文章编号：1000−8152(2007)02−0255−06

含正弦扰动奇异摄动时滞系统的最优减振控制

张宝琳[1,2]，唐功友[1]

(1. 中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266071; 2. 中国计量学院 数学与信息科学系, 江苏 杭州 310018)

摘要: 研究奇异摄动时滞系统在正弦扰动下的最优减振控制问题. 基于奇异摄动的快慢分解理论, 将原最优控制问题转化为无时滞快子问题和受扰线性时滞慢子问题, 通过摄动法和前馈补偿技术求解时滞慢子系统的最优控制问题, 得到了系统的前馈反馈组合控制(FFCC)律及其存在唯一性条件. FFCC律由线性解析项和共态向量无穷级数和表示的时滞补偿项组成, 其中线性解析项可通过求解Riccati方程和Sylvester方程得到, 时滞补偿项通过递推求解共态向量方程得到. 仿真算例表明了方法的有效性.

关键词: 奇异摄动系统; 时滞; 最优控制; 摄动法; 正弦扰动

中图分类号: TP13　　　**文献标识码**: A

Optimal damping control for singularly perturbed time-delay systems with sinusoidal disturbances

ZHANG Bao-lin[1,2]，TANG Gong-you[1]

(1. College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao Shandong 266071, China;
2. Department of Information and Mathematics Sciences, China Jiliang University, Hangzhou Jiangsu 310018, China)

Abstract: The optimal damping control design for singularly perturbed time-delay systems affected by external sinusoidal disturbances is considered. Based on the slow-fast decomposition theory of singular perturbation, the system is first decomposed into a fast subsystem and a slow time-delay subsystem with disturbances. Then, the perturbation method is proposed to solve the slow time scale time-delay optimal control problem, and the feedforward compensation technique is used to reject the disturbances. The conditions of existence and uniqueness of the feedforward and feedback composite control (FFCC) law are also obtained. The FFCC law consists of linear analytic terms and a time-delay compensation term which is a series sum of adjoint vectors. The linear analytic terms can be found by solving Riccati matrix equation and Sylvester equation respectively. The compensation term can be approximately obtained by a recursion formula of adjoint vector equation. Finally, numerical examples are presented to illustrate the effectiveness of the proposed design method.

Key words: singularly perturbed systems; time-delay; optimal control; perturbation method; sinusoidal disturbances

1 引言(Introduction)

几乎所有的实际控制系统都受到外部扰动的影响, 例如海洋平台实时控制系统中的波浪力作用[1], 磁盘驱动系统中的周期扰动[2]等. 近年来, 针对扰动抑制问题的研究成果不少, 例如, Lee等[3]研究了含确定和随机扰动的受约束系统, 提出了基于模型的迭代学习控制方法, Liu等[4]给出了时变奇异系统的扰动解耦反馈控制器. 基于前馈补偿思想, Tang等[5,6]提出了一种用于外部扰动抑制的前馈反馈最优控制器设计方法. 另一方面, 时滞系统最优控制的研究也是人们关注的热点问题之一[7,8]. 基于二次型性能指标的时滞系统最优控制问题将导致一个同时含时滞项和超前项的两点边值(TPBV)问题, 通常, 该问题的解析解是非常困难的. 因此, 人们通过研究其数值解法进而寻求系统的次优控制律, 其中, 逐次逼近法[9,10]和摄动法[11]就是两种非常有效的方法, 这两种方法只需要迭代求解向量微分方程, 计算量小, 收敛速度快, 是研究时滞系统和非线性系统最优控制的有力工具.

近年来, 时滞奇异摄动系统的分析与设计研究越来越受到人们的重视. Glizer分别讨论了含状态时滞的非标准奇异摄动系统的可控性问题[12]以及含状态和控制时滞的非标准奇异摄动系统的镇定问题[13], Fridman[14]研究了时滞对奇异摄动系统稳定性的影响, Glizer[15]给出了含小时滞的线性奇异摄动系统的H_∞控制算法. 目前, 关于无时滞奇异摄动

收稿日期: 2005−06−13; 收修改稿日期: 2006−03−14.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60574023); 山东省自然科学基金资助项目(Z2005G01); 青岛市自然科学基金资助项目(05-1-JC-94).

系统最优控制的研究, 已有不少的成果[16,17], 而受扰时滞奇异摄动系统优化控制方面的研究论文相对较少, 且多数是基于H_∞控制的[15].

本文研究标准的奇异摄动时滞线性系统在正弦扰动下的最优减振控制问题, 基于奇异摄动的快–慢分解理论[18], 将原最优控制问题分解为降阶的快慢两个子优化问题, 并分别设计最优控制律. 其中, 对时滞慢子系统, 采用参数摄动法和前馈补偿思想得到慢子系统的前馈反馈最优控制律, 进而结合快子系统的最优控制律, 得到了原系统的FFCC律.

