

## Box-Jenkins模型偏差补偿方法与其他辨识方法的比较

杨慧中, 张勇

(江南大学通信与控制工程学院, 江苏无锡214122)

**摘要:** 对于存在相关噪声干扰的Box-Jenkins系统, 本文借助于偏差补偿原理, 推导了一个偏差补偿最小二乘(BCLS)辨识方法; 理论分析说明BCLS方法能够给出系统模型参数的无偏估计. 并将提出的方法与递推增广最小二乘算法和递推广义增广最小二乘算法进行了比较研究; 用仿真试验分析了这些算法的各自特点和适用范围.

**关键词:** Box-Jenkins模型; 最小二乘; 参数估计; 辨识; 偏差补偿

**中图分类号:** TP273 **文献标识码:** A

## Comparisons of bias compensation methods and other identification approaches for Box-Jenkins models

YANG Hui-zhong, ZHANG Yong

(School of Communication and Control Engineering, Southern Yangtze University, Wuxi, Jiangsu 214122, China)

**Abstract:** For Box-Jenkins systems with correlated noises, a bias compensation least squares (BCLS) identification method is proposed by means of the bias compensation principle. The analysis is then given to show that the BCLS algorithm can give the unbiased estimates of the system model parameters. Finally, the advantages of the proposed BCLS algorithm over the recursive extended least squares algorithm and recursive generalized extended least squares algorithm are shown by using simulation tests.

**Key words:** Box-Jenkins models; least squares; parameter estimation; identification; bias compensation

### 1 引言 (Introduction)

对于有色噪声(相关噪声)干扰的系统, 有许多辨识方法可以估计其参数<sup>[1]</sup>. 例如, 估计CARMA (AR-MAX)模型参数的递推增广最小二乘(RELS)算法和估计Box-Jenkins模型参数的递推广义增广最小二乘(RGELS)算法<sup>[1,2]</sup>. 这两个方法不仅能给出系统模型参数估计, 而且能产生噪声模型参数估计. 然而, 理论分析表明RELS算法的收敛性要求噪声模型是严格正实传递函数<sup>[3]</sup>; RGELS算法是否收敛以及在什么条件下收敛的理论证明是极具挑战性的研究课题, 至今还未很好解决, 丁锋等仅给出了RGELS算法的一个近似分析<sup>[4]</sup>.

工程上, 人们往往不太关心噪声模型, 更期望得到系统模型参数的良好估计. 在这种客观要求下, 对于有色噪声干扰的系统(如ARMAX系统或Box-Jenkins系统), 偏差补偿(或偏差消除)辨识方法是一种获得系统模型参数的有效方法. 利用偏差补偿原理, 许多作者针对不同模型提出了一系列基于偏

差补偿的辨识方法: 输出误差系统<sup>[5,6]</sup>, 有色噪声干扰的ARX-like系统<sup>[7]</sup>, 多输入单输出系统<sup>[8]</sup>, 自回归模型<sup>[9]</sup>, 变量误差系统<sup>[10~12]</sup>, 反馈系统或闭环系统<sup>[13~17]</sup>等等.

然而, 上述提到的一些基于相关分析的偏差补偿方法都假设系统输入是平稳和各态遍历信号. 这里有必要介绍一下“平稳性”和“各态遍历性”的定义. 如果信号 $x(t)$ 的相关函数 $R(t, j) = E[x(t)x(t+j)]$ 不依赖于时间 $t$  [这时的 $R(t, j)$ 记作 $R(j)$ ], 就说 $x(t)$ 是平稳的. 因为实际中只能获得信号的样本序列, 而不可能知道信号的概率密度, 因此用数学期望形式定义的相关函数无法计算. 为此人们作进一步假设, 引入了各态遍历性的概念. 对于平稳信号 $x(t)$ , 如果它的时间(或样本)平均相关函数 $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t)x(t+j)$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ), 当 $N \rightarrow \infty$ 时存在有穷极限, 并且这个极限与数学期望形式的相关函数 $R(j)$ 相等, 即

$$E[x(t)x(t+j)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t)x(t+j),$$

那么就说明信号 $x(t)$ 是二阶矩各态遍历的.

从这个定义可知,白噪声是平稳的和各态遍历的;各态遍历条件比平稳性条件更苛刻;非平稳信号是谈不上各态遍历的.平稳性和各态遍历性是不得已而作的一种假设,在实际中很难满足.

各态遍历性意味着:对固定的 $j$ ,当 $N$ 趋于无穷时, $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t)y(t+j)$ 收敛于一个常数.也就是说,对于大 $N$ 数学期望形式的相关函数 $R(j)$ 可以通过下式近似计算:

$$E[x(t)x(t+j)] \approx \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t)y(t+j).$$

对于非平稳信号,上式左边是时间 $t$ 的函数,右边与 $t$ 无关,二者不可能(近似)相等,所以说基于数学期望形式的相关分析方法不适用于非平稳信号.笔者认为,实际系统中假设系统输入是各态遍历的,十分不妥.故研究无非平稳性和各态遍历性假设下偏差补偿辨识方法是十分必要的,也是本文的研究目标.

本文使用偏差补偿原理<sup>[5]</sup>来研究Box-Jenkins模型的辨识问题.其基本思想是使用一个校正项补偿有偏的最小二乘估计,推导一个基于样本相关函数的偏差补偿最小二乘算法,从而获得系统参数的无偏估计;并用仿真试验将提出的方法与辨识相关噪声干扰ARMAX模型的RELS算法和辨识Box-Jenkins模型的RGELS算法进行了比较研究.本文提出的方法不同于上述提到的偏差补偿算法,因为本文没有使用数学期望形式的相关函数,而是使用时间(样本)平均相关函数,所以无需系统输入是各态遍历假设.

