuous function over a compact set. The distinguished feature of the fuzzy model is that the input-output representation of the fuzzy model is the same as that of wavelet transforms of using special mother wavelet function. Based on the property, wavelet transforms can thus be conveniently used to determine the proper structure and initial parameters. An algorithm for identifying the proposed fuzzy model is then described in detail. Finally, an example is given to show the feasibility of the proposed fuzzy model by comparing it with existing research.

**Key words:** fuzzy modeling; wavelet transforms; fuzzy models

### 1 引言(Introduction)

自文献[1]建立一阶Takagi-Sugeno(以下简称T-S)模型以来, 国内外许多学者对此模型进行了卓有成效的研究<sup>[1~3]</sup>. 这种一阶T-S模型是典型的拟线性模糊模型. 为了提高模型的辨识精度, 不得不增加模糊模型的规模, 也就是增加模糊规则数, 显然, 这将导致模糊模型的结构及其辨识过程的复杂性增加. Buckley<sup>[3]</sup>从设计模糊控制器的需要出发, 提出了一种基于多项式的更一般的T-S模型; 并且从理论上证明了这种模糊模型具有任意逼近性质. 根据Buckly的理论结果, 并结合以往实践经验来看, 这种拟非线性模糊模型具有更好的辨识精度和泛化性能. 但Buckly的模型随着系统输入变量的个数及多项式阶次的增加, 不仅所需辨识的参数很多, 而且模型本身的结构很复杂, 这对于实际系统的模糊建模是一

个非常严重的问题. 这种模型一般只有理论意义, 而无实用价值.

本文则另辟蹊径, 提出一种新的模糊模型, 这种模型的特点是: 对于单输入系统, 该模型与一阶T-S模型等价, 而对于多输入系统, 该模型则变成了一个拟非线性模糊模型. 针对这种特殊的模糊模型, 笔者还发现了该模型的输入输出关系与使用特殊母波函数的小波变换的形式相同. 基于该性质, 本文提出了用小波变换的理论进行模糊模型结构辨识的新方法. 该模型不仅能解决上述一阶T-S模型的局限性, 而且与Buckly的模型比较, 降低了要辨识的参数的个数及模型结构的复杂性. 从理论上证明了本文提出的模糊模型具有任意逼近性质. 仿真结果表明, 本文的模糊模型具有辨识精度高和良好的泛化性能的优点.

## 2 模糊模型的描述(Description of fuzzy models)

一般的T-S模糊模型由下面的一系列模糊规则组成:

$$R^i: \text{IF } x_1 \text{ 是 } A_{j_1}^i \text{ 和 } x_2 \text{ 是 } A_{j_2}^i \text{ 和 } \dots \text{ 和 } x_q \text{ 是 } A_{j_q}^i \\ \text{THEN } \hat{y}_i = f_i(X). \quad (1)$$

其中:  $R^i$ 表示模糊模型的第*i* ( $i = 1, 2, \dots, c$ )条规则;  $x_1, x_2, \dots, x_q$ 是系统的输入变量, 又称前提(前件)变量;  $A_{j_k}^i$ 是前提变量相应的隶属函数, 描述这些隶属函数的参数称为前提参数, 其中:  $1 \leq j_k' \leq J_k, k = 1, 2, \dots, q, J_k$ 为第*k*个输入变量模糊划分的个数,  $c = \prod_{k=1}^q J_k$ ;  $f_i(X)$ 为一连续函数, 通常用多项式表示. 甚至可以是一个网络结构合理的前馈神经网络.

为克服一阶T-S模型和Buckly模型的局限性, 本文提出如下形式的模糊模型:

$$R^i: \text{IF } x_1 \text{ 是 } A_1^i \text{ 和 } x_2 \text{ 是 } A_2^i \text{ 和 } \dots \text{ 和 } x_q \text{ 是 } A_q^i \\ \text{THEN } \hat{y}_i = w_i \prod_{j=1}^q (p_{j3}^i - p_{j4}^i x_j) \quad (2)$$

这里的 $A_j^i (j = 1, 2, \dots, q)$ 为如下高斯函数:

$$A_j^i(p_{j1}^i, p_{j2}^i) = e^{-((x_j - p_{j1}^i)/p_{j2}^i)^2}. \quad (3)$$

从式(2)可知, 本文模糊模型采用散射划分方法确定模糊模型的输入结构子空间. 有效地克服了一般T-S模型的致命弱点, 即模糊模型的规则数随着输入变量的增加而成指数增加.

