文章编号: 1000−8152(2006)06−0945−04

基于$K_p = S_1D_1U_1$分解的多变量鲁棒模型参考自适应控制

解学军[1,2], 刘海宽[1], 田 洁[2]

(1. 徐州师范大学 电气工程及自动化学院, 江苏 徐州 221116; 2. 曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165)

摘要: 针对具有噪声的多变量系统, 利用高频增益矩阵$K_p = S_1D_1U_1$分解, 提出了一种多变量鲁棒直接型模型参考自适应控制. 通过重新证明一些同单变量系统鲁棒自适应控制理论相似的性质, 及重新定义规范化信号, 找出了闭环系统的所有信号与规范化信号之间的关系, 严格地分析了闭环系统的稳定性和鲁棒性.

关键词: 模型参考自适应控制; 规范化信号; 多变量系统; $K_p = S_1D_1U_1$分解

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Multivariable robust model reference adaptive control based on $K_p = S_1D_1U_1$ factorization

XIE Xue-jun[1,2], LIU Hai-kuan[1], TIAN Jie[2]

(1. School of Electrical Engineering & Automation, Xuzhou Normal University, Xuzhou Jiangsu 221116, China;
2. Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu Shandong 273165, China)

Abstract: For multivariable systems with disturbances, by using high frequency gain matrix $K_p = S_1D_1U_1$ factorization, a multivariable robust direct model reference adaptive control is provided in this paper. Firstly, some similar properties to robust adaptive control theory for SISO systems are proved, and the normalizing signal is redefined. The relationship between all the signals in the closed-loop system and the normalizing signal is then established. Finally, the stability and robustness of the closed-loop system are analyzed rigorously.

Key words: model reference adaptive control(MRAC); normalizing signal; multivariable systems; $K_p = S_iD_iU_i$ factorization

1 引言(Introduction)

长期以来, 多变量系统的模型参考自适应控制(MRAC)的设计与分析是困难的[1,2], 主要原因在于必须对系统的高频增益矩阵K_p的先验信息作如下的假设: 存在已知矩阵S_p, 使得$K_pS_p = (K_pS_p)^{\mathrm{T}} > 0$. 这个条件是非常强的. 直到最近, 在文献[3,4]中, Imai等人利用K_p的3种分解, 去掉了这一假设, 并给出了基于$K_p = LDU$分解的多变量MARC的设计和分析, 而对于另外两种分解$K_p = S_1D_1U_1$和$K_p = L_2D_2S_2$的多变量MARC的分析却没有给出. 由于这3种分解分别导致自适应控制系统不同, 因此分析起来差异很大. 文献[5]针对理想系统, 给出了基于$K_p = S_1D_1U_1$分解的MRAC的设计和分析.

本文将文献[5]的结果进一步推广到具有噪声的多变量系统. 主要工作在于: 1) 如何利用$K_p = S_1D_1U_1$分解思想设计多变量鲁棒直接型MRAC; 2) 由于自适应系统是多变量的, 因此文献[1]中一些常用于单变量鲁棒自适应控制系统分析的重要结论和工具不能直接应用于这类系统的分析. 本文通过重新证明与文献[1]的引理3.3.2类似的性质(见引理3.1)及重新定义规范化信号, 找出了闭环系统的所有信号与规范化信号之间的关系(见引理3.2和3.3), 严格分析了多变量自适应系统的稳定性和鲁棒性.

2 基于$K_p = S_1D_1U_1$的多变量MRAC的设计(Design of multivariable MRAC using $K_p = S_1D_1U_1$)

考虑下面的MIMO系统

$$y(t) = G(s)(u(t) + d(t)). \tag{1}$$

其中: $y, u \in \mathbb{R}^m$分别是系统的输出和输入, $G(s) = (g_{ij}(s)) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, s是微分算子, $g_{ij}(s)$中的参数是未知常数, $d \in \mathbb{R}^m$是一有界扰动, 即存在常数$d_0 > 0$, 使得$|d| \leqslant d_0$.