## 2 问题构成 (Problem formulation)

工程系统的干扰大多为有色噪声,这类系统可以用Box-Jenkins模型描述为<sup>[1,2]</sup>

$$A(z)y(t) = B(z)u(t) + \frac{D(z)}{C(z)}v(t). \quad (1)$$

其中: $y(t)$ 为系统输出, $u(t)$ 为系统输入, $v(t)$ 为零均值随机白噪声, $A(z)$ , $B(z)$ , $C(z)$ 和 $D(z)$ 均为单位后移算子 $z^{-1}$ 的多项式 $[z^{-1}y(t) = y(t-1)]$ ,且

$$A(z) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots + a_{n_a}z^{-n_a},$$

$$B(z) = b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \cdots + b_{n_b}z^{-n_b},$$

$$C(z) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \cdots + c_{n_c}z^{-n_c},$$

$$D(z) = 1 + d_1z^{-1} + d_2z^{-2} + \cdots + d_{n_d}z^{-n_d}.$$

不妨设 $t \leq 0$ 时, $u(t) = 0, y(t) = 0, v(t) = 0$ .对于某些实际系统,人们可能不太关心噪声模型结构,而

更关心系统传递函数模型

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

的参数辨识问题.假设系统模型阶次 $n_a$ 和 $n_b$ 已知,而噪声模型阶次 $n_c$ 和 $n_d$ 未知.在这种情况下,无法应用递推广义增广最小二乘算法来辨识系统(1)<sup>[2]</sup>,而常规最小二乘方法给出的参数是有偏的.因此,如何利用系统输入输出数据 $\{u(t), y(t)\}$ ,基于偏差补偿原理提出有效方法来估计系统模型 $G(z)$ 的参数是本文的目标.

当噪声模型阶次 $n_c$ 和 $n_d$ 未知时,可以用一个高阶ARMAX (CARMA)模型来近似系统(1)<sup>[1]</sup>.具体做法如下:

采用长除法,系统(1)可以等价化为

$$A(z)y(t) = B(z)u(t) + [1 + f_1z^{-1} + f_2z^{-2} + \cdots]v(t).$$

假设 $C(z)$ 稳定,那么当 $i$ 趋于无穷大时,参数 $f_i$ 收敛于零( $f_i \rightarrow 0$ ).因此,噪声模型 $\frac{D(z)}{C(z)}$ 可以用 $n_f$ 个参数的有限脉冲响应模型近似为

$$\frac{D(z)}{C(z)} \approx 1 + f_1z^{-1} + f_2z^{-2} + \cdots + f_{n_f}z^{-n_f},$$

且只要阶次 $n_f$ 足够大,这个模型可以满足任意精度要求.在这种假设下,系统(1)可以用下列模型任意精度逼近:

$$A(z)y(t) = B(z)u(t) + (1 + f_1z^{-1} + f_2z^{-2} + \cdots + f_{n_f}z^{-n_f})v(t). \quad (2)$$

本文的基本思路是:基于观测的输入输出数据 $\{y(t), u(t)\}$ ,通过辨识一个等价的ARMAX模型(2),利用偏差原理校正最小二乘估计,利用样本平均相关函数,推导一个偏差补偿最小二乘辨识算法,从而获得系统模型参数的无偏估计.

## 3 偏差补偿方法 (Bias compensation approaches)

令

$$e(t) = (1 + f_1z^{-1} + f_2z^{-2} + \cdots + f_{n_f}z^{-n_f})v(t).$$

定义参数向量 $\theta$ 和信息向量 $\varphi(t)$ 如下:

$$\theta = [a_1, \cdots, a_{n_a}, b_1, \cdots, b_{n_b}]^T \in \mathbb{R}^n,$$

$$\varphi(t) = [-y(t-1), \cdots, -y(t-n_a),$$

$$u(t-1), \cdots, u(t-n_b)]^T \in \mathbb{R}^n,$$

$$n = n_a + n_b.$$

这样则模型(2)可转化为

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta + e(t). \quad (3)$$

极小化输出误差准则函数

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^t [y(i) - \boldsymbol{\varphi}^T(i)\boldsymbol{\theta}]^2,$$

容易得到参数下列 $\boldsymbol{\theta}$ 的最小二乘估计:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LS}}(t) = \mathbf{P}_{\varphi}(t) \sum_{i=1}^t \boldsymbol{\varphi}(i)y(i), \quad (4)$$

$$\mathbf{P}_{\varphi}^{-1}(t) = \sum_{i=1}^t \boldsymbol{\varphi}(i)\boldsymbol{\varphi}^T(i). \quad (5)$$

定义样本相关函数

$$\mathbf{R}_{\varphi y}(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \boldsymbol{\varphi}(i)y(i) \in \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

$$\mathbf{R}_{\varphi e}(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \boldsymbol{\varphi}(i)e(i) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{R}_{ye}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t y(i-1)e(i) \\ \vdots \\ \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t y(i-n_a)e(i) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_a},$$

$$\mathbf{R}_{ue}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t u(i-1)e(i) \\ \vdots \\ \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t u(i-n_b)e(i) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_b}.$$

将式(3)代入 $\mathbf{R}_{\varphi y}(t)$ 的定义式可得

$$\mathbf{R}_{\varphi y}(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \boldsymbol{\varphi}(i)[\boldsymbol{\varphi}^T(i)\boldsymbol{\theta} + e(i)] = \frac{1}{t} \mathbf{P}_{\varphi}^{-1}(t)\boldsymbol{\theta} + \mathbf{R}_{\varphi e}(t). \quad (7)$$

根据 $\mathbf{R}_{\varphi e}(t)$ 和 $\boldsymbol{\varphi}(i)$ 的定义, 有

$$\mathbf{R}_{\varphi e}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t y(i-1)e(i) \\ \vdots \\ -\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t y(i-n_a)e(i) \\ \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t u(i-1)e(i) \\ \vdots \\ \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t u(i-n_b)e(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{ye}(t) \\ \mathbf{R}_{ue}(t) \end{bmatrix}.$$

由于 $\{v(t)\}$ 是白噪声序列, 故 $e(t)$ 与输入 $u(t)$ 不相关, 所以有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{R}_{ue}(t) = \mathbf{0}.$$

