

具有方差和极点约束的不确定系统鲁棒 H_∞ 输出反馈控制

周武能¹, 苏宏业², 褚健²

(1. 东华大学信息科学与技术学院, 上海 200051; 2. 工业控制技术国家重点实验室 浙江大学先进控制研究所, 浙江 杭州 310027)

摘要: 针对一类具有范数有界不确定性的连续系统和二次矩阵不等式区域, 考虑系统具有方差和区域极点约束的输出反馈控制器设计问题. 为此首先导出闭环系统区域稳定的充分必要条件. 然后用线性矩阵不等式方法给出输出反馈控制器存在的一个充分条件. 在此充分条件下闭环系统是鲁棒区域稳定的且具有 H_∞ 性能以及当干扰为白噪声信号时其稳态状态方差有限. 接下来用矩阵分解方法给出输出反馈控制器增益矩阵的求解过程. 最后通过一个仿真实例说明本文所提出的控制器设计方法的有效性.

关键词: 不确定系统; 鲁棒控制; H_∞ 控制; 方差约束; 区域稳定性

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Robust H-infinity output feedback control with variance and pole constraints for time-varying uncertain systems

ZHOU Wu-neng¹, SU Hong-ye², CHU Jian²

(1. College of Information Science and Technology, Donghua University, Shanghai 200051, China;

2. National Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: The design method of robust H-infinity output feedback controller with state variance and regional pole constraints is proposed in this paper for a class of time-varying uncertain systems and a quadratic matrix inequality region. Firstly, a necessary and sufficient condition of regional stable for the closed-loop system is introduced. Secondly, a sufficient condition for the existence of such output feedback controller is derived by means of linear matrix inequality approach. Under the proposed sufficient condition, the closed-loop system is robustly regional stable, possesses H-infinity performance and finite steady state variance when the disturbance is a zero-mean Gaussian white noise process. The gain matrices of the output feedback controller are also constructed by means of the method of matrix decomposition. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed controller designing method.

Key words: uncertain systems; robust control; H-infinity control; variance constraint; regional stability

1 引言(Introduction)

在随机控制问题中, 常常要求设计一个控制器使得不同的系统子状态具有确定上界的方差值 $E(x_j^2)$. 限定状态目标的方法之一是给系统的状态方差指定一个特殊的矩阵值. 通过适当配置系统的稳态状态方差矩阵, 可使闭环系统具有诸如稳定性、输出量的特定性能要求等许多控制目标. 1987年, Hotz, Skelton等首次建立了状态方差分配理论^[1]. 这一理论为闭环系统指定一个特殊的状态方差提供了一个可选择的直接方法且使系统具有所要求的性能. 与 H_2/H_∞ 控制以及不确定系统的鲁棒控制相结合, Wang Zidong等人分别研究了离散系统和连续系统

受限于误差方差约束的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波器设计问题^[2,3]. 然而, 以上关于状态方差约束的控制器设计大多只考虑系统的稳态行为而没有考虑系统的瞬态性质, 比如系统极点配置问题等. 由于区域极点配置问题有其理论上的重要性以及应用上的广泛性, 许多学者又把方差约束控制问题与区域极点配置问题结合起来进行研究, 取得了一系列研究成果^[4~7].

以上关于状态方差和区域稳定性约束的控制器设计问题所考虑的区域都是圆域, 因而有一定的局限性. 现今有许多学者正研究系统的LMI区域和二次矩阵不等式区域 \mathcal{D} 的区域稳定性(\mathcal{D} -稳定性)问题且得到了系统 \mathcal{D} 稳定的用LMI表达的充要条件^[8,9].

这种LMI区域和二次矩阵不等式区域涵界圆域、左半复平面、角域、带形等复平面上常见区域,因而更具广泛性.将文献[4~6]中区域扩展为二次矩阵不等式区域 \mathcal{D} ,研究一类具有范数有界不确定线性系统在 \mathcal{D} -稳定性约束下的鲁棒 H_∞ 方差控制问题,正是本文的宗旨.