2 问题的描述(Problem formulation)

考虑线性奇异摄动时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}z(t) + \\ \qquad A_{13}x(t-\tau) + B_1u(t) + Dv(t), \\ \varepsilon\dot{z}(t) = A_{21}x(t) + A_{22}z(t) + \\ \qquad A_{23}x(t-\tau) + B_2u(t),\ t>0, \\ x(t) = \varphi(t),\ -\tau \leqslant t \leqslant 0;\ z(0) = z_0. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$和$z \in \mathbb{R}^m$为状态向量, $u \in \mathbb{R}^r$为控制输入, τ和ε分别为正数时滞和正摄动参数, $v \in \mathbb{R}^p$为外部扰动, $A_{ij}, B_i(i=1,2; j=1,2,3)$及$D$是适当维数的矩阵, 并设$A_{22}$非奇异. $\varphi(t)$是已知的初始状态函数. 假设v可以表示为

$$v(t) = [\alpha_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1)\ \ \alpha_2\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \cdots \\ \alpha_p\sin(\omega_p t + \varphi_p)]^{\mathrm{T}}, \tag{2}$$

且扰动v可测量, 频率ω_i为已知.

选择无限时域二次型平均性能指标

$$J = \lim_{t_{\mathrm{f}}\to\infty}\frac{1}{t_{\mathrm{f}}}\int_0^{t_{\mathrm{f}}}\{\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} Q \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t)\end{bmatrix} + u(t)^{\mathrm{T}}Ru(t)\}\mathrm{d}t. \tag{3}$$

其中R和Q分别为适当维数的正定矩阵和半正定矩阵. 不失一般性, 假设$Q = \mathrm{diag}(Q_1, Q_3)$, 其中$Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$和$Q_3 \in \mathbb{R}^{m\times m}$分别为半正定矩阵. 系统的最优控制问题是寻找控制$u^*(t)$, 使$J$在约束(1)和(2)下取最小值.

由奇异摄动的快慢分解理论知, 最优控制问题(1)和(3)的慢子问题为

$$\begin{cases} \dot{x}_{\mathrm{s}}(t) = A_0x_{\mathrm{s}}(t) + A_3x_{\mathrm{s}}(t-\tau) + \\ \qquad B_0u_{\mathrm{s}}(t) + Dv(t),\ t>0, \\ x_{\mathrm{s}}(t) = \varphi(t),\ -\tau \leqslant t \leqslant 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$J_{\mathrm{s}} = \lim_{t_{\mathrm{f}}\to\infty}\frac{1}{t_{\mathrm{f}}}\int_0^{t_{\mathrm{f}}}[x_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}(t)Q_0x_{\mathrm{s}}(t) + \\ 2u_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}(t)D_{\mathrm{s}}x_{\mathrm{s}}(t) + u_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}(t)R_{\mathrm{s}}u_{\mathrm{s}}(t)]\mathrm{d}t. \tag{5}$$

其中:

$$\begin{cases} A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \\ A_3 = A_{13} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{23}, \\ B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2, \\ Q_0 = Q_1 + A_{21}^{\mathrm{T}}A_{22}^{-\mathrm{T}}Q_3A_{22}^{-1}A_{21}, \\ D_{\mathrm{s}} = B_2^{\mathrm{T}}A_{22}^{-\mathrm{T}}Q_3A_{22}^{-1}A_{21}, \\ R_{\mathrm{s}} = R + B_2^{\mathrm{T}}A_{22}^{-T}Q_3A_{22}^{-1}B_2. \end{cases} \tag{6}$$

快子问题为

$$\varepsilon\dot{z}_{\mathrm{f}}(t) = A_{22}z_{\mathrm{f}}(t) + B_2u_{\mathrm{f}}(t),\ z_{\mathrm{f}}(0) = z_0 - z_{\mathrm{s}}(0), \tag{7}$$

$$J_{\mathrm{f}} = \int_0^{\infty}[z_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}(t)Q_3z_{\mathrm{f}}(t) + u_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}(t)Ru_{\mathrm{f}}(t)]\mathrm{d}t. \tag{8}$$

式中$z_{\mathrm{s}}(t) = -A_{22}^{-1}[A_{21}x_{\mathrm{s}}(t) + A_{23}x_{\mathrm{s}}(t-\tau) + B_2u_{\mathrm{s}}(t)]$. 系统(7)关于(8)的最优控制律为

$$u_{\mathrm{f}}^*(t) = -R^{-1}B_2^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{f}}z_{\mathrm{f}}(t). \tag{9}$$

其中P_{f}为代数Riccati方程

$$A_{22}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{f}} + P_{\mathrm{f}}A_{22} - P_{\mathrm{f}}S_2P_{\mathrm{f}} + Q_3 = 0 \tag{10}$$

的唯一正定解, 其中$S_2 = B_2R^{-1}B_2^{\mathrm{T}}$.