收稿日期: 2004−06−14; 收修改稿日期: 2006−01−27.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60304003); 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-05-0607).

控制目标是设计控制律使得闭环系统的所有信号均有界, 且跟踪误差$e(t)=y(t)-y_M(t)$尽可能地趋于零. 这里

$$y_M(t)=W_M(s)r(t). \tag{2}$$

其中$r\in\mathbb{R}^m$是分段连续的一致有界信号, 且$\dot r\in L_\infty$. 对该系统作如下假设:

A1) $G(s)$的所有传输零点全部具有负实部, 且$G^{-1}(s)$在$\mathrm{Re}[s]\geqslant-\delta_0/2$解析, $\delta_0>0$是某一常数.

A2) $G(s)$是严格正则的、满秩的、且它的修正的左作用器矩阵(定义见文献[1]p.740)$\xi_m(s)$是已知对角阵.

A3) $G(s)$的可观性指数v是已知的.

A4) 高频增益矩阵$K_p=\lim\limits_{s\to\infty}\xi_m(s)G(s)$的顺序主子式的符号是已知的.

对参考模型(2)需作如下假设:

M1) $W_M(s)$的所有零、极点都是稳定的, 且在$\mathrm{Re}[s]\geqslant-\delta_0/2$解析.

M2) $\lim\limits_{s\to\infty}\xi_m(s)W_M(s)$是有限的和非奇异的. 不失一般性, 假设$W_M(s)=\xi_m^{-1}(s)$.

为简单起见, 下面用c表示某一正常数, 用$\|x\|$表示$\|x_t\|_{2\delta}$(对任意$x(t)\in\mathbb{R}^n$及$t>0$,$\|x_t\|_{2\delta_0}=(\int_0^t\mathrm{e}^{-\delta_0(t-\tau)}|x(\tau)|^2\mathrm{d}\tau)^{1/2}$), 时间函数$x(t)$表示为$x$, 微分算子$X(s)$表为$X$.

下面给出基于$K_p=S_1D_1U_1$分解的多变量MRAC的设计. 利用匹配方程

$$I-\theta_1^{*\mathrm{T}}\frac{\gamma(s)}{p(s)}-\theta_2^{*\mathrm{T}}\frac{\gamma(s)}{p(s)}G(s)-\theta_3^*G(s)=\theta_4^*W_m^{-1}(s)G(s), \tag{3}$$

$$\theta_4^{*-1}=K_p. \tag{4}$$

这里

$$u^*=\theta_1^{*\mathrm{T}}\omega_1+\theta_2^{*\mathrm{T}}\omega_2+\theta_3^*y+\theta_4^*r=\theta^{*\mathrm{T}}\omega. \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}&\theta^{*\mathrm{T}}=[\theta_1^{*\mathrm{T}}\ \ \theta_2^{*\mathrm{T}}\ \ \theta_3^*\ \ \theta_4^*],\\ &\omega^{\mathrm{T}}=[\omega_1^{\mathrm{T}}\ \ \omega_2^{\mathrm{T}}\ \ y^{\mathrm{T}}\ \ r^{\mathrm{T}}],\\ &\omega_1=\frac{\gamma(s)}{p(s)}u,\ \omega_2=\frac{\gamma(s)}{p(s)}y,\\ &\gamma(s)=[I\ \ Is\ \cdots\ Is^{v-2}]^{\mathrm{T}},\\ &p(s)=\lambda_0+\lambda_1s+\cdots+s^{v-1}\end{aligned}$$