2 系统描述(System description)

考虑由以下状态空间模型描述的一类不确定线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + \\ \quad (B + \Delta B)u(t) + Dw(t), \\ y(t) = C_1x(t), \\ z(t) = C_2x(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量且 $x(0) = 0$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ 是观测输出, $z(t) \in \mathbb{R}^q$ 是被控输出; $w(t) \in \mathbb{R}^l$ 是一个外部干扰输入; A, B, C_1, C_2 和 D 是已知的具有适当维数的常数矩阵; ΔA 和 ΔB 是具有以下形式的不确定矩阵

$$[\Delta A \ \Delta B] = MF(t)[N_1 \ N_2], \quad (2)$$

这里 $F \in \mathbb{R}^{i \times j}$ 是满足 $F^T(t)F(t) \leq I$ 的未知实矩阵; M, N_1 和 N_2 是已知的具有适当维数的常数矩阵.考虑以下的输出反馈控制器

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t), \\ u(t) = C_c x_c(t), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $x_c(t) \in \mathbb{R}^k$ 是控制器的状态向量且 $x_c(0) = 0$.将控制器(3)应用于系统(1),得到闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = (\bar{A} + \bar{M}F\bar{N})\bar{x}(t) + \bar{D}w(t), \\ z(t) = \bar{C}\bar{x}(t). \end{cases} \quad (4)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ B_c C_1 & A_c \end{bmatrix}, \\ \bar{D} &= \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{M} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{N} &= [N_1 \ N_2 C_c], \bar{C} = [C_2 \ 0]. \end{aligned} \quad (5)$$

对上述闭环系统(4),本文考虑的二次矩阵不等式区域 \mathcal{D} 是满足下式的复平面上复点之集^[8],

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : R_{11} + R_{12}z + R_{12}^T z^* + R_{22}z z^* < 0\}, \quad (6)$$

其中: $R_{11}, R_{12}, R_{22} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, R_{11}, R_{22} 是对称矩阵, $R_{22} = LL^T$ 是半正定矩阵, d 称为区域 \mathcal{D} 的秩, z^* 是 z 的共轭复数.令 $R_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{bmatrix}$.

可见 \mathcal{D} 是关于实轴对称的凸区域.用于稳定性分析的典型区域左半复平面 $D(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < -\alpha\} (\alpha > 0)$ 和圆盘 $D(c, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z + c| < r, r \geq c > 0\}$ 都是此类区域的特例.另外,当 $L = 0$ 时的区域 \mathcal{D} 即为LMI区域^[9].

定义 1 矩阵 A 称为 \mathcal{D} 稳定的,如果 A 的特征值位于复平面上的区域 \mathcal{D} 中.

引理 1 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是 \mathcal{D} -稳定的当且仅当存在一个对称正定矩阵 $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$,使得^[8]

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathcal{D}}(P, A) &\triangleq R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes (PA) + \\ &R_{12}^T \otimes (A^T P) + R_{22} \otimes (A^T P A) < 0, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 \otimes 表示两矩阵的Kronecker乘积^[9],即若 $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{p \times q} \in \mathbb{R}^{p \times q}$,则 $A \otimes B = [a_{ij} b_{kl}]_{mp \times nq}$.

定义 2 不确定闭环系统(4)称为鲁棒 \mathcal{D} 稳定的,如果对任意 $t \geq 0$,存在一个对称正定矩阵 $P(t)$,使得

$$\Omega_{\mathcal{D}}(P(t), \hat{A}) < 0, \quad (8)$$

其中 $\hat{A} = \bar{A} + \bar{M}F\bar{N}$.

定义 3 不确定闭环系统(4)称为二次 \mathcal{D} 稳定的,如果对任意 $t \geq 0$,存在一个对称正定矩阵 P ,使得

$$\Omega_{\mathcal{D}}(P, \hat{A}) < 0. \quad (9)$$

本文旨在设计输出反馈控制器(3),使闭环系统(4)具有以下性能:

P1) \mathcal{D} 稳定,此时称系统(1)是可鲁棒 \mathcal{D} -镇定的;

P2) 当外部干扰 $w(t) \in L_2[0, \infty)$ 时具有 H_∞ 性能指标,即给定实数 $\gamma > 0$,在零初始条件下,由 w 到 z 的传递函数 $T_{zw}(s)$ 的范数 $\|T_{zw}(s)\|_\infty = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma$,或等价地, $\|z(t)\|_2 \leq \gamma \|w(t)\|_2, \forall w(t) \in L_2[0, +\infty)$;

P3) 当外部干扰 $w(t)$ 是一个白噪声信号时稳态状态方差有限,即 $[Q]_{ii} \leq \sigma_i^2, i = 1, \dots, n$,其中 $[Q]_{ii}$ 是稳态状态方差矩阵 $Q = \lim_{t \rightarrow \infty} E[x(t)x^T(t)]$ 的对角线上第 i 个元,即第 i 个状态的稳态状态方差, $\sigma_i^2 (i = 1, \dots, n)$ 表示限制第 i 个状态的稳态状态估计方差且可以根据实际进行调整.具有性质P3)的控制律(3)称为系统(1)的一个鲁棒方差控制律.