慢子系统(4)关于性能指标(5)的最优控制律为

$$u_{\mathrm{s}}^*(t) = -R_{\mathrm{s}}^{-1}[D_{\mathrm{s}}x_{\mathrm{s}}(t) + B_0^{\mathrm{T}}\lambda_{\mathrm{s}}(t)]. \tag{11}$$

其中$\lambda_{\mathrm{s}}(t) \in \mathbb{R}^n$ 满足TPBV问题

$$\begin{cases} \dot{x}_{\mathrm{s}}(t) = A_{\mathrm{s}}x_{\mathrm{s}}(t) + A_3x_{\mathrm{s}}(t-\tau) - \\ \qquad S_0\lambda_{\mathrm{s}}(t) + Dv(t), \\ -\dot{\lambda}_{\mathrm{s}}(t) = Q_{\mathrm{s}}x_{\mathrm{s}}(t) + A_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}\lambda_{\mathrm{s}}(t) + d(t), \\ x_{\mathrm{s}}(t) = \varphi(t), -\tau \leqslant t \leqslant 0, \\ \lim\limits_{t_{\mathrm{f}}\to\infty}\lambda_{\mathrm{s}}(t_{\mathrm{f}}) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

式中:

$$d(t) = \begin{cases} A_3^{\mathrm{T}}\lambda_{\mathrm{s}}(t+\tau), 0 < t \leqslant t_{\mathrm{f}} - \tau, \\ 0, \qquad t_{\mathrm{f}} - \tau < t < t_{\mathrm{f}}, \end{cases} \tag{13}$$

$$S_0 = B_0R_{\mathrm{s}}^{-1}B_0^{\mathrm{T}},\ A_{\mathrm{s}} = A_0 - B_0R_{\mathrm{s}}^{-1}D_{\mathrm{s}}, \\ Q_{\mathrm{s}} = Q_0 - D_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}R_{\mathrm{s}}^{-1}D_{\mathrm{s}}.$$

若$\lambda_{\mathrm{s}}(t)$可解, 则$u_{\mathrm{s}}^*(t)$由(11)唯一确定. 进而, 结合$u_{\mathrm{f}}^*(t)$可以求出原系统(1)关于(3)的组合控制律$u_c(t)$. 然而, 由于TPBV问题(12)同时包含时滞项和超前项, 其解析解几乎是不可能的. 下面讨论其数值解法.

3 FFCC设计(Design of FFCC)

3.1 TPBV问题简化(Simplification of TPBV problem)

为简化TPBV问题(12), 引入摄动参数ζ, 构造关于ζ的新TPBV问题和相应的最优控制律:

$$\begin{cases}\dot{x}_{\rm s}(t,\zeta)=A_{\rm s}x_{\rm s}(t,\zeta)+\zeta A_3x_{\rm s}(t-\tau,\zeta)-\\ \qquad S_0\lambda_{\rm s}(t,\zeta)+Dv(t),\\ -\dot{\lambda}_{\rm s}(t,\zeta)=Q_{\rm s}x_{\rm s}(t,\zeta)+A_{\rm s}^{\rm T}\lambda_{\rm s}(t,\zeta)+\zeta d(t,\zeta),\\ x_{\rm s}(t,\zeta)=\varphi(t),\quad -\tau\leqslant t\leqslant 0,\\ \lim\limits_{t_{\rm f}\to\infty}\lambda_{\rm s}(t_{\rm f},\zeta)=0.\end{cases}\tag{14}$$

$$u_{\rm s}(t,\zeta)=-R_{\rm s}^{-1}[D_{\rm s}x_{\rm s}(t,\zeta)+B_0^{\rm T}\lambda_{\rm s}(t,\zeta)].\tag{15}$$

假设对任意的$\zeta\in[0,1]$, TPBV问题(14)的解一致存在. 显然, 当$\zeta=1$时, 最优控制律(15)即为慢子系统最优控制律(11). 假设$\alpha_{\rm s}(t,\zeta)$ 关于ζ在$\zeta=0$处无限可微, 其Maclaurin级数为

$$\alpha_{\rm s}(t,\zeta)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\zeta^i}{i!}\alpha_{\rm s}^{(i)}(t),\ \ \alpha_{\rm s}\in\{x_{\rm s},u_{\rm s},\lambda_{\rm s}\}.\tag{16}$$

其中$(\cdot)^{(i)}=\dfrac{\partial^i(\cdot)}{\partial\zeta^i}|_{\zeta=0}$. 在下面讨论中, 假设式(16)中的级数在$\zeta=1$处收敛. 当$\zeta=1$时, 最优控制律(11)可重写为

$$u_{\rm s}^*(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}u_{\rm s}^{(i)}(t).\tag{17}$$

将式(16)代入式(14) 和(15) , 比较ζ的同次幂系数, 容易得到

$$\begin{cases}\dot{x}_{\rm s}^{(i)}(t)=A_{\rm s}x_{\rm s}^{(i)}(t)+\delta^{(i)}(t)-S_0\lambda_{\rm s}^{(i)}(t)+\\ \qquad [1-{\rm sgn}\ i]Dv(t),\\ -\dot{\lambda}_{\rm s}^{(i)}(t)=Q_{\rm s}x_{\rm s}^{(i)}(t)+A_{\rm s}^{\rm T}\lambda_{\rm s}^{(i)}(t)+\sigma^{(i)}(t),\\ x_{\rm s}^{(i)}(t)=[1-{\rm sgn}\ i]\varphi(t),\ \tau\leqslant t\leqslant 0,\\ \lim\limits_{t_{\rm f}\to\infty}\lambda_{\rm s}^{(i)}(t_{\rm f})=0,\ i=0,1,2,\cdots,\end{cases}\tag{18}$$