是Hurwitz多项式, 且$1/p(s)$在$\mathrm{Re}[s]\geqslant-\delta_0/2$解析. 对式(3)两边作用$u$, 由式(3)～(5)和$\xi_m(s)=W_M^{-1}(s)$得

$$\xi_me=K_p[u-\theta^{*\mathrm{T}}\omega]+K_p\eta. \tag{6}$$

其中$\eta=[I-\theta_1^{*\mathrm{T}}\frac{\gamma(s)}{p(s)}]d$. 利用文献[4]的分解$K_p=S_1D_1U_1$,其中$S_1>0$, U_1是单位上三角阵,$D_1=\mathrm{diag}\,d$, d_i是任意的设计参数, 及分解$U_1u=u-(I-U_1)u$, 式(6)变为

$$\xi_me=\varPsi^*[u-Q^{*\mathrm{T}}\bar\omega]+K_p\eta. \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}&\varPsi^*=S_1D_1,\bar\omega^{\mathrm{T}}=[\omega_1^{\mathrm{T}}\ \ \omega_2^{\mathrm{T}}\ \ y^{\mathrm{T}}\ \ r^{\mathrm{T}}\ \ u^{\mathrm{T}}],\\ &Q^{*\mathrm{T}}=[Q_1^{*\mathrm{T}}\ \ Q_2^{*\mathrm{T}}\ \ Q_3^*\ \ Q_4^*\ \ Q_5^*],\\ &Q_1^{*\mathrm{T}}=U_1\theta_1^{*\mathrm{T}},\ Q_2^{*\mathrm{T}}=U_1\theta_2^{*\mathrm{T}},\\ &Q_3^*=U_1\theta_3^*,\ Q_4^*=U_1\theta_4^*,\ Q_5^*=(I-U_1).\end{aligned}$$

利用恒等式(见文献[4]式(47)(48))$Q^{*\mathrm{T}}\bar\varOmega=[\bar\varTheta_1^{*\mathrm{T}}\bar\varOmega_1\ \ \cdots\ \ \bar\varTheta_m^{*\mathrm{T}}\bar\varOmega_m]^{\mathrm{T}}$, 其中$\bar\varTheta_1,\cdots,\bar\varTheta_m$是新的参数,

$$\begin{cases}\bar\varOmega_i^{\mathrm{T}}=[\omega_1^{\mathrm{T}}\ \omega_2^{\mathrm{T}}\ y^{\mathrm{T}}\ r_1\ \cdots\ r_i\ u_{i+1}\ \cdots\ u]_m,\\ \qquad i=1,\cdots,m-1,\\ \bar\varOmega_m^{\mathrm{T}}=[\omega_1^{\mathrm{T}}\ \ \omega_2^{\mathrm{T}}\ \ y^{\mathrm{T}}\ \ r^{\mathrm{T}}]\end{cases}, \tag{8}$$

得

$$\xi_me=\varPsi^*(u-[\bar\varTheta_1^{*\mathrm{T}}\bar\varOmega_1\ \ \cdots\ \ \bar\varTheta_m^{*\mathrm{T}}\bar\varOmega_m]^{\mathrm{T}})+\eta_m. \tag{9}$$

其中: $\eta_m=K_p\eta,u=[u_1\ \cdots\ u_m]^{\mathrm{T}}$. 对于式(9), 选取必然等价自适应控制律为

$$u=[\bar\varTheta_1^{\mathrm{T}}\bar\varOmega_1\ \ \cdots\ \ \bar\varTheta_m^{\mathrm{T}}\bar\varOmega_m]^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

其中$\bar\varTheta_i$是$\bar\varTheta_i^*$的估计. 定义$W(s)=1/f(s)$, $f(s)$是次数等于$\xi_m(s)$对角元的最大次数的任意Hurwitz多项式, 且在$\mathrm{Re}[s]\geqslant-\delta_0/2$内解析. 注意到$\varPsi^*,\bar\varTheta_i^*$为常数, 将$W(s)$作用式(9)两边得

$$z=\varPsi^*([\bar\varTheta_1^{*\mathrm{T}}\varPhi_1\ \ \cdots\ \ \bar\varTheta_m^{*\mathrm{T}}\varPhi_m]^{\mathrm{T}}+z_0)-W(s)\eta_m. \tag{11}$$

其中: $z=-W(s)\xi_me,z_0=-W(s)u,\varPhi_i=W(s)\bar\varOmega_i$. 选取$z$的估计$\hat z$为

$$\hat z=\varPsi([\bar\varTheta_1^{\mathrm{T}}\varPhi_1\ \ \cdots\ \ \bar\varTheta_m^{\mathrm{T}}\varPhi_m]^{\mathrm{T}}+z_0). \tag{12}$$