为证明主要结论的需要,引入下述引理.

引理 2 设 Y, H, E 是具有适当维数的常数矩阵,而且 Y 是对称矩阵.则对任意满足 $F^T F \leq I$ 的矩阵 $F, Y + HFE + E^T F^T H^T < 0$ 的充分必要条件是存在常数 $\varepsilon > 0$,使得 $Y + \varepsilon H H^T + \varepsilon^{-1} E^T E < 0$ ^[10].

引理 3 如果闭环系统(4)是稳定的,则其稳态

状态方差矩阵 Q 存在且满足以下Lyapunov方程^[2]

$$\hat{A}Q + Q\hat{A}^T + \bar{D}\bar{D}^T = 0. \quad (10)$$

3 主要结果(Main results)

为简化主要结果的证明, 先导出闭环系统二次 \mathcal{D} -稳定的一个必要且充分条件.

定理 1 闭环系统(4)是二次 \mathcal{D} -稳定的当且仅当存在一个对称正定矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和一个标量 $\lambda > 0$, 使得下述不等式成立

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & * & * \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & * \\ I_d \otimes (\bar{N}X) & 0 & -\lambda I \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

其中 $\Theta_{11} = R_{11} \otimes X + R_{12} \otimes (\bar{A}X) + R_{12}^T \otimes (X\bar{A}^T) + \lambda(R_{12}R_{12}^T) \otimes (\bar{M}\bar{M}^T)$, $\Theta_{21} = L^T \otimes (\bar{A}X) + \lambda(L^TR_{12}^T) \otimes (\bar{M}\bar{M}^T)$, $\Theta_{22} = -I_d \otimes X + \lambda(L^TL) \otimes (\bar{M}\bar{M}^T)$.

证 在不等式(9)中以 $\bar{A} + \bar{M}F\bar{N}$ 代 \hat{A} , 且利用Schur补引理及引理2即得.

证毕.

根据定理1, 可得到以下基本定理.

定理 2 设区域 \mathcal{D} 的秩满足 R_{11}, R_{12} 的主对角线上第 i 个元素均大于零, $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, 不妨设 $i = 1$, 即 $(R_{11})_{11} = a > 0$, $(R_{12})_{11} = b > 0$. 令 \bar{R}_{12} 是满足 $(\bar{R}_{12})_{11} = b$, 而其余元素均为零的 d 阶矩阵. 对区域 \mathcal{D} 和闭环系统(4)以及实数 $\gamma > 0$, 如果存在一个对称正定矩阵 X 和一个标量 $\lambda > 0$, 使得下述不等式成立

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & * & * \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & * \\ I_d \otimes (\bar{N}X) & 0 & -\lambda I \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

则闭环系统(4)满足性能P1) 和P2), 且稳态状态方差矩阵 $Q < \gamma X$, 其中 $\Psi_{11} = \Theta_{11} + \gamma^{-1}\bar{R}_{12} \otimes (X\bar{C}^T\bar{C}X) + \gamma^{-1}\bar{R}_{12} \otimes (\bar{D}\bar{D}^T)$, $\Psi_{21} = L^T \otimes (\bar{A}X) + \lambda(L^TR_{12}^T) \otimes (\bar{M}\bar{M}^T)$, $\Psi_{22} = -I_d \otimes X + \lambda(L^TL) \otimes (\bar{M}\bar{M}^T)$.