和

$$u_{\rm s}^{(i)}(t)=-R_{\rm s}^{-1}[D_{\rm s}x_{\rm s}^{(i)}(t)+B_0^{\rm T}\lambda_{\rm s}^{(i)}(t)],\quad i=0,1,2,\cdots.\tag{19}$$

其中:

$$\begin{cases}{\rm sgn}\ i=\begin{cases}0,\ i=0,\\ 1,\ i=1,2,\cdots,\end{cases}\\ \delta^{(i)}(t)=\begin{cases}0, & i=0,\\ iA_3x_{\rm s}^{(i-1)}(t-\tau), & i=1,2,\cdots,\end{cases}\\ \sigma^{(i)}(t)=\begin{cases}0, & i=0,\ t>0,\\ iA_3^{\rm T}\lambda_{\rm s}^{(i-1)}(t+\tau), & i=1,2,\cdots,\\ & 0\leqslant t\leqslant t_{\rm f}-\tau;\\ 0, & i=1,2,\cdots,\\ & t_{\rm f}-\tau<t<t_{\rm f}.\end{cases}\end{cases}\tag{20}$$

基于上述变换, TPBV问题(12)转化为TPBV问题族(18). 显然, 该TPBV问题族可通过递推方法逐阶求解.

3.2 FFCC的近似设计(Approximation process of FFCC)

定理 1 考虑含正弦扰动的标准线性奇异摄动时滞系统(1)关于性能指标(3)的最优控制问题. 假设$(A_{22},B_2,Q_3^{1/2})$和$(A_0,B_0,Q_{\rm s}^{1/2})$均完全可控可观, 则系统的FFCC律由下式唯一确定:

$$u_c(t)=K_xx(t)+K_zz(t)+K_\tau x(t-\tau)+K_c[P_vv(t)+P_\omega v_\omega(t)+g^{(\infty)}(t)].\tag{21}$$

其中:

$$\begin{cases}K_z=-R^{-1}B_2^{\rm T}P_{\rm f},\\ K_\tau=K_zA_{22}^{-1}A_{23},\\ K_c=-(I_r+K_zA_{22}^{-1}B_2)R_{\rm s}^{-1}B_0^{\rm T},\\ K_x=K_zA_{22}^{-1}A_{21}-\\ \qquad (I_r+K_zA_{22}^{-1}B_2)R_{\rm s}^{-1}(D_{\rm s}+B_0^{\rm T}P_{\rm s}),\\ g^{(\infty)}(t)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{g^{(i)}(t)}{i!}.\end{cases}\tag{22}$$

$$v_\omega(t)=-\varOmega[v_1(t-\frac{\pi}{2\omega_1})\ \ v_2(t-\frac{\pi}{2\omega_2})\ \cdots\ v_p(t-\frac{\pi}{2\omega_p})]^{\rm T}.\tag{23}$$

式中: $\varOmega={\rm diag}(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_p)$, $I_r\in\mathbb{R}^{r\times r}$ 为单位矩阵, $P_{\rm f}$和$P_{\rm s}$分别为代数Riccati方程(10)和

$$A_{\rm s}^{\rm T}P_{\rm s}+P_{\rm s}A_{\rm s}-P_{\rm s}S_0P_{\rm s}+Q_{\rm s}=0\tag{24}$$

的唯一正定解; P_v 和P_ω为Sylvester矩阵方程

$$(A_{\rm s}^{\rm T}-P_{\rm s}S_0)^2P_v+P_v\varOmega^2+(A_{\rm s}^{\rm T}-P_{\rm s}S_0)P_{\rm s}D=0,\tag{25}$$

$$(A_{\rm s}^{\rm T}-P_{\rm s}S_0)^2P_\omega+P_\omega\varOmega^2+P_{\rm s}D\varOmega=0\tag{26}$$

的唯一解; $g^{(i)}(t)$ 满足共态向量微分方程

$$\begin{cases}\dot{g}^{(i)}(t)=(S_0P_{\rm s}-A_{\rm s})^{\rm T}g^{(i)}(t)-\\ \qquad iP_{\rm s}A_3x^{(i-1)}(t-\tau)-\sigma_0^{(i)}(t),\\ \lim\limits_{t_{\rm f}\to\infty}g^{(i)}(t_{\rm f})=0, i=1,2,\cdots,\\ g^{(0)}(t)=0,\ t\geqslant 0,\end{cases}\tag{27}$$

其中

$$\sigma_0^{(i)}(t)=\begin{cases}iA_3^{\rm T}[P_{\rm s}x^{(i-1)}(t+\tau)+g^{(i-1)}(t+\tau)],\\ \quad 0\leqslant t\leqslant t_{\rm f}-\tau,\\ 0,\ t_{\rm f}-\tau<t<t_{\rm f},\end{cases}\tag{28}$$

证 令

$$\lambda_{\rm s}^{(i)}(t)=P_{\rm s}x_{\rm s}^{(i)}(t)+[1-{\rm sgn}\ i][P_vv(t)+P_\omega v_\omega(t)]+g^{(i)}(t),\quad i=0,1,2,\cdots,\tag{29}$$

其中$g^{(i)}(t)\in\mathbb{R}^n$为共态向量, 且$g^{(0)}(t)\equiv 0$.