其中$\varPsi$是$\varPsi^*$的估计. 由式(11)(12)知规范化的估计误差为

$$\varepsilon=\frac{z-\hat z}{\eta_s^2}=-\frac{1}{\eta_s^2}(\tilde\varPhi\xi+\varPsi^*[\tilde{\bar\varTheta}_1^{\mathrm{T}}\varPhi_1\ \ \cdots\ \ \tilde{\bar\varTheta}_m^{\mathrm{T}}\varPhi_m]^{\mathrm{T}}+\eta_n). \tag{13}$$

式中: $\eta_s^2=1+\|u_t\|_{2\delta_0}^2+\|y_t\|_{2\delta_0}^2,\tilde\varPsi=\varPsi-\varPsi^*,\tilde{\bar\varTheta}_i=$

$\bar{\Theta}-\bar{\Theta}^*, \eta_n=W(s)\eta_m$, 且

$$\xi=[\bar{\Theta}_1^{\mathrm{T}}\Phi_1 \ \cdots \ \bar{\Theta}_m^{\mathrm{T}}\Phi_m]^{\mathrm{T}}+z_0. \tag{14}$$

由式(13)选取自适应律为

$$\dot{\bar{\Theta}}_i=\begin{cases}\gamma_i \operatorname{sgn} d_i\varepsilon_i\Phi_i, & \text{如果}\bar{\Theta}_i^{\mathrm{T}}\bar{\Theta}_i<M_0^2\text{或者}\\ & \bar{\Theta}_i^{\mathrm{T}}\bar{\Theta}_i=M_0^2\text{且}\\ & (\gamma_i\varepsilon_i\Phi_i\operatorname{sgn} d_i)^{\mathrm{T}}\bar{\Theta}_i\leqslant 0;\\ (I-\dfrac{\bar{\Theta}_i\bar{\Theta}_i^{\mathrm{T}}}{\bar{\Theta}_i^{\mathrm{T}}\bar{\Theta}_i})\gamma_i\operatorname{sgn} d_i\varepsilon_i\Phi_i, & \\ & \text{其他}.\end{cases} \tag{15}$$

$$\dot{\bar{\Psi}}=\begin{cases}\gamma_\Psi\varepsilon\otimes\xi, & \text{如果}\bar{\Psi}^{\mathrm{T}}\bar{\Psi}<M_0^2\text{或者}\\ & \bar{\Psi}^{\mathrm{T}}\bar{\Psi}=M_0^2\text{且}\\ & (\gamma_\Psi\varepsilon\otimes\xi)^{\mathrm{T}}\bar{\Psi}\leqslant 0;\\ (I-\dfrac{\bar{\Psi}\bar{\Psi}^{\mathrm{T}}}{\bar{\Psi}^{\mathrm{T}}\bar{\Psi}})\gamma_\Psi\varepsilon\otimes\xi, & \\ & \text{其他}.\end{cases} \tag{16}$$

其中: $\gamma_i,\gamma_\Psi>0, \bar{\Theta}_i^{\mathrm{T}}(0)\bar{\Theta}_i(0)\leqslant M_0^2, \bar{\Psi}^{\mathrm{T}}(0)\bar{\Psi}(0)\leqslant M_0^2, M_0>0$是一个常数, ε_i是ε第i个分量, $\otimes$表示克罗内克尔积, $\Psi=[\Psi_{ij}]_{m\times m}, \bar{\Psi}=[\Psi_{11}\cdots\Psi_{1m}\cdots\Psi_{m1}\cdots\Psi_{mm}]^{\mathrm{T}}$.

3 主要结果(Main results)

下面给出本文的主要结果.

定理 1 考虑系统(1), 参考模型(2). 若系统和参考模型的假设A1)~A4)和M1)M2)成立, 则由控制律(10), 自适应律(15)和(16)组成的基于$S_1D_1U_1$分解的RMRAC方案满足

1) 闭环系统的所有信号都是一致有界的.