证 首先, 由于不等式(12)蕴含不等式(11), 所以闭环系统(4)是鲁棒 \mathcal{D} -稳定的. 其次, 考虑Lyapunov函数 $V(\bar{x}(t), t) = \bar{x}^T(t)P\bar{x}(t)$, 其中 $P = X^{-1}$. 由引理2, 得

$$\begin{aligned} & \dot{V}(\bar{x}(t), t) + \gamma^{-1}z^T(t)z(t) - \gamma w^T(t)w(t) = \\ & \bar{x}^T(t)(P\hat{A} + \hat{A}^TP + \gamma^{-1}\bar{C}^T\bar{C})\bar{x}(t) + \\ & \bar{x}^T(t)P\bar{D}w(t) + w^T(t)\bar{D}^TP\bar{x}(t) - \\ & \gamma w^T(t)w(t) \leq \\ & \bar{x}^T(t)(P\hat{A} + \hat{A}^TP + \gamma^{-1}\bar{C}^T\bar{C} + \\ & \gamma^{-1}P\bar{D}\bar{D}^TP)\bar{x}(t). \end{aligned}$$

依照定理1的证明方法可得, 不等式(12)等价于下述不等式

$$\begin{aligned} & \Omega_{\mathcal{D}}(P, \hat{A}) + \gamma^{-1}\bar{R}_{12} \otimes (\bar{C}^T\bar{C}) + \\ & \gamma^{-1}\bar{R}_{12} \otimes (P\bar{D}\bar{D}^TP) < 0, \end{aligned} \quad (13)$$

所以

$$P\hat{A} + \hat{A}^TP + \gamma^{-1}\bar{C}^T\bar{C} + \gamma^{-1}P\bar{D}\bar{D}^TP < 0.$$

从而

$$\dot{V}(\bar{x}(t), t) + \gamma^{-1}z^T(t)z(t) - \gamma w^T(t)w(t) < 0.$$

结合初始条件和闭环系统(4)的 \mathcal{D} -稳定性知 $\|z(t)\|_2 \leq \gamma\|w(t)\|_2$, 即闭环系统(4)具有 H_∞ 性能指标. 最后, 由于闭环系统(4)是 \mathcal{D} -稳定的, 所以其稳态状态方差矩阵 Q 存在且满足方程(10). 另一方面, 由不等式(13)可得

$$\begin{aligned} & \frac{a\gamma}{b}X + \gamma\hat{A}X + \gamma X\hat{A}^T + \frac{(R_{22})_{11}}{b}\gamma X\hat{A}^TP\hat{A}X + \\ & X\bar{C}^T\bar{C}X + \bar{D}\bar{D}^T < 0. \end{aligned} \quad (14)$$

将不等式(14)减去等式(10), 得

$$\begin{aligned} & \frac{a\gamma}{b}X + \hat{A}(\gamma X - Q) + (\gamma X - Q)\hat{A}^T + \\ & \frac{(R_{22})_{11}\gamma}{b}X\hat{A}^TP\hat{A}X + X\bar{C}^T\bar{C}X < 0. \end{aligned}$$

由于 $\frac{a\gamma}{b}X + \frac{(R_{22})_{11}\gamma}{b}X\hat{A}^TP\hat{A}X + X\bar{C}^T\bar{C}X > 0$, 所以据Lyapunov稳定性定理可知 $Q < \gamma X$.

证毕.

注 1 定理2中的区域 \mathcal{D} 是比较常见的. 比如左半复平面 $D(\alpha)$ 和圆盘 $D(c, r)$ 均是此类区域.

定理2给出了使闭环系统(4)具有性能P1) 和P2) 且其稳态状态方差矩阵 $Q < \gamma X$ 的控制律(3)存在的一个充分条件. 而且如果其中的对称正定矩阵 X 满足

$$[X]_{ii} < \gamma^{-1}\sigma_i^2, \quad i = 1, \dots, n, \quad (15)$$

则闭环系统(4)还满足性能P3). 然而矩阵不等式(12)关于矩阵变量 X 是非线性的. 为求出输出反馈控制器的各增益矩阵, 首先利用Schur补引理将不等式(12)等价地表示为以下不等式

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \bar{R}_{12}^{\frac{1}{2}} \otimes (X\bar{C}^T) & \bar{R}_{12}^{\frac{1}{2}} \otimes \bar{D} & R_{12} \otimes \bar{M} \\ * & \Xi_{22} & 0 & 0 & 0 & L^T \otimes \bar{M} \\ * & 0 & -\lambda I & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & -\lambda^{-1}I \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