于是有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{R}_{\varphi e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{ye}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{Q}\mathbf{R}_{ye}(t). \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_a} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_a+n_b) \times n_a}.$$

本文中 $\mathbf{I}(I_n)$ 表示适当维数( $n$ 阶)单位阵. 利用式(6)和(7), 由式(4)可得

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LS}}(t) = \mathbf{P}_{\varphi}(t)t\mathbf{R}_{\varphi y}(t) = \mathbf{P}_{\varphi}(t)t \left[ \frac{1}{t} \mathbf{P}_{\varphi}^{-1}(t)\boldsymbol{\theta} + \mathbf{R}_{\varphi e}(t) \right] = \boldsymbol{\theta} + \mathbf{P}_{\varphi}(t)t\mathbf{R}_{\varphi e}(t). \quad (9)$$

上式两边取极限, 并使用式(8)可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LS}}(t) = \boldsymbol{\theta} + \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\varphi}(t)t\mathbf{R}_{\varphi e}(t) = \boldsymbol{\theta} - \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\varphi}(t)t\mathbf{Q}\mathbf{R}_{ye}(t). \quad (10)$$

上式说明: 如果 $e(t)$ 是白噪声, 那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{R}_{ye}(t) = \mathbf{0}$ ; 只有在这种情形, 最小二乘估计才是无偏的. 换句话说, 只有ARX模型的最小二乘估计是无偏的. 如果输入是持续激励的, 则 $\mathbf{P}_{\varphi}(t)$ 是一个正定矩阵; 即使 $v(t)$ 是白噪声,  $e(t)$ 也是有色噪声(当 $n_f \neq 0$ ); 故有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{R}_{ye}(t) \neq \mathbf{0}$ ; 所以ARMAX模型的最小二乘估计是有偏的.

从式(10)可看出, 如果在最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LS}}(t)$ 中引入补偿项 $\mathbf{P}_{\varphi}(t)t\mathbf{Q}\mathbf{R}_{ye}(t)$ , 就可获得 $\boldsymbol{\theta}$ 的无偏估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{B}}(t)$ . 由于 $\mathbf{R}_{ye}(t)$ 是未知的, 暂且用其估计 $\hat{\mathbf{R}}_{ye}(t)$ 代替. 因此 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{B}}(t)$ 可以表示为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{B}}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LS}}(t) + \mathbf{P}_{\varphi}(t)t\mathbf{Q}\hat{\mathbf{R}}_{ye}(t). \quad (11)$$

上式中协方差阵 $\mathbf{P}_{\varphi}(t)$ 可以通过观测数据计算得到, 关键问题是如何估算相关函数 $\hat{\mathbf{R}}_{ye}(t)$ . 对于大 $t$ , 式(10)可近似为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LS}}(t) = \boldsymbol{\theta} - \mathbf{P}_{\varphi}(t)t\mathbf{Q}\hat{\mathbf{R}}_{ye}(t).$$

下面讨论如何计算 $\mathbf{R}_{ye}(t)$ 的估计 $\hat{\mathbf{R}}_{ye}(t)$ .

定义增广参数向量 $\boldsymbol{\vartheta}$ 和信息向量 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 如下:

$$\boldsymbol{\vartheta} = [\boldsymbol{\theta}^T, \mathbf{b}^T]^T \in \mathbb{R}^{n+n_a},$$

$$\mathbf{b} = [b_{n_b+1}, b_{n_b+2}, \dots, b_{n_b+n_a}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_a},$$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = [\boldsymbol{\varphi}^T(t), \mathbf{u}^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{n+n_a},$$

$$\mathbf{u}(t) = [u(t-n_b-1), \dots, u(t-n_b-n_a)]^T \in \mathbb{R}^{n_a}.$$

定义一个虚拟的高阶次多项式

$$\bar{B}(z) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b} + b_{n_b+1} z^{-(n_b+1)} + \dots + b_{n_b+n_a} z^{-(n_b+n_a)}.$$

实际上 $\bar{B}(z) = B(z)$ , 因为 $\bar{B}(z)$ 的最后 $n_a$ 个系数为零(即对于 $i = 1, 2, \dots, n_a$ 时,  $b_{n_b+i} = 0$ ). 构造一个

虚拟系统

$$A(z)y(t) = \bar{B}(z)u(t) + e(t). \quad (12)$$

定义协方差矩阵 $P_\phi(t)$ 和 $P_u(t)$ , 以及一些样本相关函数如下:

$$P_\phi^{-1}(t) = \sum_{i=1}^t \phi(i)\phi^T(i) \in \mathbb{R}^{(n+n_a) \times (n+n_a)},$$

$$P_u^{-1}(t) = \sum_{i=1}^t \mathbf{u}(i)\mathbf{u}^T(i) \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}, \quad (13)$$

$$R_{\phi y}(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \phi(i)y(i) \in \mathbb{R}^{n+n_a},$$

$$R_{\varphi u}(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \varphi(i)\mathbf{u}^T(i) \in \mathbb{R}^{n \times n_b}, \quad (14)$$

$$R_{uy}(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \mathbf{u}(i)y(i) \in \mathbb{R}^{n_a}. \quad (15)$$

仿照上小节的推导, 不难得到系统(12)参数向量 $\vartheta$ 的最小二乘估计为

$$\hat{\vartheta}_{LS}(t) = P_\phi(t)t R_{\phi y}(t) = \vartheta + P_\phi(t)t R_{\phi e}(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\vartheta}_{LS}(t) = \vartheta - \lim_{t \rightarrow \infty} P_\phi(t)t \bar{Q} \hat{R}_{ye}(t),$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} I_{n_a} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+n_a) \times n_a}.$$

对于大 $t$ , 上式也可近似为

$$\hat{\vartheta}_{LS}(t) = \vartheta - P_\phi(t)t \bar{Q} \hat{R}_{ye}(t). \quad (16)$$

由于

$$P_\phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} P_\phi^{-1}(t) & t R_{\varphi u}(t) \\ t R_{\varphi u}^T(t) & P_u^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$R_{\phi y}(t) = \begin{bmatrix} R_{\varphi y}(t) \\ R_{uy}(t) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