令

$$\beta_i = T(A_1^i, A_2^i, \dots, A_q^i). \quad (4)$$

这里:  $T$ 取乘积算子,  $\beta_i$ 的实际意义是第*i*条规则的激励水平, 并且满足 $0 \leq \beta_i \leq 1$ .

假设式(2)所示的T-S模型由*c*条规则组成, 那么根据式(3)和(4), 采用加权和去模糊化方法, 得到模型的输入输出表达式为

$$y = \sum_{i=1}^c \beta_i \hat{y}_i = \\ \sum_{i=1}^c w_i \prod_{j=1}^q e^{-((x_j - p_{j1}^i)/p_{j2}^i)^2} \prod_{j=1}^q (p_{j3}^i - p_{j4}^i x_j). \quad (5)$$

根据Stone-Weierstrass定理, 证明了对于任意给定的一个紧集式上连续实函数, 存在一个式(2)所示的T-S模糊模型能以任意精度逼近该函数(限于篇幅, 省略了具体证明过程).

## 3 小波变换与模糊模型的关系(Relationship between wavelet transforms and fuzzy models)

给定Hilbert空间*H*中的框架 $\psi_{m,n}$ , 对于任意的 $f \in H$ ,  $f$ 具有如下表示:

$$f(X) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q, n \in \mathbb{Z}^q} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}(X). \quad (6)$$

其中 $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$ 表示 $f(X)$ 的小波变换, 且 $\psi_{m,n}$ 定义为

$$\psi_{m,n}(X) = \psi_{m_1, n_1}^1(x_1) \psi_{m_2, n_2}^2(x_2) \dots \psi_{m_q, n_q}^q(x_q). \quad (7)$$

通过平移和伸缩母波函数 $\psi$ 得到具有如下形式的 $\psi_{m_i, n_i}^i(x_i)$ :

$$\psi_{m_i, n_i}^i(x_i) = 2^{m_i/2} \psi^i(2^{m_i} x_i - n_i), \quad m_i, n_i \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

这里的 $m_i$ 和 $n_i$ 分别为伸缩和平移参数.

本文的母波函数 $\psi$ 取Mexican Hat函数:

$$\psi(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}. \quad (9)$$

那么, 根据式(6)~(9), 有

$$f(x) = \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}^q, n \in \mathbb{Z}^q} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}(x) \approx \\ \sum_{m_i \in \mathbb{Z}, n_i \in \mathbb{Z}^q} \langle f, \psi_{m_i, n_i} \rangle \prod_{j=1}^q 2^{m_i/2} (n_j - \\ 2^{m_i} x_j) e^{-(2^{m_i} x_j - n_j)^2/2} = \\ \sum_{m_i \in \mathbb{Z}, n_i \in \mathbb{Z}^q} w_i \prod_{j=1}^q e^{-(2^{m_i} x_j - n_j)^2/2} \\ \prod_{j=1}^q (2^{m_i/2} n_j - 2^{3m_i/2} x_j). \quad (10)$$

这里 $w_i = \langle f, \psi_{m_i, n_i} \rangle$ 且*i*为小波下标. 比较式(5)和式(10), 不难发现式(2)所示的模糊模型的输入-输出关系与式(10)所示的小波变换之间具有形式上相同的性质. 该性质是本文进行模糊模型结构辨识的基础.

## 4 模糊模型辨识(Identification of fuzzy models)

### 4.1 结构辨识(Structure identification)

式(2)所示的模糊模型的结构辨识要确定模型的规则数*c*和模糊前提结构空间的划分 $A_j^i (j = 1, 2, \dots, q)$ . 根据式(5)和(10)可知, 模型的规则数*c*与小波变换中小波的个数相同, 而且如果确定了小波变换中的小波基, 则可以得到确定模糊模型前提结构空间的划分的重要参数 $p_{j_l}^i (j =$

1, 2, \dots, q, l = 1, 2). 为此, 本文提出了如下选择小波的算法.