其中: $\Xi_{11} = R_{11} \otimes X + R_{12} \otimes (\bar{A}X) + R_{12}^T \otimes (X\bar{A}^T)$, $\Xi_{12} = L \otimes (X\bar{A}^T)$, $\Xi_{13} = I_d \otimes (X\bar{N}^T)$, $\Xi_{22} = -I_d \otimes X$. 进而将 X 和 X^{-1} 分解为

$$X = \begin{bmatrix} T & U \\ U^T & * \end{bmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} S & V \\ V^T & * \end{bmatrix},$$

其中: $S, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U, V \in \mathbb{R}^{n \times k}$, S, Y 是对称正定矩阵, $*$ 表示无关紧要的矩阵块. 令

$$X_1 = \begin{bmatrix} S & I \\ V^T & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} I & T \\ 0 & U^T \end{bmatrix}. \quad (17)$$

则 $XX_1 = X_2$, 且

$$VU^T = I - ST. \quad (18)$$

对不等式(16)实施全等变换 $\text{diag}\{X_1, X_1, I, I, I, I\}$, 并结合等式(5)和(17), 且令

$$\begin{cases} W = VB_c, R = C_c U^T, \\ Z = SAT + SBR + WC_1 T + VA_c U^T, \end{cases} \quad (19)$$

得

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & L \otimes \Phi_{12} & I_d \otimes \Phi_{13} & \bar{R}_{12}^{\frac{1}{2}} \otimes \Phi_{14} & \Phi_{15} & R_{12} \otimes \Phi_{16} \\ * & -I_d \otimes \Phi_{22} & 0 & 0 & 0 & L^T \otimes \Phi_{16} \\ * & 0 & -\lambda I & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & -\lambda^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

其中:

$$\Phi_{11} = R_{11} \otimes \Phi_{22} + R_{12} \otimes \Phi_{12} + R_{12}^T \otimes \Phi_{12}^T,$$

$$\Phi_{12} = \begin{bmatrix} SA + WC_1 & Z \\ A & AT + BR \end{bmatrix}^T, \quad \Phi_{22} = \begin{bmatrix} S & I \\ I & T \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{13} = \begin{bmatrix} N_1^T \\ TN_1^T + R^T N_2^T \end{bmatrix}, \quad \Phi_{14} = \begin{bmatrix} C_2^T \\ TC_2^T \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{15} = \bar{R}_{12}^{\frac{1}{2}} \otimes \begin{bmatrix} SD \\ D \end{bmatrix}, \quad \Phi_{16} = \begin{bmatrix} SM \\ M \end{bmatrix}.$$

可见不等式(20)是关于矩阵变量 S, T, W, R, Z 和 γ 的线性矩阵不等式. 另外, 将不等式(15)移项并利用Schur补引理和数学变换, 可求得与之等价的线性矩阵不等式为

$$\begin{bmatrix} -\gamma^{-1} \sigma_i^2 & [U_i & U_i T] \\ * & - \begin{bmatrix} S & I \\ I & T \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (21)$$

其中 U_i 为第 i 个元素为1而其余元素全为零的 n 维行向量. 因此, 如果线性矩阵不等式组(20)和(21)有可

行解 (S, T, W, R, Z) , 则由等式(18)和(19)即可求出使闭环系统(4)满足性能P1), P2)和P3)的输出反馈控制器(3)的各增益矩阵 A_c, B_c 和 C_c .

综上所述, 得如下结论.

定理 3 设区域 \mathcal{D} 满足 R_{11}, R_{12} 的主对角线上第 i 个元素均大于零, $i \in \{1, \dots, d\}$, 不妨设 $i = 1$, 即 $(R_{11})_{11} = a > 0, (R_{12})_{11} = b > 0$. 令 \bar{R}_{12} 是满足 $(\bar{R}_{12})_{11} = b$, 而其余元素均为零的 d 阶矩阵. 对区域 \mathcal{D} 和闭环系统(4)以及实数 $\gamma > 0$ 和 $\sigma_i > 0 (i = 1, \dots, n)$, 如果存在一个标量 $\lambda > 0$, 使得关于矩阵变量 S, T, W, R, Z 的线性矩阵不等式(20)和(21)成立, 则使闭环系统(4)满足性能P1), P2)和P3)的输出反馈控制器存在, 且其增益矩阵 A_c, B_c 和 C_c 满足等式(18)和(19).

注 2 由于不等式(20)和(21)关于 γ 也是线性的, 所以还可以通过MATLAB工具箱求解不等式(20)和(21)以优化 H_∞ 性能指标 γ .