根据分块矩阵求逆引理, 对矩阵 $P_\phi^{-1}(t)$ 求逆得到

$$P_\phi(t) = \begin{bmatrix} * & * \\ -\Delta^{-1}(t)R_{\varphi u}^T(t)tP_\varphi(t) & \Delta^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\Delta(t) = P_u(t) - R_{\varphi u}^T(t)tP_\varphi(t)R_{\varphi u}(t). \quad (19)$$

上式中\*表示不重要的元素. 利用式(18), 有

$$\hat{\vartheta}_{LS}(t) = P_\phi(t)t R_{\phi y}(t) =$$

$$t \begin{bmatrix} * & * \\ -\Delta^{-1}(t)R_{\varphi u}^T(t)tP_\varphi(t) & \Delta^{-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\varphi y}(t) \\ R_{uy}(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} * \\ -\Delta^{-1}(t)R_{\varphi u}^T(t)tP_\varphi(t)tR_{\varphi y}(t) + \Delta^{-1}(t)R_{uy}(t)t \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} * \\ -\Delta^{-1}(t)[R_{\varphi u}^T(t)t\hat{\theta}_{LS}(t) - R_{uy}(t)t] \end{bmatrix}.$$

设 $\hat{b}_{LS}(t)$ 表示 $b$ 的估计, 即 $\hat{b}_{LS}(t)$ 表示 $\hat{\vartheta}_{LS}(t)$ 的后 $n_a$

元, 所以有

$$\hat{b}_{LS}(t) = -\Delta^{-1}(t)[R_{\varphi u}^T(t)t\hat{\theta}_{LS}(t) - R_{uy}(t)t]. \quad (20)$$

将式(18)代入式(16)可得

$$\hat{\vartheta}_{LS}(t) =$$

$$\vartheta + \begin{bmatrix} -\Delta^{-1}(t)R_{\varphi u}^T(t)tP_\varphi(t) & \Delta^{-1}(t) \end{bmatrix} \bar{Q} \hat{R}_{ye}(t) =$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * \\ -\Delta^{-1}(t)R_{\varphi u}^T(t)tP_\varphi(t)Q\hat{R}_{ye}(t) \end{bmatrix}.$$

因此有

$$\hat{b}_{LS}(t) = b - \Delta^{-1}(t)R_{\varphi u}^T(t)tP_\varphi(t)Q\hat{R}_{ye}(t) =$$

$$-\Delta^{-1}(t)R_{\varphi u}^T(t)tP_\varphi(t)Q\hat{R}_{ye}(t). \quad (21)$$

比较式(20)和式(21)可以得到

$$-\Delta^{-1}(t)[R_{\varphi u}^T(t)t\hat{\theta}_{LS}(t) - R_{uy}(t)t] =$$

$$-\Delta^{-1}(t)R_{\varphi u}^T(t)tP_\varphi(t)Q\hat{R}_{ye}(t).$$

容易求得

$$\hat{R}_{ye}(t) =$$

$$[R_{\varphi u}^T(t)tP_\varphi(t)Q]^{-1}[R_{\varphi u}^T(t)t\hat{\theta}_{LS}(t) - R_{uy}(t)t]. \quad (22)$$

这里 $\hat{R}_{ye}$ 为估计项, 这样必然产生估计误差, 但在估计系统模型参数过程中, 如果随着 $t$ 的增大,  $\hat{R}_{ye}$ 趋近于真实的 $R_{ye}$ , 就不影响系统参数的估计值的统计特性. 因此, 这个算法的收敛性有待进行研究.

偏差补偿最小二乘算法的计算步骤总结如下:

- 1) 采集数据 $\{u(t), y(t)\}$ , 对于选定数据长度 $t = L$ , 设置常数矩阵 $Q$ ;
- 2) 利用式(5)计算协方差阵 $P_\varphi(t)$ , 用式(6)计算相关函数 $R_{\varphi y}(t)$ ;
- 3) 用式(9)计算最小二乘估计 $\hat{\theta}_{LS}(t)$ ;
- 4) 利用式(13)计算协方差阵 $P_u(t)$ , 用式(14)是计算相关函数 $R_{\varphi u}(t)$ , 用式(15)计算 $R_{uy}(t)$ ;
- 5) 利用式(22)计算相关函数估计 $\hat{R}_{ye}(t)$ ;
- 6) 利用式(11)计算偏差补偿最小二乘(BCLS: bias compensation least squares)估计 $\hat{\theta}_B(t)$ .

#### 4 RELS与RGELS算法 (RELS and RGELS algorithms)

为了便于比较, 下面给出辨识ARMAX模型(2)参数的递推增广最小二乘算法和辨识Box-Jenkins模型(1)参数的递推广义增广最小二乘算法. 定义参数向量 $\Theta$ 和信息向量 $\Phi_0(t)$ 为

$$\Theta = [\theta^T, f_1, f_2, \dots, f_{n_f}]^T \in \mathbb{R}^{n+n_f},$$

$$\Phi_0(t) = [\varphi^T(t), v(t-1), v(t-2), \dots, v(t-n_f)]^T \in \mathbb{R}^{n+n_f}.$$

则式(2)可写为

$$y(t) = \Phi_0^T(t)\Theta + v(t). \quad (23)$$

由于上式信息向量 $\Phi_0(t)$ 中包含了不可测的噪声项 $v(t-i)$ , 所以常规最小二乘算法不能直接应用. 这个未知噪声项用其估计 $\hat{v}(t-i)$ 代替, 就得到估计 $\Theta$ 的递推增广最小二乘(RELS)辨识算法<sup>[3]</sup>:

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}(t) &= \hat{\Theta}(t-1) + L(t)[y(t) - \Phi^T(t)\hat{\Theta}(t-1)], \\ L(t) &= P(t-1)\Phi(t)[1 + \Phi^T(t)P(t-1)\Phi(t)]^{-1}, \\ P(t) &= P(t-1) - L(t)\Phi^T(t)P(t-1), \\ \hat{v}(t) &= y(t) - \Phi^T(t)\hat{\Theta}(t), \\ \Phi(t) &= [\varphi^T(t), \hat{v}(t-1), \dots, \hat{v}(t-n_f)]^T. \end{aligned} \quad (24)$$

算法中 $\hat{\Theta}(t)$ 是 $\Theta$ 的估计. 通常算法的协方差阵初值 $P(0)$ 选择为一个正大定阵, 如 $p_0 = 10^6$ , 参数估计初值 $\hat{\Theta}(0)$ 可选择为一个很小的实向量, 如 $\hat{\Theta}(0) = \mathbf{1}_{n+n_f}/p_0$ , 其中 $\mathbf{1}_{n+n_f}$ 是元均为1的 $n+n_f$ 维向量.