首先, 基于经验和仿真计算, 取“Mexican Hat”小波的伸缩参数  $m_i$  典型的变化范围为  $[-4, 3]$ . 然后, 采用如下两步法来确定所需要的小波.

**Step 1** 选择有限小波候选集.

与文献[1]一样, 本文假设小波的支撑集(wavelet supports)近似为在输入空间的超立方体, 这样便于通过单独检验每一维输入的小波支撑来确定小波候选集.

根据小波的性质, 一个小波函数在实际感兴趣的伸缩参数变化范围内的支撑为有限集合. 也就是说, 对于特定的伸缩参数  $M_i$ , 小波具有有限多个平移值  $n_j \in \mathbb{Z}$ . 因此, 首先根据经验设置合适的  $n_{\max}$  和  $n_{\min}$ , 使得  $n_{\min} \leq n \leq n_{\max}$ . 这时, 选择小波候选集的任务变成在所确定的平移参数区间内, 搜索满足条件的平移参数值. 显然, 小波候选集中的元素必须满足的基本条件是它们的支撑要包含被辨识系统的数据. 从具体实现角度来说, 对于长度为  $L$  的训练数据集, 第  $j$  个输入向量  $xx_j^d \in \mathbb{R}^L, j = 1, 2, \dots, q$ , 须按照下式来寻找当前伸缩值  $m_i$  下的满足条件的平移参数集:

$$N_j = \{n | m_i \in [-4, 3]: \psi_{m_i, n}(xx_j^d)^T \psi_{m_i, n}(xx_j^d) > \epsilon_j, n_{\min} \leq n \leq n_{\max}\}, j = 1, 2, \dots, q. \quad (11)$$

其中  $\epsilon_j$  为一正数, 通过选择该常数, 可控制  $N_j$  的大小.  $i$  和  $j$  分别为小波和输入变量的下标. 从式(11)可知, 小波  $\psi_{m_i, n_j}$  的支撑中至少包含  $xx_j^d$  的一个数据点.

按照上述方法, 得到与每一维输入变量对应的小波的平移参数集. 那么, 根据下面的公式, 可确定输入  $x$  的小波  $\psi_{M_i, n_1, n_2, \dots, n_q}$  的有限候选集:

$$W = \{\psi_{m_i, n_1, n_2, \dots, n_q} : \prod_{j=1}^q (\psi_{m_i, n_j}(xx_j^d)^T \psi_{m_i, n_j}(xx_j^d)) \geq \epsilon, n_j \in N_j\}. \quad (12)$$

其中:  $\epsilon$  也是一个可选择的正数, 用来控制  $W$  的个数;  $i$  和  $j$  分别为小波和输入变量的下标. 该式反映了式(7)中张量积的特性. 通常,  $\prod_{j=1}^q \psi_{m_i, n_j}(xx_j^d)^T \psi_{m_i, n_j}(xx_j^d)$  的值越大, 表明该小波在小波变换中所起的作用越大.

为了降低下一步精选小波的困难, 常常把  $W$  的规模设置为 400 到 500 之间. 而且, 为了减少高维系统的计算量, 应当把  $\epsilon_j$  设置充分大, 从而得到合适规模的  $N_j$ . 例如, 当  $q > 10$  时, 把系统中不重要输入变量的  $N_j$  的个数为 1, 而重要输入变量的  $N_j$  的个数可

超过 2, 这样, 就能得到合适规模的  $W$ , 从而能有效地处理高维系统中选择小波的问题.

**Step 2** 用 OLS(orthogonal least-squares) 精选小波基.

在构造上述  $W$  的过程中, 只考虑输入训练数据, 因此,  $W$  中包含有构造小波变换多余的小波框架项. 必须剔除这些冗余的小波, 以减轻模糊模型实现的复杂性.