2) $e\in S(\dfrac{1}{a_0^2}+d_0^2)$, 其中$S(\omega)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \int_t^{t+T}|x(\tau)|^2\mathrm{d}\tau\leqslant c\int_t^{t+T}\omega(\tau)\mathrm{d}\tau+c, c$为常数$, \omega\in\mathbb{R}^+, \forall t,T\geqslant 0\}$.

在给出证明之前, 首先证明几个重要引理.

引理 1 考虑MIMO系统$y=H(s)u, y\in\mathbb{R}^p, u\in\mathbb{R}^q$. 设$H(s)=(h_{ik}(s))_{q\times p}$是正则阵, 且对某一$\delta>0, H(s)$的每一元素在$\mathrm{Re}[s]\geqslant-\delta_0/2$解析, $u\in L_{2e}$, 则

$$\|y_t\|_{2\delta}\leqslant\|H(s)\|_{\infty\delta}\|u_t\|_{2\delta}.$$

其中

$$\|H(s)\|_{\infty\delta}=\sqrt{pq}\max_{i,k}\|h_{ik}(s)\|_{\infty\delta},$$

$$\|h_{ik}(s)\|_{\infty\delta}=\sup_{\omega}|h_{ik}(\mathrm{j}\omega-\frac{\delta}{2})|.$$

进一步设$H(s)$严格正则的, 则

$$|y(t)|\leqslant\|H(s)\|_{2\delta}\|u_t\|_{2\delta}.$$

其中

$$\|H(s)\|_{2\delta}=\sqrt{pq}\max_{i,k}\|h_{ik}(s)\|_{2\delta},$$

$$\|h_{ik}(s)\|_{2\delta}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|h_{ik}(j\omega-\frac{\delta}{2})|^2\mathrm{d}\omega\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

引理 2 自适应律(15)和(16)具有下列性质:

1) $\bar{\Psi},\bar{\Theta}_i\in L_\infty$;

2) $\dot{\bar{\Phi}},\dot{\bar{\Theta}}_i,\varepsilon\eta_s,\varepsilon\in S(\dfrac{|\eta_n|^2}{\eta_s^2})\cap L_\infty$;

3) $\Psi\in L_\infty,\dot{\Psi}\in S(\dfrac{|\eta_n|^2}{\eta_s^2})\cap L_\infty$.

定义动态规范化信号$\eta_f(t)$为

$$\eta_f(t)=(1+\|u_t\|_{2\delta}^2+\|y_t\|_{2\delta}^2)^{\frac{1}{2}},\ \forall\delta\in(0,\delta_0]. \tag{17}$$

引理 3 信号η_f有以下性质:

i) $\|\omega_i\|/\eta_f, \|\omega_i\|/\eta_f\in L_\infty, i=1,2$.

ii) 若$|\bar{\Theta}_i|\in L_\infty$, 则$y/\eta_f, u/\eta_f, \bar{\Omega}_i/\eta_f, \|\bar{\Omega}_i\|/\eta_f, \Omega/\eta_f, W_1(s)\bar{\Omega}_i/\eta_f, \|W_1(s)\bar{\Omega}_i\|/\eta_f, \|\dot{y}\|/\eta_f\in L_\infty, i=1,2,\cdots,m$, 其中$W_1(s)$为任意正则稳定阵, 且每一个元素在$\mathrm{Re}[s]\geqslant-\delta_0/2$内解析.

iii) 若$\bar{\Theta}_i,\dot{\bar{\Theta}}_i,\dot{r}\in L_\infty$, 则$\|\dot{\omega}\|/\eta_f, \|\dot{\bar{\Omega}}_i\|/\eta_f\in L_\infty, i=1,2,\cdots,m$.

iv) 当$\delta=\delta_0$, i)~iii)对η_s也成立, 其中$\eta_s^2=1+\|u_t\|_{2\delta}^2+\|y_t\|_{2\delta}^2$.