参照文[2], 不难导出辨识Box-Jenkins模型(1)参数的递推广义增广最小二乘(RGELS)辨识算法:

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}(t) &= \hat{\Theta}(t-1) + L(t)[y(t) - \Psi^T(t)\hat{\Theta}(t-1)], \\ L(t) &= \frac{P(t-1)\Psi(t)}{1 + \Psi^T(t)P(t-1)\Psi(t)}, \\ P(t) &= [I - L(t)\Psi^T(t)]P(t-1), \\ \hat{\Theta}(t) &= \begin{bmatrix} \hat{\theta}(t) \\ \hat{\theta}_n(t) \end{bmatrix}, \quad \Psi(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \hat{\varphi}_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n_c+n_d}, \\ \varphi(t) &= [-y(t-1), \dots, -y(t-n_a), \\ &u(t-1), \dots, u(t-n_a)]^T \in \mathbb{R}^n, \\ \hat{\varphi}_n(t) &= [-\hat{e}(t-1), \dots, -\hat{e}(t-n_c), \\ &\hat{v}(t-1), \dots, \hat{v}(t-n_d)]^T \in \mathbb{R}^{n_c+n_d}, \\ \hat{e}(t) &= y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t), \\ \hat{v}(t) &= y(t) - \Psi^T(t)\hat{\Theta}(t) \text{ 或 } \hat{v}(t) = \hat{e}(t) - \hat{\varphi}_n^T(t)\hat{\theta}_n(t), \\ \Theta &= [\theta^T, \theta_n^T]^T, \\ \theta &= [a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, b_1, b_2, \dots, b_{n_b}]^T, \\ \theta_n &= [c_1, c_2, \dots, c_{n_c}, d_1, d_2, \dots, d_{n_d}]^T. \end{aligned}$$

RGELS算法的初值可选择为 $\hat{\Theta}(0) = \mathbf{1}_{n+n_c+n_d}/p_0$ ,  $P(0) = \text{diag}(p_0 I_n, P_n(0))$ ,  $P_n(0) = I_{n_c+n_d}$ .

### 5 仿真例子 (Simulation examples)

**例 1** 考虑ARMAX模型描述的仿真对象:

$$\begin{aligned} A(z)y(t) &= B(z)u(t) + e(t), \quad e(t) = F(z)v(t), \\ A(z) &= 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} = 1 - 1.60z^{-1} + 0.80z^{-2}, \\ B(z) &= b_1z^{-1} + b_2z^{-2} = 0.412z^{-1} + 0.309z^{-2}, \\ F(z) &= 1 + f_1z^{-1} = 1 - 0.64z^{-1}, \\ \theta &= [a_1, a_2, b_1, b_2]^T = [-1.60, 0.80, 0.412, 0.309]^T, \\ \Theta &= [\theta^T, f_1^T]^T = [-1.60, 0.80, 0.412, 0.309, -0.64]^T. \end{aligned}$$

输入 $\{u(t)\}$ 采用零均值单位方差( $\sigma_u^2 = 1.00^2$ )不相关可测随机变量序列,  $\{v(t)\}$ 采用零均值方差为 $\sigma_v^2$ 白噪声序列, 改变 $\sigma_v^2$ 可以控制噪信比 $\Delta_{ns}$ . 当 $\sigma_v^2 = 0.50^2$ 时, 系统的噪信比为 $\Delta_{ns} = 37.18\%$ ; 当 $\sigma_v^2 = 1.00^2$ 时, 系统的噪信比为 $\Delta_{ns} = 74.36\%$ . 系统噪信比定义为输出中 $w(t)$ 的方差 $\text{var}[w(t)] = \sigma_w^2$ 与无噪输出 $x(t)$ 的方差 $\text{var}[x(t)] = \sigma_x^2$ 之比的平方根<sup>[18]</sup>, 用数学关系式可以表达为

$$\begin{aligned} \Delta_{ns} &= \sqrt{\frac{\text{var}[w(t)]}{\text{var}[x(t)]}} \times 100\% = \frac{\sigma_w}{\sigma_x} \times 100\%, \\ x(t) &= \frac{B(z)}{A(z)} u(t), \quad w(t) = \frac{e(t)}{A(z)}. \end{aligned}$$

不同噪信比下这个系统的RELS估计、LS估计和BCLS估计及其误差如表1、图1和图2所示, 其中 $\Delta_s = \|\hat{\Theta}(t) - \Theta\|/\|\Theta\|$ 和 $\Delta = \|\hat{\Theta}(t) - \Theta\|/\|\Theta\|$ 为系统模型参数估计误差和包括噪声模型参数估计误差. 这里定义误差 $\Delta_s$ 的目的是为了与偏差最小二乘方法比较. 3种方法的参数估计误差 $\Delta_s$ 随 $t$ 变化曲线如图1和图2所示. 参数估计误差曲线可以用来衡量参数估计收敛于真值的速率和参数估计精度.