本文采用 OLS 算法精选小波, 并同时确定用于初始化模糊模型所需要的权  $\omega_i$ . 选择该算法的主要理由是一个称为误差下降速率<sup>[6]</sup>的指标为选择合适的小波提供了良好的依据.  $n$  在 OLS 算法中, 每次可从当前小波候选集中选择对误差下降速率的贡献最大的小波. 当所选择出的小波对应的指标小于预先设定的阈值时(本文设置为 0.01%), 可终止小波的选择过程. 由于 OLS 是一个标准算法, 为简单起见, 本文不给出 OLS 的具体算法的实现, 有关内容可参考文献[4].

这里假定用 OLS 算法选择了  $c$  个小波. 那么, 被辨识系统可用所选择的小波近似地表示为

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^c \omega_i \prod_{j=1}^q 2^{m_i/2} \psi_j(2^{m_i} x_j - n_j^i). \quad (13)$$

那么根据模糊模型与小波变换之间形式上等价的关系, 可得到如下划分模糊模型前提结构空间的重要参数的初始值公式:

$$p_{j1}^i = n_j^i / 2^{m_i}, \quad (14)$$

$$p_{j2}^i = \sqrt{2} n_j^i / 2^{m_i}. \quad (15)$$

**4.2 参数辨识(Parameter identification)**

对于式(2)所示的模糊模型, 参数辨识首先要解决参数的初始化问题. 从式(5)可知, 模糊模型要训练的自由参数为  $p_{jl}^i (j = 1, 2, \dots, q, l = 1, 2, 3, 4)$  和  $\omega_i$ . 在模型的结构辨识阶段, 得到了  $\omega_i$  的初始值和参数  $p_{jl}^i (j = 1, 2, \dots, q, l = 1, 2)$ . 然而,  $p_{jl}^i (j = 1, 2, \dots, q, l = 3, 4)$  未知, 为此, 同样可以利用模糊模型与小波变换之间形式上相同的关系提出如下初始化方法:

$$p_{j3}^i = 2^{m_i/2} n_j^i, \quad (16)$$

$$p_{j4}^i = 2^{3m_i/2}. \quad (17)$$

本文的参数辨识算法由两部分组成, 首先用扩展卡尔曼滤波算法<sup>[7]</sup>调节模糊模型中的非线性参数  $p_{jl}^i (j = 1, 2, \dots, q, l = 1, 2, 3, 4)$ , 然后用最小二乘法辨识线性参数  $\omega_i$ . 非线性参数和线性参数的调节交替进行, 直到模糊模型两次相邻的指标差的绝对值不大于预先设定的阈值.

**5 仿真实例(Example)**

本例取自于文献 [6]. 被建模的非线性动态方

程为

$$y(t+1) = \frac{[y(t)y(t-1)y(t-2)x(t-1)(y(t-2)-1)+x(t)]}{[1+y^2(t-1)+y^2(t-2)]}. \quad (18)$$

与文献[6]中的一样,置 $y$ 的初始值为零, $x(t)$ 取在 $[-2, +2]$ 上均匀分布的随机数.按照如下数据格式,本文采集了用于建立式(2)所示模糊模型的200组数据:

$$\begin{cases} x^d = [y(t), y(t-1), y(t-2), x(t), x(t-1)], \\ y^d = y(t+1). \end{cases} \quad (19)$$

其中: $x^d$ 为输入数据集, $y^d$ 为输出.为了验证所建立的模糊模型的有效性,本文分别把如下两种信号输入到式(18)和所得到的模糊模型:

$$x_{t1} = \begin{cases} \sin(2\pi t/250), & t \leq 500, \\ 0.8 \sin(2\pi t/250) + 0.2 \sin(2\pi t/25), & t > 500, \end{cases} \quad (20)$$