定理1的证明 由式(10), 定义

$$\begin{aligned}\tilde{u}=&u-[\bar{\Theta}_1^{*\mathrm{T}}\bar{\Omega}_1 \ \cdots \ \bar{\Theta}_m^{*\mathrm{T}}\bar{\Omega}_m]^{\mathrm{T}}=\\ &[\tilde{\bar{\Theta}}_1^{*\mathrm{T}}\bar{\Omega}_1 \ \cdots \ \tilde{\bar{\Theta}}_m^{*\mathrm{T}}\bar{\Omega}_m]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{18}$$

其中$\tilde{\bar{\Theta}}_i=\bar{\Theta}_i-\bar{\Theta}_i^*$. 由式(2)(9)及$W_M(s)=\xi_m^{-1}(s)$得

$$y=W_M(s)(r+\Psi^*\tilde{u})+\eta_y. \tag{19}$$

其中$\eta_y=W_M(s)\eta_m$. 注意到式(1)及假设A1), 则

$$u=G^{-1}(s)W_M(s)(r+\Psi^*\tilde{u})+\eta_u. \tag{20}$$

其中$\eta_u=[G^{-1}W_M(s)K_p(I-\theta_1^{*\mathrm{T}}\dfrac{\gamma(s)}{p(s)})-I]d$. 由系统和参考模型的假设, 利用引理1得$\|(\eta_y)_t\|_{2\delta}\leqslant cd_0, |\eta_y(t)|_2\leqslant cd_0, \|(\eta_u)_t\|_{2\delta}\leqslant cd_0$. 由式(17)~(20), $\|r_t\|_{2\delta}^2<\infty$和$\Psi^*$定常, 利用引理1得

$$\eta_f^2(t)\leqslant c+c\|\tilde{u}_t\|_{2\delta}^2. \tag{21}$$

利用文献[1]的交换引理A1有

$$\tilde{\bar{\Theta}}_i^{\mathrm{T}}\bar{\Omega}_i=W^{-1}(s)[\tilde{\bar{\Theta}}_i^{\mathrm{T}}W(s)\bar{\Omega}_i+W_c(s)((W_b(s)\bar{\Omega}_i^{\mathrm{T}})\dot{\tilde{\bar{\Theta}}}_i]. \tag{22}$$

其中: $W(s)=1/f(s), W_c(s), W_b(s)$和$W(s)$具有相同的极点. 由$\Phi_i=W(s)\bar{\Omega}_i$和式(22), 利用文献[1]的

交换引理A2知对所有的$i = 1, 2, \cdots, m$,

$$\tilde{\bar{\Theta}}_i^{\mathrm{T}}\bar{\Omega}_i = F_1(s,\alpha_0)(\dot{\tilde{\bar{\Theta}}}_i^{\mathrm{T}}\bar{\Omega}_i + \bar{\Theta}_i^{\mathrm{T}}\dot{\bar{\Omega}}_i) + F_2(s,\alpha_0)\cdot W^{-1}(s)[\tilde{\bar{\Theta}}_i^{\mathrm{T}}\Phi_i + W_c(s)((W_b(s)\bar{\Omega}_i^{\mathrm{T}})\dot{\tilde{\bar{\Theta}}}_i]. \tag{23}$$

其中: $F_2(s,\alpha_0) = \dfrac{\alpha_0^{n^*}}{(s+\alpha_0)^{n^*}}, F_1(s,\alpha_0) = (1 - F_2(s,\alpha_0))/s, n^*$是$W_M(s)$中所有元素的最大相对阶, α_0是待定的参数. 由S_1和D_1的定义知S_1D_1可逆. 注意到$\Psi^* = S_1D_1, \tilde{\Psi} = \Psi - \Psi^*$, 由式(13)得

$$\begin{bmatrix}\tilde{\bar{\Theta}}_1^{\mathrm{T}}\Phi_1\\ \vdots \\ \tilde{\bar{\Theta}}_m^{\mathrm{T}}\Phi_m\end{bmatrix} = -(\Psi^*)^{-1}(\varepsilon\eta_s^2 + \Psi\xi) + \xi - (\Psi^*)^{-1}\eta_n. \tag{24}$$