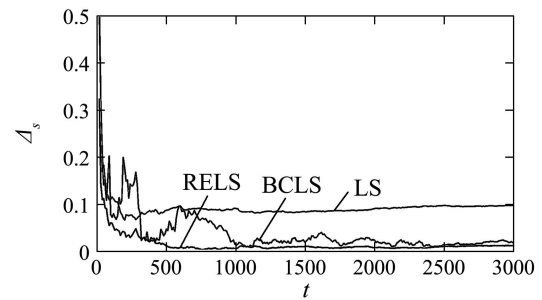


图 1 例1参数估计误差 $\Delta_s$ 随 $t$ 的变化曲线( $\sigma_v^2 = 0.50^2$ )  
Fig. 1 Estimation errors  $\Delta_s$  v.s.  $t$  ( $\sigma_v^2 = 0.50^2$ )

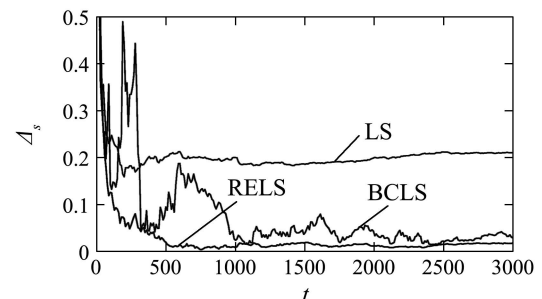


图 2 例1参数估计误差 $\Delta_s$ 随 $t$ 的变化曲线( $\sigma_v^2 = 1.00^2$ )  
Fig. 2 Estimation errors  $\Delta_s$  v.s.  $t$  ( $\sigma_v^2 = 1.00^2$ )

从表1、图1和图2的仿真结果可以看出: 对于有色噪声干扰的ARMAX模型, 最小二乘参数估计误差大、明显是有偏的; RELS参数估计误差比较平稳(对协方差阵初值和参数估计初值选择不敏感), 但RELS算法需要已知噪声模型阶次; BCLS估计波动大, 当噪信比较小时, 有较好的估计精度.

表1 例1参数估计( $\sigma_v^2 = 0.50^2$ )  
Table 1 Parameter estimates( $\sigma_v^2 = 0.50^2$ )

$t$	RELS估计						
	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$d_1$	$\Delta/\%$	$\Delta_s/\%$
100	-1.59102	0.80321	0.46724	0.38467	-0.56153	6.22694	5.05868
200	-1.61501	0.81979	0.47046	0.27657	-0.57676	4.84224	3.83105
300	-1.62318	0.82765	0.43080	0.26047	-0.63869	3.21763	3.40176
500	-1.60509	0.81037	0.41826	0.29371	-0.68871	2.67781	1.08284
1000	-1.60602	0.80660	0.40873	0.31304	-0.66793	1.51275	0.55519
1500	-1.60985	0.80818	0.40804	0.29865	-0.66947	1.72644	0.90964
2000	-1.59552	0.79678	0.41814	0.30074	-0.64410	0.62873	0.62734
2500	-1.59317	0.79298	0.41514	0.29799	-0.66203	1.35586	0.80933
3000	-1.59435	0.79450	0.41222	0.29372	-0.65939	1.31657	0.92380
真值	-1.60000	0.80000	0.41200	0.30900	-0.64000		
$t$	LS估计						
	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$d_1$	$\Delta/\%$	$\Delta_s/\%$
100	-1.49407	0.71224	0.47554	0.40736	---	---	9.70469
200	-1.50853	0.71936	0.44702	0.31917	---	---	6.83724
300	-1.49934	0.71189	0.40558	0.32766	---	---	7.26416
500	-1.48568	0.70161	0.39597	0.36610	---	---	8.70636
1000	-1.48560	0.70037	0.40324	0.37585	---	---	8.91806
1500	-1.49137	0.70421	0.39934	0.35454	---	---	8.18438
2000	-1.47918	0.69278	0.40732	0.34838	---	---	8.93509
2500	-1.47294	0.68582	0.40962	0.34827	---	---	9.41708
3000	-1.47220	0.68542	0.40558	0.34489	---	---	9.42632
$t$	BCLS估计						
	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$d_1$	$\Delta/\%$	$\Delta_s/\%$
100	-1.51138	0.65499	0.44903	0.38333	---	---	10.16094
200	-1.80316	1.04112	0.48768	0.22307	---	---	18.01994
300	-1.71156	0.91236	0.41904	0.25227	---	---	9.04290
500	-1.56473	0.72414	0.38740	0.32559	---	---	4.76868
1000	-1.60505	0.78866	0.40328	0.32556	---	---	1.20652
1500	-1.62483	0.82112	0.40485	0.30311	---	---	1.82036
2000	-1.61999	0.81695	0.41329	0.29301	---	---	1.65070
2500	-1.60100	0.78293	0.41448	0.29829	---	---	1.09204
3000	-1.59565	0.77282	0.40993	0.29826	---	---	1.59101
真值	-1.60000	0.80000	0.41200	0.30900			

例2 考虑Box-Jenkins模型描述的仿真对象:

$$A(z)y(z) = B(z)u(t) + e(t), \quad e(t) = \frac{D(z)}{C(z)}v(t),$$

$$A(z) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} = 1 - 1.60z^{-1} + 0.80z^{-2},$$

$$B(z) = b_1z^{-1} + b_2z^{-2} = 0.412z^{-1} + 0.309z^{-2},$$

$$C(z) = 1 + c_1z^{-1} = 1 + 0.80z^{-1},$$

$$D(z) = 1 + d_1z^{-1} = 1 - 0.64z^{-1},$$

$$\Theta = [\theta^T, \theta_n^T]^T, \quad \theta_n = [c_1, d_1]^T = [0.80, -0.64]^T,$$

$$\theta = [a_1, a_2, b_1, b_2]^T = [-1.60, 0.80, 0.412, 0.309]^T.$$

仿真条件同例1, 噪声方差和噪信比分别为 $\sigma_v^2 = 0.40^2$ 和 $\Delta_{ns} = 21.06\%$ . 用LS, BCLS, REGLS算法估

计这个系统的参数, 结果如表2所示, 系统模型参数估计误差 $\Delta_s$ 曲线如图3所示.