$$x_{t2} = 0.8 \sin(2\pi t/250) + 0.2 \sin(2\pi t/25). \quad (21)$$

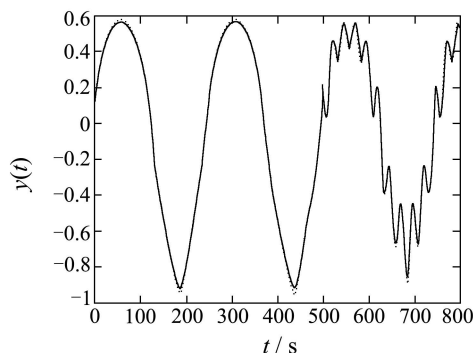


图1 第1种信号输出结果的比较

Fig. 1 Output comparison of the first signal

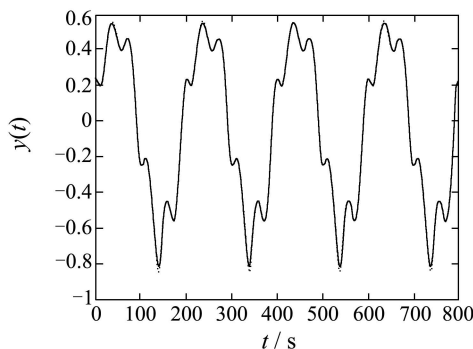


图2 第2种信号输出结果的比较

Fig. 2 Output comparison of the second signal

图1和图2分别为这两种信号输出结果的比较.图中虚线表示模糊模型的输出,实线表示实际系统

的输出.图1和图2表明,所建立的模糊模型比较准确地捕获了系统的特性,所以,二者的输出曲线非常吻合.从输出曲线匹配效果看,本文的模糊模型在泛化性能上优于文献[6]的模糊模型.

## 6 结论(Conclusion)

本文提出了一种新的用系统的输入输出数据辨识复杂系统的T-S模糊模型.运用该模糊模型与特殊小波变换之间形式上相同的关系,有效地解决了模糊建模的关键技术问题——模糊模型的结构辨识.需要注意的是,本文的模糊模型与使用特殊母波函数的小波变换仅在输入输出形式上相同,二者绝对不能等同,建模所得到的模糊模型是无法转变成一个小波变换的.通过理论分析和实际仿真的结果证明,本文的模糊模型与传统的模型比较,具有良好的辨识精度和泛化性能.当然,为了获得良好的模型精度和科学、客观的模型结构,本文的方法增加了一定的计算量.但在高维系统中,本文的模糊模型较传统的模糊模型有优势,因此,它在函数逼近、系统辨识、信号处理和自动控制等领域有着广泛的应用价值.

## 参考文献(References):

- [1] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. *IEEE Trans on System, Man and Cybernetics*, 1985, 15(1): 116 – 132.
- [2] HORIKAWA S, FURUHASHI T, UCHIKAWA Y. On fuzzy modeling using fuzzy, neural networks with the back-propagation algorithm[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1992, 1(3): 801 – 806.
- [3] BUCKLY J. Sugeno type controllers are universal controllers[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 53(3): 801 – 806.
- [4] ZHANG Qinghua. Using wavelet networks in nonparametric estimation[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1997, 8(3): 227 – 236.
- [5] LI X, WANG Zhiquan, XU L, et al. Combined construction of wavelet neural networks for nonlinear system modeling[C]// *Proc of the 14th IFAC*. Beijing: Tsinghua University Press, 1999: 451 – 456.
- [6] MIE Junhong H, LEE T H. Rule-Based modeling: fast construction and optimal manipulation[J]. *IEEE Trans on System, Man and Cybernetics-part A: Systems and Humans*, 1996, 26(6): 728 – 738.
- [7] 张平安, 李人厚. 一种新的复杂系统模糊辨识方法[J]. *自动化学报*, 1997, 23(6): 817 – 821.  
(ZHANG Ping'an, LI Renhou. A new fuzzy identification method for complex systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1997, 23(6): 817 – 821.)

## 作者简介:

张平安 (1966—), 男, 工学博士, 副教授, 研究兴趣包括智能控制、计算机网络应用等, E-mail: zhangpa@sziit.com.cn;

李人厚 (1935—), 男, 教授, 博士生导师, 研究兴趣包括大系统理论与应用、智能控制、CSCW, 编著有教材、专著等10部, 发表论文集共150篇, E-mail: rhli@xjtu.edu.cn.