

水平门限同积模型参数的拟极大似然估计

杨政¹, 田铮^{1,2}, 党怀义³

(1. 西北工业大学应用数学系, 陕西西安710072;

2. 中国科学院自动化研究所模式识别国家重点实验室, 北京100080;

3. 中国飞行试验研究院, 陕西西安710089)

摘要: 提出了用于非平稳非线性时间序列建模的水平门限同积模型, 给出了模型参数的拟极大似然估计. 由于对门限参数和同积向量似然函数既不可微也不光滑, 不能直接运用传统的极大似然估计. 因此首先利用遗传模拟退火算法估计门限参数和同积向量, 然后用极大似然估计计算其余的参数. 仿真结果表明, 拟极大似然估计不受模型维数限制具有有效性和可行性. 此外, 数值计算结果的比较分析表明遗传模拟退火优于传统的遗传算法、模拟退火和随机搜索等优化算法.

关键词: 水平门限; 同积模型; 拟似然估计; 遗传模拟退火

中图分类号: TP301.O212 **文献标识码:** A

Quasi-maximum likelihood estimation for level-threshold cointegration model

YANG Zheng¹, TIAN Zheng^{1,2}, DANG Huai-yi³

(1. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China;

2. National Key Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;

3. Chinese Flight Test Establishment, Xi'an Shaanxi 710089, China)

Abstract: A level-threshold cointegration model is proposed for modeling nonstationary and nonlinear time series. Firstly, the quasi-maximum likelihood estimation, combining genetic simulated annealing (GSA) and maximum likelihood estimation (MLE), is developed for the parameter estimation of the model. The log-likelihood function of level-threshold cointegration model is neither differentiable, nor smooth with respect to the threshold parameter and the cointegrating vector. The threshold parameter and the cointegrating vectors are thus estimated by GSA. The remainder parameters of the model are then computed based on MLE. Furthermore, simulation experiment demonstrates that the proposed method is valid and feasible for estimating the parameters of the large cointegrating system. Finally, numerical calculation results show that GSA outperforms random search, simulated annealing and genetic algorithm.

Key words: level threshold; cointegration model; quasi-maximum likelihood estimation; genetic simulated annealing

1 引言 (Introduction)

线性同积模型^[1]由Engle和Granger(获2003年度Nobel经济学奖)提出, 用来描述宏观经济中时间序列变量之间的均衡影响关系. 门限同积模型^[2]是一类扩展的非线性模型, 其特点是在不同的门限区域, 均衡关系对同积系统的影响由不同的调节向量所控制, 而同积向量在所有区域内保持不变. 关于门限同积模型的理论研究已经成熟, 而以门限同积模型为基础发展起来的广义门限同积模型^[3]还未得到研究. 为了研究广义门限同积模型的假设检验与统

计推断, 在文[2,3]的基础上本文提出一个过渡的新模型—水平门限同积模型, 并考虑该模型的参数估计问题.

众所周知, 线性同积模型的参数估计通常用最小二乘估计^[1]或极大似然估计(MLE)^[4]实现. 门限同积模型不能利用前两种方法, 因为似然函数中包含了不可微的参数. 为估计门限同积模型参数, 文[5]将格点搜索引入极大似然估计之中, 并称该方法为拟极大似然估计. 文[5]也指出超出两个以上的不可微参数时, 格点搜索的计算量太大难以实现, 从而限制

了拟极大似然估计在高维门限同积模型中应用。

水平门限同积模型具有比门限同积模型更复杂的模型结构, 似然函数关于不可微参数至少3个, 不能运用格点搜索进行估计. 为此, 为此, 本文提出用遗传模拟退火^[6](genetic simulated annealing, 简称GSA)与极大似然估计相结合的拟似然估计. 首先用GSA对不可微参数做估计, 然后用极大似然方法估计其余的参数. 为了研究GSA在参数估计中的性能, 本文采用了随机搜索(random search, 简称RS)、遗传算法^[7](genetic algorithm, 简称GA)和模拟退火^[8](simulated annealing, 简称SA)3种方法进行估计比较.