4 数值例子(Numerical example)

考虑具有以下参数的系统模型(1)

$$A = \begin{bmatrix} -1.3663 & 0 \\ 0 & -0.1002 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 6.5422 & 0 \\ -8.0447 & -3.5922 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.01 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.2192 \end{bmatrix}^T, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0673 \end{bmatrix}^T,$$

$$F = \sin(5t),$$

$$C_1 = [-0.2 \quad 0.1],$$

$$C_2 = [0.3 \quad -0.2],$$

以及左半平面中的圆盘 $D(2, 1.9)$. 设 $\gamma = 0.1, \sigma_1 = 1.1, \sigma_2 = 0.5$, 取 $\lambda = 0.5$.

根据定理3并运用MATLAB工具箱可求得使闭环系统(4)满足性能P1), P2)和P3)的输出反馈控制器的各增益矩阵分别为

$$A_c = \begin{bmatrix} -2.5751 & -63.2849 \\ -0.0217 & -3.9586 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} -612.7564 \\ -11.8494 \end{bmatrix},$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0.0003 & -0.0403 \\ -0.0047 & -0.2490 \end{bmatrix}.$$

其闭环系统在各时间的极点分布如图1所示.

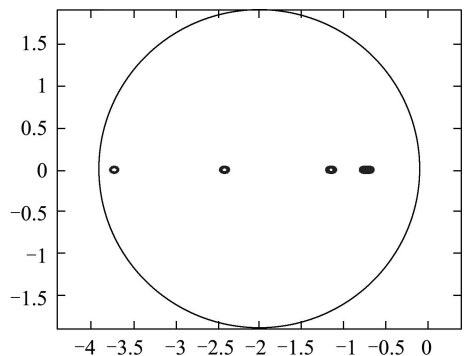


图 1 闭环系统的极点分布

Fig. 1 Pole-distribution of closed-loop system

设外部干扰为正弦波, 则 $w(t) \in L_2[0, \infty)$. 这时闭环系统(4)的状态响应曲线和输出响应曲线分别如图2和图3所示. 图2中 $x_1(t), x_2(t)$ 分别是开环系统的状态分量, 而 $x_{c1}(t), x_{c2}(t)$ 分别是控制器的状态分量.

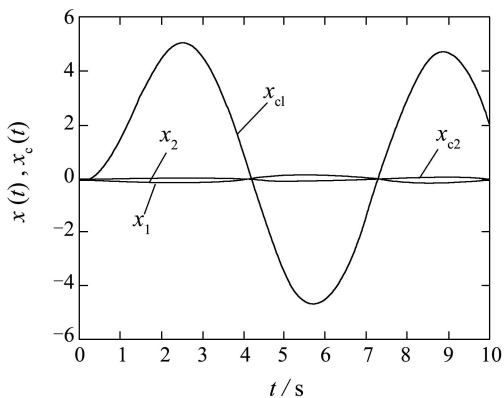


图 2 闭环系统的状态响应曲线

Fig. 2 State response of closed-loop system

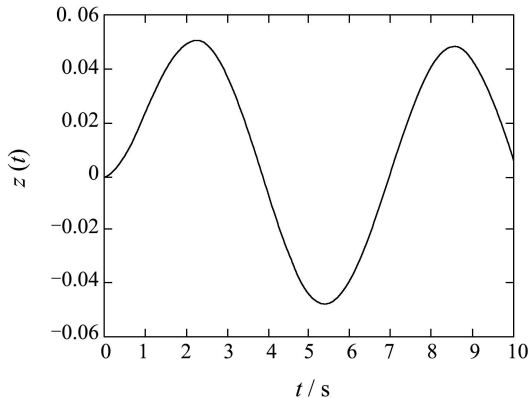


图 3 被控输出 $z(t)$ 的响应曲线

Fig. 3 Response of controlled output $z(t)$

由图1可见, 闭环系统的极点均在所指定的圆内. 由图2可知, 系统状态是稳定的. 将扰动 $w(t)$ 和被控输出 $z(t)$ 的采样点的数据导入到工作区, 并计算得其2-范数分别为4.9208和0.2402, 从而有 $\|z(t)\|_2 \leq \gamma \|w(t)\|_2$, 即约束条件P2)被满足.

设外部干扰 $w(t)$ 为白噪声, 如图4所示.