定义$\xi = [\xi_1 \ \cdots \ \xi_m]^{\mathrm{T}}, z_0 = [z_{0,1} \ \cdots \ z_{0,m}]^{\mathrm{T}}$. 由$\Phi_i = W(s)\bar{\Omega}_i, z_0 = -W(s)u$, 式(10)(14), $\bar{\Theta}_i^*$定常, 利用文献[1]的交换引理A_1得$\xi_i = -W_c(s)[(W_b(s)\bar{\Omega}_i^{\mathrm{T}})\dot{\tilde{\bar{\Theta}}}_i]$, 从而由式(23)(24)得

$$\begin{bmatrix}\tilde{\bar{\Theta}}_1^{\mathrm{T}}\bar{\Omega}_1\\ \vdots \\ \tilde{\bar{\Theta}}_m^{\mathrm{T}}\bar{\Omega}_m\end{bmatrix} = F_1(s,\alpha_0)\begin{bmatrix}\dot{\tilde{\bar{\Theta}}}_1^{\mathrm{T}}\bar{\Omega}_1 + \bar{\Theta}_1^{\mathrm{T}}\dot{\bar{\Omega}}_1\\ \vdots \\ \tilde{\bar{\Theta}}_m^{\mathrm{T}}\bar{\Omega}_m + \bar{\Theta}_m^{\mathrm{T}}\dot{\bar{\Omega}}_m\end{bmatrix} - F_2(s,\alpha_0)W^{-1}(s)(\Psi^*)^{-1}\cdot \left(\varepsilon\eta_s^2 + \Psi\begin{bmatrix}-W_c[(W_b\bar{\Omega}_1^{\mathrm{T}})\dot{\bar{\Theta}}_1]\\ \vdots \\ -W_c[(W_b\bar{\Omega}_m^{\mathrm{T}})\dot{\bar{\Theta}}_m]\end{bmatrix} + \eta_n\right). \tag{25}$$

显然$|\eta_s| \leqslant |\eta_f|$. 利用引理1和3得

$$\|\varepsilon_i\eta_s^2\| \leqslant \|\varepsilon_i\eta_s\eta_f\|,$$
$$\|W_c((W_b\bar{\Omega}_i^{\mathrm{T}})\dot{\bar{\Theta}}_i)\| \leqslant c\|\dot{\bar{\Theta}}_i\eta_f\|,$$
$$|\eta_n| \leqslant cd_0,\ \|\eta_n\| \leqslant cd_0.$$

由文献[1]的交换引理A2知, 对于$\alpha_0 > \delta$,

$$\|F_1(s,\alpha_0)\|_{\infty\delta} \leqslant \frac{c}{\alpha_0},\ \|F_2(s,\alpha_0)W^{-1}(s)\|_{\infty\delta} \leqslant c\alpha_0^n.$$

其中c为独立于α_0的常数. 对式(25)两边取2δ-范数, 注意到$\Psi \in L_\infty, \Psi^*$定常, $\dot{\tilde{\bar{\Theta}}}_i = \dot{\bar{\Theta}}_i, |\eta_f| \geqslant 1, \bar{\Theta}_i \in L_\infty$, 选取$\alpha_0 \geqslant 1$, 利用引理3得

$$\|\tilde{u}_t\|^2 \leqslant c + \frac{c}{\alpha_0^2}\eta_f^2 + c\alpha_0^{2n^*}\sum_{i=1}^{m}\|\tilde{g}_i\eta_f\|^2.$$

其中$\tilde{g}_i^2 = |\varepsilon_i\eta_s|^2 + |\dot{\bar{\Theta}}_i|^2$. 由引理2知$\tilde{g}_i \in S(\dfrac{|\eta_n|^2}{\eta_s^2})$. 利用常规方法易证结论1.