将式(29) 代入式(18) (19), 可以得到第i阶慢子系统的最优状态方程

$$\begin{cases}\dot{x}_{\rm s}^{(i)}(t)=(A_{\rm s}-S_0P_{\rm s})x_{\rm s}^{(i)}(t)+\delta^{(i)}(t)-S_0g^{(i)}(t)+\\ \qquad [1-{\rm sgn}\, i][(D-S_0P_v)v(t)-S_0P_\omega v_\omega(t)],\\ \qquad i=0,1,2,\cdots;\ t>0,\\ x_{\rm s}^{(i)}(t)=0,\ i=1,2,\cdots;\ -\tau\leqslant t\leqslant 0,\\ x_{\rm s}^{(0)}(t)=\varphi(t),\ -\tau\leqslant t\leqslant 0\end{cases} \tag{30}$$

及最优控制律

$$u_{\rm s}^{(i)}(t)=-R_{\rm s}^{-1}(D_{\rm s}+B_0^{\rm T}P_{\rm s})x_{\rm s}^{(i)}(t)-R_{\rm s}^{-1}B_0^{\rm T}g^{(i)}(t)-\\ [1-{\rm sgn}\, i]R_{\rm s}^{-1}B_0^{\rm T}[P_vv(t)+P_\omega v_\omega(t)],\\ i=0,1,2,\cdots. \tag{31}$$

式(29)两边关于t求导, 代入式(18)第2式, 并结合式(30)和关系式

$$\dot{v}(t)=-\varOmega v_\omega(t),\ \ \dot{v}_\omega(t)=\varOmega v(t), \tag{32}$$

容易得到Riccati方程(24), Sylvester方程(26)(26) 以及共态向量微分方程(27).

注意到$(A_0,B_0,Q_{\rm s}^{1/2})$完全可控可观, 故方程(24)有唯一正定解$P_{\rm s}$. 根据线性系统的调节器理论, 对任意的$\gamma\in\sigma(A_{\rm s}-S_0P_{\rm s})$, 有${\rm Re}\,\gamma<0$成立, 其中$\sigma(\cdot)$表示矩阵的谱; 另一方面, 考虑到对任意的$\mu\in\sigma(\varOmega^2)$, 有${\rm Re}\,\mu\geqslant 0$. 进一步容易证明, 对任意的$\lambda\in\sigma[(A_{\rm s}-S_0P_{\rm s})^2]$和$\mu\in\sigma(\varOmega^2)$, 不等式$\lambda+\mu\neq 0$成立. 于是, Sylvester矩阵方程(25)和(26)有唯一解P_v和P_ω.

当$P_{\rm s}$, P_v和P_ω确定后, 通过求解共态向量微分方程(27)得到共态向量$g^{(i)}(t)$. 进一步, 由式(16)(17) 和式(31), 即可得到慢子系统的最优控制律:

$$u_{\rm s}^*(t)=-R_{\rm s}^{-1}(D_{\rm s}+B_0^{\rm T}P_{\rm s})x_{\rm s}(t)-R_{\rm s}^{-1}B_0^{\rm T}[P_vv(t)+\\ P_\omega v_\omega(t)]-R_{\rm s}^{-1}B_0^{\rm T}g^{(\infty)}(t). \tag{33}$$

另一方面, 由于$(A_{22},B_2,Q_3^{1/2})$ 完全可控可观, Riccati方程(10)有唯一正定解$P_{\rm f}$. 于是, 由式(9) (33)可直接得到式(21) .

证毕.

注 1 FFCC律(21)中 的$K_c[P_vv(t)+P_\omega v_\omega(t)]$ 和$K_cg^{(\infty)}(t)$ 分别为前馈控制补偿项和时滞补偿项, 用于分别补偿外界正弦扰动和时滞对系统性能的影响. 特别的, 当$P_v=P_\omega=0$时, 可得系统的纯反馈组合控制(FCC)律:

$$u_c(t)=K_xx(t)+K_zz(t)+\\ K_\tau x(t-\tau)+K_cg^{(\infty)}(t). \tag{34}$$

当系统(1)中$A_{13}=0, A_{23}=0, D=0$时, FFCC律(21)即为文献[19]中的结论.

注 2 在实际工程设计中, FFCC律(21)中的$g^{(\infty)}(t)$几乎是不可能精确求出的. 通常, 通过截取级数的前M项和近似$g^{(\infty)}(t)$, 从而分别得到M阶的FFCC律和FCC律:

$$u_M(t)=K_xx(t)+K_zz(t)+K_\tau x(t-\tau)+\\ K_c[P_vv(t)+P_\omega v_\omega(t)+g_M(t)], \tag{35}$$

$$u_M(t)=K_xx(t)+K_zz(t)+\\ K_\tau x(t-\tau)+K_cg_M(t). \tag{36}$$

其中$g_M(t)=\sum\limits_{i=1}^{M}(g^{(i)}(t)/i!)$, M的选取可以根据一定的精度要求确定. 进一步, 易得FFCC律和FCC律的递推关系式分别为

$$\begin{cases}u_i(t)=u_{i-1}(t)+\dfrac{K_c}{i!}g^{(i)}(t),\ i=1,2,\cdots,M,\\ u_0(t)=K_xx(t)+K_zz(t)+K_\tau x(t-\tau)+\\ \qquad K_c[P_vv(t)+P_\omega v_\omega(t)].\end{cases} \tag{37}$$