把这个Box-jenkins模型化成一个近似的ARMAX模型

$$A(z)y(t) =$$

$$B(z)u(t) + (1 + f_1z^{-1} + f_2z^{-2} + \dots +$$

$$f_{n_f}z^{-n_f})v(t),$$

对不同的 $n_f = 1, 2, 3, \dots$ 时, 用RELS算法估计对应模型的参数,  $n_f = 2$ 和 $n_f = 4$ 时的RELS估计也如表2所示, 系统模型参数估计误差 $\Delta_s$ 曲线如图4所示(为便于比较, 图4中也绘出了RGELS估计误差曲线).

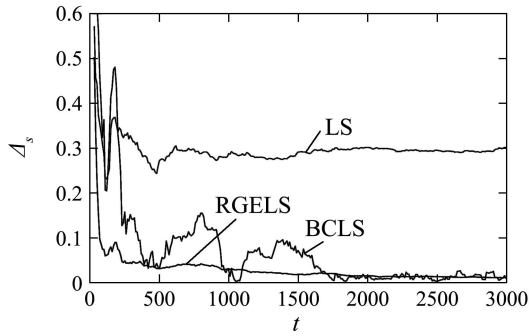


图 3 例2  $\Delta_s$  随  $t$  的变化曲线 ( $\sigma_v^2 = 0.40^2$ )  
 Fig. 3 Estimation errors  $\Delta_s$  v.s.  $t$  ( $\sigma_v^2 = 0.40^2$ )

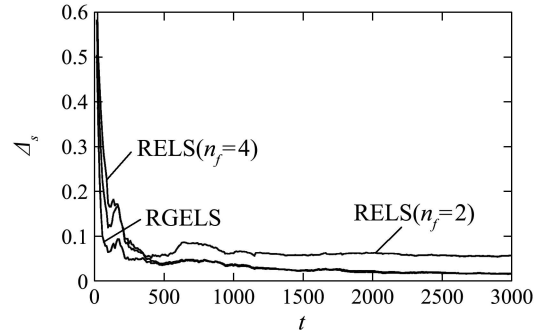


图 4 例2  $\Delta_s$  随  $t$  的变化曲线 ( $\sigma_v^2 = 0.40^2$ )  
 Fig. 4 Estimation errors  $\Delta_s$  v.s.  $t$  ( $\sigma_v^2 = 0.40^2$ )

表 2 例2参数估计 ( $\sigma_v^2 = 0.40^2$ )  
 Table 2 Parameter estimates ( $\sigma_v^2 = 0.40^2$ )

$t$	RGELS估计							$\Delta/\%$	$\Delta_s/\%$
	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$c_1$	$d_1$			
100	-1.58135	0.78024	0.37289	0.41573	0.57843	-0.30106	19.83517	6.27837	
200	-1.55382	0.75722	0.37702	0.42227	0.79784	-0.18851	22.16763	7.21053	
300	-1.57282	0.77579	0.39045	0.38830	0.77593	-0.31262	16.01790	4.82819	
500	-1.57735	0.78574	0.40593	0.36062	0.77192	-0.39767	11.80625	3.14063	
1000	-1.57220	0.77538	0.41075	0.35350	0.76227	-0.48321	8.06525	3.11424	
1500	-1.57785	0.78236	0.42242	0.33039	0.77309	-0.49379	7.20972	1.98681	
2000	-1.58229	0.78247	0.41708	0.32390	0.77411	-0.51779	6.04061	1.58315	
2500	-1.58391	0.78427	0.41875	0.31987	0.77681	-0.52993	5.43233	1.39050	
3000	-1.58771	0.78743	0.42057	0.31820	0.77940	-0.54288	4.78163	1.16080	
真值	-1.60000	0.80000	0.41200	0.30900	0.80000	-0.64000			

$t$	BCLS估计							$\Delta/\%$	$\Delta_s/\%$
	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$c_1$	$d_1$			
100	-1.39726	0.52754	0.33093	0.42137	—	—	—	19.70426	
200	-1.26872	0.34661	0.26704	0.48878	—	—	—	32.61647	
300	-1.45679	0.58949	0.35412	0.40299	—	—	—	14.90717	
500	-1.56808	0.75947	0.38165	0.34776	—	—	—	3.83065	
1000	-1.57641	0.76919	0.42153	0.31981	—	—	—	2.22342	
2000	-1.58763	0.78473	0.40107	0.32223	—	—	—	1.40172	
2500	-1.60052	0.80419	0.40798	0.31033	—	—	—	0.32140	
3000	-1.59377	0.79309	0.40806	0.31338	—	—	—	0.59174	

$t$	RELS估计 ( $n_f = 2$ )							$\Delta/\%$	$\Delta_s/\%$
	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$c_1$	$d_1$			
100	-1.58135	0.78024	0.37289	0.41573	—	—	—	11.71162	
200	-1.55382	0.75722	0.37702	0.42227	—	—	—	12.96340	
300	-1.57282	0.77579	0.39045	0.38830	—	—	—	7.49283	
500	-1.57735	0.78574	0.40593	0.36062	—	—	—	5.49604	
1000	-1.57220	0.77538	0.41075	0.35350	—	—	—	6.00859	
1500	-1.57785	0.78236	0.42242	0.33039	—	—	—	5.54747	
2000	-1.58229	0.78247	0.41708	0.32390	—	—	—	5.96691	
2500	-1.58391	0.78427	0.41875	0.31987	—	—	—	5.46609	
3000	-1.58771	0.78743	0.42057	0.31820	—	—	—	5.34658	