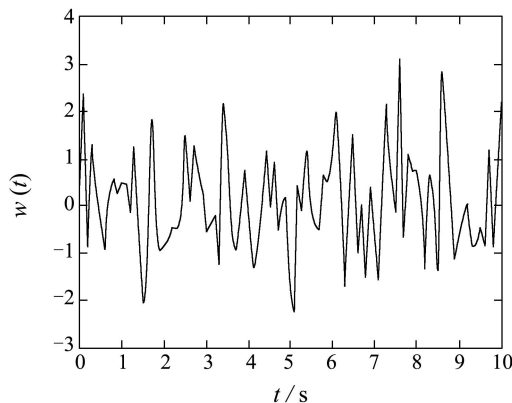


图 4 具有单位密度的零均值白噪声 $w(t)$

Fig. 4 Zero-mean white noise $w(t)$

则闭环系统(4)的状态响应曲线和输出响应曲线分别如图5和图6所示.

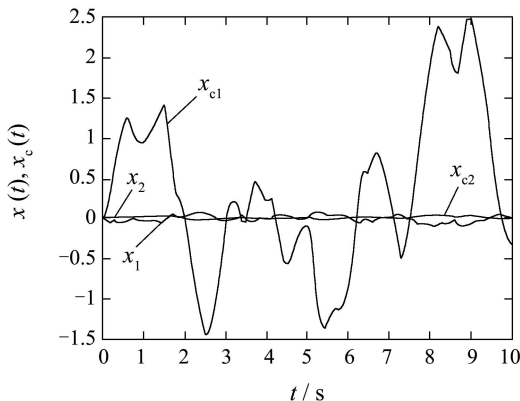


图 5 闭环系统的状态响应曲线

Fig. 5 State response of closed-loop system

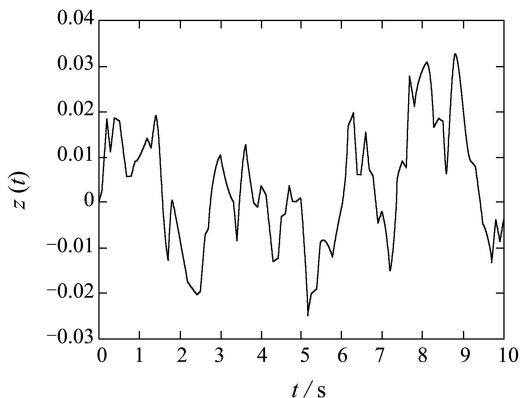


图 6 被控输出 $z(t)$ 的响应曲线

Fig. 6 Response of controlled output $z(t)$

图5中 $x_1(t), x_2(t)$ 分别是开环系统的状态分量, 而 $x_{c1}(t), x_{c2}(t)$ 分别是控制器的状态分量. 由图5可知, 系统状态是稳定的. 经计算得 $[Q]_{11} = 0.0287 < 1.21 = 1.1^2 = \sigma_1^2$, $[Q]_{22} = 0.1813 < 0.25 = 0.5^2 = \sigma_2^2$. 因而所得控制器满足方差约束条件P3).

5 结论(Conclusions)

本文针对一类具有范数有界不确定性的连续线性系统,给出了具有状态方差约束和二次矩阵不等式区域极点配置的鲁棒 H_∞ 输出反馈控制器的设计方法.仿真实例表明,该设计方法是有效的和可行的.由于本文所考虑的区域 \mathcal{D} 涵盖圆域,所以本文结果比文献[4~6]更具广泛性.另外,在区域 \mathcal{D} 和系统不变的情况下,本文的方法还可用于极小能量约束和鲁棒多目标输出反馈控制器的设计.

参考文献(References):