由$\xi_i = -W_c(s)[(W_b(s)\bar{\Omega}_i^{\mathrm{T}})\dot{\tilde{\bar{\Theta}}}_i]$, 利用引理1和3, 及$2\delta$-范数的性质知对任意$t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}|\xi_i(t)| \leqslant & \|W_c(s)\|_{2\delta_0}\|((W_b(s)\bar{\Omega}_i^{\mathrm{T}}(t))\dot{\tilde{\bar{\Theta}}}_i)_t\|_{2\delta_0} \leqslant \\ & c\|W_b(s)\|_{\infty\delta_0}\|(\bar{\Omega}_i)_t\|_{2\delta_0}\|(\dot{\tilde{\bar{\Theta}}}_i)_t\|_{2\delta_0} \leqslant \\ & c\eta_s(t)[\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\delta_0(t-\tau)}|\dot{\tilde{\bar{\Theta}}}_i(\tau)|^2\mathrm{d}\tau]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{26}$$

从而利用积分换序公式及$\dot{\tilde{\bar{\Theta}}}_i \in L_\infty \cap S(\dfrac{|\eta_n|^2}{\eta_s^2})$得对任意$i = 1, 2, \cdots, m$,

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t}\frac{\xi_i^2(\tau)}{\eta_s^2(\tau)}\mathrm{d}\tau \leqslant \\ &c\int_{t_0}^{t}[\int_{0}^{\tau}\mathrm{e}^{-\delta_0(r-s)}|\dot{\tilde{\bar{\Theta}}}_i(s)|^2\mathrm{d}s]\mathrm{d}\tau \leqslant \\ &c\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\delta_0\tau}\mathrm{d}\tau\int_{0}^{t_0}\mathrm{e}^{\delta_0 s}|\dot{\tilde{\bar{\Theta}}}_i(s)|^2\mathrm{d}s + \\ &\frac{c}{\delta_0}\int_{t_0}^{t}|\dot{\tilde{\bar{\Theta}}}_i(s)|^2(1-\mathrm{e}^{-\delta_0(t-s)})\mathrm{d}s \leqslant \\ &c + c\int_{t_0}^{t}|\dot{\tilde{\bar{\Theta}}}_i(s)|^2\mathrm{d}\tau \leqslant c + c\int_{t_0}^{t}\frac{|\eta_n(\tau)|^2}{\eta_s^2(\tau)}\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{27}$$

于是$\dfrac{\xi_i}{\eta_s}, \dfrac{\xi}{\eta_s} \in S(\dfrac{|\eta_n|^2}{\eta_s^2})$. 由此易证结论2.

4 结论(Conclusion)

针对具有噪声的多变量系统, 本文利用$K_p = S_1D_1U_1$分解, 提出了一种多变量鲁棒直接型MRAC, 严格地分析了闭环系统的稳定性和鲁棒性. 如何将这一工作推广到更一般的多变量系统值得进一步研究.

参考文献(References):

[1] IOANNOU P A, SUN J. *Robust Adaptive Control*[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

[2] TAO G. *Adaptive Control Design and Analysis*[M]. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2003.

[3] HSU L, COSTA R, IMAI A, et al. Lyapunov based adaptive control of mimo systems[C]// *Proc of the American Control Conf*. Arlington: IEEE Press, 2001: 4808 – 4813.

[4] IMAI A, COSTA R, HSU L, et al. Multivariable MRAC using high frequency gain matrix factorization[C]// *Proc of the 40th IEEE Conf on Decision and Control*. Orlando: IEEE Press, 2001: 1193 – 1197.

[5] 张正强, 解学军, 张嗣瀛. 矩阵分解的多变量模型参考自适应控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(6): 986 – 988.
(ZHANG Zhengqiang, XIE Xuejun, ZHANG Siying. Multivariable model reference adaptive control based on $K_p = S_1D_1U_1$ factorization[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(6): 986 – 988.)

作者简介:

解学军 (1968—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为复杂系统的自适应控制理论与应用, E-mail: xiexuejun@eyou.com;

刘海宽 (1962—), 男, 教授, 研究方向为计算机控制系统研究与应用、鲁棒控制等;

田 洁 (1978—), 女, 博士生, 研究方向为时变系统的自适应控制.