和

$$\begin{cases}u_i(t)=u_{i-1}(t)+\dfrac{K_c}{i!}g^{(i)}(t),\ i=1,2,\cdots,M,\\ u_0(t)=K_xx(t)+K_zz(t)+K_\tau x(t-\tau).\end{cases} \tag{38}$$

3.3 有限时域(FFCC for finite-horizon)

对于有限时域情形, 选择性能指标

$$J=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x(t_{\rm f})\\ z(t_{\rm f})\end{bmatrix}^{\rm T}F\begin{bmatrix}x(t_{\rm f})\\ z(t_{\rm f})\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\int_0^{t_{\rm f}}(\begin{bmatrix}x(t)\\ z(t)\end{bmatrix}^{\rm T}\cdot\\ Q\begin{bmatrix}x(t)\\ z(t)\end{bmatrix}+u^{\rm T}(t)Ru(t)){\rm d}t. \tag{39}$$

其中F为半正定矩阵, 且$F={\rm diag}(F_1,\ F_3)$, $F_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $F_3\in\mathbb{R}^{m\times m}$. 类似于无限时域的情形, 我们不加证明地给出下面结论.

定理 2 含正弦扰动的线性时滞奇异摄动系统(1)关于性能指标(39)的FFCC律由下式唯一确定:

$$u_c(t)=K_x(t)x(t)+K_z(t)z(t)+\\ K_\tau(t)x(t-\tau)+K_c(t)[P_v(t)v(t)+\\ P_\omega(t)v_\omega(t)+g^{(\infty)}(t)]. \tag{40}$$

其中:

$$\begin{cases}K_z(t)=-R^{-1}B_2^{\rm T}P_{\rm f}(t),\\ K_\tau(t)=K_z(t)A_{22}^{-1}A_{23},\\ K_c(t)=-[I_r+K_z(t)A_{22}^{-1}B_2]R_{\rm s}^{-1}B_0^{\rm T},\\ K_x(t)=K_z(t)A_{22}^{-1}A_{21}-[I_r+K_z(t)A_{22}^{-1}B_2]\\ \qquad R_{\rm s}^{-1}[D_{\rm s}+B_0^{\rm T}P_{\rm s}(t)].\end{cases} \tag{41}$$

其中$P_{\rm f}(t)$和$P_{\rm s}(t)$分别为Riccati矩阵微分方程

$$\begin{cases}\dot P_{\rm f}(t)=P_{\rm f}(t)S_2P_{\rm f}(t)-A_{22}^{\rm T}P_{\rm f}(t)-P_{\rm f}(t)A_{22}-Q_3,\\ P_{\rm f}(t_{\rm f})=F_3\end{cases} \tag{42}$$

和

$$\begin{cases}\dot P_{\rm s}(t)=P_{\rm s}(t)S_0P_{\rm s}(t)-A_{\rm s}^{\rm T}P_{\rm s}(t)-P_{\rm s}(t)A_{\rm s}-Q_{\rm s},\\ P_{\rm s}(t_{\rm f})=F_0\end{cases} \tag{43}$$

的唯一半正定解, 式中$F_0=F_1+A_{21}^{\rm T}A_{22}^{-T}F_3A_{22}^{-1}A_{21}$; $P_v(t)$和$P_\omega(t)$满足下面矩阵微分方程:

$$\begin{cases}\dot P_v(t)=[P_{\rm s}(t)-S_0A_{\rm s}^{\rm T}]P_v(t)-\\ \qquad P_{\rm s}(t)D+P_\omega(t)\varOmega^2,\\ P_v(t_{\rm f})=0.\end{cases} \tag{44}$$

$$\begin{cases}\dot P_\omega(t)=[P_{\rm s}(t)S_0-A_{\rm s}^{\rm T}]P_\omega(t)-P_v(t),\\ P_\omega(t_{\rm f})=0.\end{cases} \tag{45}$$

共态向量$g^{(i)}(t)$满足

$$\begin{cases}\dot g^{(i)}(t)=[S_0P_{\rm s}(t)-A_{\rm s}]^{\rm T}g^{(i)}(t)-iP_{\rm s}(t)\\ \qquad A_3x^{(i-1)}(t-\tau)-\sigma_1^{(i)}(t),\\ g^{(i)}(t_{\rm f})=0,\ i=1,2,\cdots,\\ g^{(0)}(t)=0,\ t\geqslant 0.\end{cases} \tag{46}$$

其中

$$\sigma_1^{(i)}(t)=\begin{cases}iA_3^{\rm T}[P_{\rm s}(t+\tau)x^{(i-1)}(t+\tau)+\\ g^{(i-1)}(t+\tau)],\ 0\leqslant t\leqslant t_{\rm f}-\tau,\\ 0,\qquad t_{\rm f}-\tau<t<t_{\rm f},\end{cases} \tag{47}$$