- [1] HOTZ A, SKELTON R E. Covariance control theory[J]. *Int J Control*, 1987, 46(1): 13 – 32.
- [2] WANG Z D, UNBEHAUEN H. Robust H_2/H_∞ -state estimation for systems with error variance constraints: the continuous-time case[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(5): 1061 – 1065.
- [3] WANG Z D, HO D W, LIU X H. Variance-constrained filtering for uncertain stochastic systems with missing measurements[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(7): 1254 – 1258.
- [4] WANG Z D, CHEN X M, GUO Z. Controller design for continuous systems with variance and circular pole constraints[J]. *Int J of Systems Science*, 1995, 26(5): 1249 – 1256.
- [5] 俞立. 具有区域极点和方差约束的不确定连续系统鲁棒控制[J]. 自动化学报, 2000, 26(4): 509 – 514.
(YU Li. Robust control of uncertain systems with regional pole and variance constraints[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(4): 509 – 514.)
- [6] 俞立, 陈国定. 具有闭环区域极点和方差约束的鲁棒输出反馈控制[J]. 自动化学报, 2002, 28(5): 848 – 850.
(YU Li, CHEN Guoding. Robust output feedback control with closed-loop regional pole and variance constraint[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(5): 848 – 850.)
- [7] 苗志宏, 李洪兴. 鲁棒极点配置约束下的模糊控制系统设计[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(5): 729 – 734.
(MIAO Zhihong, LI Hongxing. Design of fuzzy control system with robust pole placement constraints[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(5): 729 – 734.)
- [8] VALTER J, LEITE S, PEDRO L, et al. An improved LMI condition for robust D-stability of uncertain polytopic systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(3): 500 – 504.
- [9] CHILALI M, GAHINET P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 41(3): 358 – 367.
- [10] XIE L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. *Int J Control*, 1996, 63(4): 741 – 750.

作者简介:

- 周武能** (1959—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为鲁棒控制和系统理论等, E-mail: zhouwuneng@163.com;
- 苏宏业** (1969—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为控制理论与应用等, E-mail: hysu@iipc.zju.edu.cn;
- 褚健** (1963—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为控制理论与应用等, E-mail: chuj@iipc.zju.edu.cn.

(上接第102页)

参考文献(References):

- [1] MASTOROCOSTAS P A, THEOCHARIS J B. A recurrent fuzzy-neural model for dynamic system identification[J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 2002, 32(2): 176 – 190
- [2] YAZDIZADEH, A, KHORASANI K. Identification of a turbogenerator system using adaptive time delay neural networks[C]//*Proc of IEEE Conf on Control Applications*. Phoenix, AZ: [s.n.], 1999, 121(7): 355 – 362.
- [3] YAMAMOTO Y, NIKIFORUK P N. Learning algorithm for recurrent neural networks and its application to nonlinear identification[C]//*Proc of the IEEE Int Symposium on Computer-Aided Control System Design*. [S.l.]: [s.n.], 1999, 2(1): 551 – 556.
- [4] YU WEN, POZNYAK A S, SANCHEZ E N. Dynamic multilayer neural networks for nonlinear system on-line identification[C]//*Proc of IEEE Int Symposium on Intelligent Control*. [S.l.]: [s.n.], 2000, 15(1): 25 – 30
- [5] HAYKIN S. Neural networks expand SP's horizons[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1996, 13(2): 24 – 49.
- [6] SELMIC R R, LEWIS F L. Multimodel neural networks identification and failure detection of nonlinear systems[C]//*Proc of the IEEE Conf on Decision and Control*. [S.l.]: [s.n.], 2001, 4(3): 3128 – 3133.
- [7] IBNKAHLA M. Nonlinear system identification using neural networks trained with natural gradient descent[J]. *Eurasip J on Applied Signal Processing*, 2003, 12(1): 1229 – 1237.
- [8] NOURI K, DHAOUADI R, BRAIEK B N. Identification of a nonlinear dynamic systems using recurrent multilayer neural networks[C]//*Proc of the IEEE Int Conf on Systems, Man and Cybernetics*. [S.l.]: [s.n.], 2002, 5(1): 306 – 310.
- [9] ALESSANDRI A, SANGUINETI M, MAGGIORE M. Optimized feedforward neural networks for on-line identification of nonlinear models[C]//*Proc of the IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.]: [s.n.], 2002, 2(2): 1751 – 1756.
- [10] 吕刚, 焦留成. 多模自适应模糊控制器及其在精密伺服系统中的应用[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(1): 47 – 51.
(LV Gang, JIAO Liucheng. Application to precise servo-system using multi-adaptive fuzzy controllers[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(1): 47 – 51.)

作者简介:

- 吕刚** (1976—), 男, 博士, 主要从事智能控制、电力系统自动化和直线电机理论与应用等方面的研究, E-mail:jackey_lg@163.com;
- 范瑜** (1954—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为磁悬浮技术与特种电机、电力系统控制与仿真;
- 李国国** (1954—), 女, 高级工程师, 研究方向为电工理论与新技术.