$t$	RELS估计 ( $n_f = 4$ )							$\Delta/\%$	$\Delta_s/\%$
	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$c_1$	$d_1$			
100	-1.58135	0.78024	0.37289	0.41573	—	—	—	17.49829	
200	-1.55382	0.75722	0.37702	0.42227	—	—	—	12.47755	
300	-1.57282	0.77579	0.39045	0.38830	—	—	—	6.68428	
500	-1.57735	0.78574	0.40593	0.36062	—	—	—	3.47739	
1000	-1.57220	0.77538	0.41075	0.35350	—	—	—	3.31167	
1500	-1.57785	0.78236	0.42242	0.33039	—	—	—	2.13765	
2000	-1.58229	0.78247	0.41708	0.32390	—	—	—	1.87355	
2500	-1.58391	0.78427	0.41875	0.31987	—	—	—	1.50978	
3000	-1.58771	0.78743	0.42057	0.31820	—	—	—	1.23031	
真值	-1.60000	0.80000	0.41200	0.30900					

从仿真结果可知,对于有色噪声干扰的Box-Jenkins模型,有以下结论:

· 最小二乘参数估计误差大、是有偏的。RGELS有较好的估计精度,然而RGELS算法对参数估计初值和协方差阵初值的选择比较敏感。BCLS估计波动大、平稳性差,但数据长度大时, BCLS估计精度基本满足要求;因此,尝试研究一种迭代(递推)偏差补偿最小二乘算法是解决BCLS算法估计波动大的一条途径。参见表2和图3。

· 由于RGELS需要噪声模型阶次的知识,而BCLS算法不需要。因此在不知道噪声模型阶次情况下, BCLS算法不失为一种有效方法。

· 从图4参数估计误差曲线可以看出,当噪声模型阶次 $n_f$ 较大时, RELS估计与RGELS估计精度很接近。这说明一个Box-Jenkins模型可以用一个高阶次的ARMAX模型逼近。但是当 $n_f$ 太大时,对应的RELS算法计算量也大;解决问题的途径是:寻找一个依噪声模型阶次递增的ARMAX模型参数辨识方法,从而可以确定一个满足精度要求的合理阶次,而且计算量不致太大。

## 6 结语 (Conclusion)

本文利用样本相关函数,推导了一个偏差补偿最小二乘辨识方法,并基于有色噪声干扰的ARMAX模型和Box-Jenkins模型,与RELS算法和RGELS算法进行了比较研究,分析了各自的特点和适用范围。如何将提出的BCLS算法用递推方式实现,用于在线辨识是值得进一步研究的。

## 参考文献 (References):

- [1] 谢新民, 丁锋. 自适应控制系统[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002. (XIE Xinmin, DING Feng. *Adaptive Control Systems*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)
- [2] 丁锋. 辨识Box-Jenkins模型参数的递推广义增广最小二乘法[J]. 控制与决策, 1990, 5(6): 53 - 56. (DING Feng. Recursive generalized extended least squares methods of identifying Box-Jenkin models[J]. *Control and Decision*, 1990, 5(6): 53 - 56.)
- [3] 丁锋, 谢新民. 多变量系统递推增广最小二乘法收敛性分析[J]. 控制与决策, 1992, 7(6): 443-447. (DING Feng, XIE Xinmin. Convergence analysis of recursive least squares methods for multivariable systems[J]. *Control and Decision*, 1992, 7(6): 443 - 447.)
- [4] 丁锋, 谢新民. 线性多变量系统的联合辨识算法[J]. 控制理论与应用, 1992, 9(5): 545 - 550. (DING Feng, XIE Xinmin. Combined identification algorithms for linear multivariable systems [J]. *Control Theory & Applications*, 1992, 9(5): 545 - 550.)
- [5] DING F, CHEN T, QIU L. Bias compensation based recursive least squares identification algorithm for MISO systems[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2006, 53(5): 349 - 353.
- [6] ZHENG W X. On a least-squares-based algorithm for identification of stochastic linear systems[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1998, 46(6): 1631 - 1638.
- [7] FENG C B, ZHENG W X. Robust identification of stochastic linear systems with correlated noise[J]. *IEE Proceedings-Part D: Control Theory and Applications*, 1991, 138(5): 484 - 492.
- [8] ZHENG W X. Least-squares identification of a class of multivariable systems with correlated disturbances[J]. *J of the Franklin Institute*, 1999, 336(8): 1309-1324.
- [9] ZHENG W X. Fast identification of autoregressive signals from noisy observations[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2005, 52(1): 43 - 48.
- [10] ZHENG W X. Transfer function estimation from noisy input and output data[J]. *Int J of Adaptive Control and Signal Processing*, 1998, 12(4): 365 - 380.
- [11] ZHENG W X. A bias correction method for identification of linear dynamic errors-in-variables models[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1142 - 1147.
- [12] ZHENG WX. Parameter estimation of stochastic linear systems with noisy input[J]. *Int J of Systems Science*, 2004, 35(3): 185 - 190.
- [13] ZHENG W X. A bias-correction method for indirect identification of closed-loop systems[J]. *Automatica*, 1995, 31(7): 1019 - 1024.
- [14] ZHENG W X. Identification of closed-loop systems with low-order controllers[J]. *Automatica*, 1996, 32(12): 1753 - 1757.
- [15] ZHENG W X. Parametric identification of linear systems operating under feedback control[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 2001, 48(4): 451 - 458.
- [16] ZHENG W X. A modified method for closed-loop identification of transfer function models with common factors[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, 49(4): 556 - 562.
- [17] ZHENG W X. On indirect identification of feedback-control systems via the instrumental variables methods the IV methods[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 2003, 50(9): 1232 - 1238.
- [18] 丁锋, 杨家本. 系统噪信比的计算[J]. 清华大学学报(自然科学版), 1998, 38(9): 107 - 110. (DING Feng, YANG Jiaben. Computation formulas o the noise-to-signal ratio of input-output systems[J]. *J of Tsinghua University*, 1998, 38(9): 107 - 110.)

## 作者简介:

**杨慧中** (1955—), 女, 江南大学通信与控制工程学院教授, 博士, 博士生导师, 目前主要从事模型辨识、过程控制、神经网络与自适应控制方面的研究, E-mail: yhz@sytu.edu.cn.

**张勇** (1981—), 男, 江南大学通信与控制工程学院硕士研究生, 目前主要从事模型参数辨识的研究, E-mail: yinghuzhangyong@163.com.