且FFCC律的递推关系式为

$$\begin{cases}u_i(t)=u_{i-1}(t)+\dfrac{1}{i!}K_c(t)g^{(i)}(t),\ i=1,2,\cdots,\\ u_0(t)=K_x(t)x(t)+K_z(t)z(t)+K_\tau(t)x(t-\tau)+\\ \qquad K_c(t)[P_v(t)v(t)+P_\omega(t)v_\omega(t)].\end{cases} \tag{48}$$

4　仿真实例(Simulation examples)

考虑5阶线性奇异摄动时滞系统, 其中

$$\begin{cases}A_{11}=\begin{bmatrix}0&0\\4&-1\end{bmatrix},A_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\3.45&-5\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.8\end{bmatrix},\\ A_{21}=\begin{bmatrix}0&5.24\\0&2\end{bmatrix},A_{22}=\begin{bmatrix}4.65&2.62\\1&0\end{bmatrix},B_2=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&1\end{bmatrix},\\ D=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.2\end{bmatrix},A_{13}=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.8\end{bmatrix},A_{23}=\begin{bmatrix}0&0.6\\0.1&0\end{bmatrix},\\ \varphi(t)=[\,0.1\ 0\,]^{\rm T},-0.2\leqslant t\leqslant 0,\\ z(0)=[\,0\ 0\,]^{\rm T},\ \varepsilon=0.02.\end{cases} \tag{49}$$

正弦扰动和性能指标分别为

$$v(t)=[2\sin(\frac{4}{5}\pi t)\sin(\frac{3}{5}\pi t)]^{\rm T},\ t\geqslant 0. \tag{50}$$

$$J=\int_0^{50}\{\begin{bmatrix}x(t)\\z(t)\end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix}Q_1&0\\0&Q_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\z(t)\end{bmatrix}+u^{\rm T}(t)Ru(t)\}{\rm d}t. \tag{51}$$

其中

$$\begin{cases}Q_1=\begin{bmatrix}3&0\\0&5\end{bmatrix},\\ Q_3=\begin{bmatrix}5&0\\0&4\end{bmatrix},\\ R=\begin{bmatrix}3&0\\0&15\end{bmatrix}.\end{cases} \tag{52}$$

采用本文的方法得到的前馈反馈组合控制在不同迭代次数下的性能指标值J_i由表1给出.

表 1　不同迭代次数i对应的性能指标值J_i

Table 1　Cost functional values of the different iteration times

i	1	2	3	4
J_i	11.2153	11.1927	11.0301	11.0268

由表1可知, 性能指标值随着迭代次数i的增加而趋向于最优性能指标J^*. 令$\delta=0.001$, 则$|(J_4-J_3)/J_4|<\delta$, 于是, $u_4(t)$可视为系统的近似最优控制律. 图1、图2和图3分别给出了采用4阶FFCC律和FCC律时, 系统的慢状态变量x_1, x_2, 快状态变量z_1, z_2, 控制变量u_1, u_2的仿真结果, 其中, 实线和点线分别表示前馈反馈组合控制和纯反馈组合控制的控制结果. 从图1～3可以清楚地看到, 前馈–反馈组合控制对外界正弦扰动的鲁棒性明显优于反馈组合控制的情形.

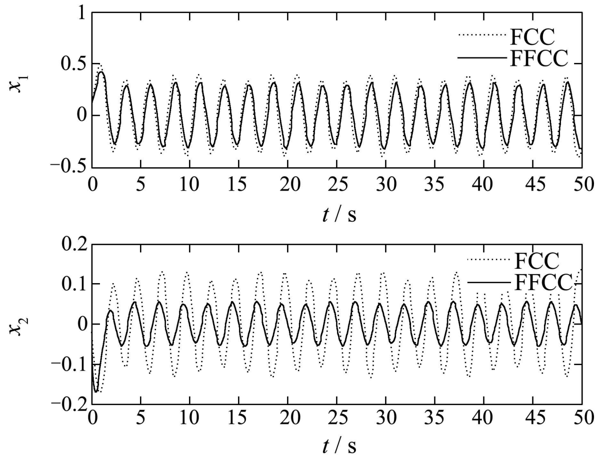

图 1　慢状态变量x_1, x_2的曲线

Fig. 1　Curves of the slow state variables x_1, x_2

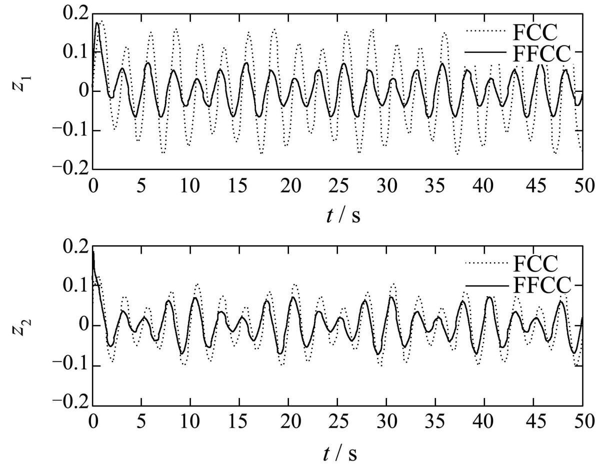

图 2 快状态变量z_1, z_2的曲线

Fig. 2 Curves of the fast state variables z_1, z_2

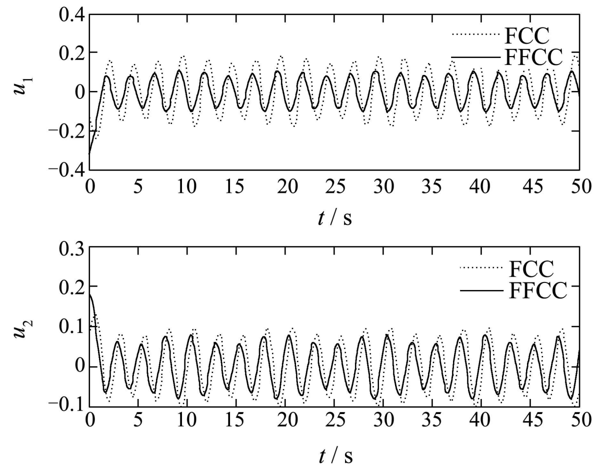

图 3 控制变量u_1, u_2的曲线

Fig. 3 Curves of the control variables u_1, u_2

5 结论(Conclusion)

本文利用摄动法, 研究了含正弦扰动的奇异摄动时滞系统的最优减振控制问题. 该算法通过引入摄动参数, 将求解既含超前项又含时滞项的两点边值问题转化为可解的线性非齐次微分方程的求解问题, 进而获得了系统的近似组合控制律. 该方法容易实现, 计算量小.

参考文献(References):

[1] WANG W, TANG G Y. Feedback and feedforward optimal control for offshore jacket platforms[J]. *China Ocean Engineering*, 2004, 18(4): 515 – 526.

[2] SACKS A, BODSON M, KHOSLA P. Experimental results of adaptive periodic disturbance cancellation in a high performance magnetic disk drive[J]. *ASME J of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1996, 118(3): 416 – 424.

[3] LEE J H, LEE K S, KIM W C. Model-based iterative learning control with a quadratic criterion for time-varying linear systems[J]. *Automatica*, 2000, 36(5): 641 – 657.

[4] LIU X, HO D W C. Disturbance decoupling of linear time-varying singular systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(2): 335 – 341.

[5] TANG G Y. Feedforward and feedback optimal control for linear systems with sinusoidal disturbances[J]. *High Technology Letters*, 2001, 17(4): 16 – 19.

[6] TANG G Y, ZHANG B L, MA H. Feedforward and feedback optimal control for linear discrete systems with persistent disturbances[C]// *Proc of the 8th Int Conf on Control, Automation, Robotics and Vision.* Kunming, China: IEEE Press, 2004, 1658 – 1663.

[7] CAI G P, HUANG J Z, YANG S X. An optimal control method for linear systems with time delay[J]. *Computers & Structures,* 2003, 81(15): 1539 – 1546.

[8] KOLMANOVSKY V, MAIZENBERG T L. Optimal control of continuous-time linear systems with time-varying, random delay[J]. *Systems & Control Letters,* 2001, 44(2): 119 – 126.

[9] TANG G Y. Suboptimal control for nonlinear systems: a successive approximation approach[J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(5): 429 – 434.

[10] TANG G-Y, WANG H-H. Successive approximation approach of optimal control for nonlinear discrete-time systems[J]. *Int J of Systems Science*, 2005, 36(3): 153 – 161.

[11] ZHAO X-H, TANG G-Y. Suboptimal control of linear discrete large-scale systems with state time-delay[C]// *Proc of the 4th Int Conf on Control and Automation.* Montreal, Canada: IEEE Press, 2003: 404 – 408.

[12] GLIZER V Y. Controllability of nonstandard singularly perturbed systems with small state delay[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(7): 1280 – 1285.

[13] GLIZER V Y. On stabilization of nonstandard singularly perturbed systems with small delays in state and control[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(6): 1012 – 1016.

[14] FRIDMAN E. Effects of small delays on stability of singularly perturbed systems[J]. *Automatica*, 2002, 38(5): 897 – 902.

[15] GLIZER V Y, FRIDMAN E. H_∞control of linear singularly perturbed systems with small state delay[J]. *J of Mathematical Analysis and Applications*, 2000, 250(1): 49 – 85.

[16] FRIDMAN E. A descriptor system approach to nonlinear singularly perturbed optimal control problem[J]. *Automatica,* 2001, 37(4): 543 – 549.

[17] BIDANI M, RADHY N E, BENSASSI B. Optimal control of discrete-time singularly perturbed systems[J]. *Int J Control*, 2002, 75(13): 955 – 966.

[18] CHOW J, KOKOTOVIC P. A decomposition of near-optimum regulators for the systems with slow and fast modes[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1976, 21(5): 701 – 705.

作者简介:

张宝琳 (1972—), 男, 中国海洋大学信息科学与工程学院攻读博士学位研究生, 主要研究方向为时滞系统、奇异摄动系统以及非线性系统的优化控制, E-mail: hiblzhang@gmail.com;

唐功友 (1953—), 男, 中国海洋大学信息科学与工程学院教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为时滞系统、非线性系统、网络控制系统以及大系统理论与应用等, E-mail: gtang@ouc.edu.cn.