2 水平门限同积模型 (Level threshold cointegration model)

设 $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ 是 p 维的向量单位根过程, 它的每一个分量序列 $\{x_{in}\} (i = 1, 2, \dots, p)$ 都为单变量单位根过程, 即 $x_{in} \sim I(1)$. 如果存在一个 p 维的非零向量 β , 使得 $\{x_n\}$ 的线性组合 $\beta'x_n$ 成为一平稳过程, 即 $\beta'x_n \sim I(0)$, 则称 $\{x_n\}$ 同积, β 为其同积向量. 由 $\beta'x_n$ 产生的平稳过程是一个随机变量序列, 用 $\{z_n, n = 1, 2, \dots\}$ 表示, 称为均衡过程. 在同积模型的研究中, 常给出一个规范化性条件, 即令同积向量 β 的第一个元素为1.

定义水平门限同积模型如下:

$$\Delta x_n = \alpha(\beta + \delta 1\{\beta'x_{n-1} > \gamma\})'x_{n-1} + \sum_{i=1}^{l-1} \Gamma_i' \Delta x_{n-i} + u_n. \quad (1)$$

其中: $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$, β 和 δ 是 $p \times 1$ 维同积向量, α 为 $p \times 1$ 维的调节矩阵, γ 为1维的门限, l 为自回归阶数, $\Gamma_i (i = 1, \dots, l-1)$ 为 $p \times p$ 维的自回归系数矩阵; $\{u_n\}$ 为独立同分布的序列, 其均值为零, 协方差矩阵为 Ω ; $1\{\cdot\}$ 为示性函数.

在水平门限同积模型中, 均衡过程 $\{z_n\}$ 由门限参数分为两类. 当 $z_n \leq \gamma$ 时, 存在同积向量 β 使得 $\{z_n\}$ 平稳, 即 $z_n = \beta'x_n$; 当 $z_n > \gamma$ 时, 存在同积向量 $\beta + \delta$ 使得 $\{z_n\}$ 平稳, 即 $z_n = (\beta + \delta)'x_n$. 水平门限同积模型的特点是在不同的门限区域 x_n 有不同的同积向量, 从而使得 $\{z_n\}$ 在门限空间上是平稳的. 模型(1)中的非线性主要体现在示性函数中, 由门限参数确定了两个区域内不同的同积向量.

3 拟极大似然估计(Quasi-maximum likelihood estimation)

本节给出水平门限同积模型参数估计的拟极大似然估计问题. 把MLE和GSA结合使用的参数估计方法, 定义为水平门限同积模型的拟极大似然估计.

3.1 极大似然估计(Maximum likelihood estimation (MLE))

设 x_n 的样本量为 N , 则其Gauss似然函数为

$$L_N = -\frac{N}{2} \log |\Omega| - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N u_n' \Omega^{-1} u_n. \quad (2)$$

其中

$$u_n = \Delta x_n - \alpha(\beta + \delta 1\{\beta'x_{n-1} > \gamma\})'x_{n-1} - \sum_{i=1}^{l-1} \Gamma_i' \Delta x_{n-i}.$$

在式(2)中固定 β , δ 和 γ , 用似然函数对 α 和 $\Gamma_i (i = 1, \dots, l-1)$ 求导令其为零, 可得

$$\frac{\partial L_N}{\partial \alpha'} = \sum_{n=1}^N (\beta + \delta 1\{\beta'x_{n-1} > \gamma\})'x_{n-1} \hat{u}_n' \hat{\Omega}^{-1}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial L_N}{\partial \Gamma_i'} = \sum_{n=1}^N \Delta x_{n-i} \hat{u}_n' \hat{\Omega}^{-1} (i = 1, \dots, l-1), \quad (4)$$

以及

$$\hat{\Omega}(\beta, \delta, \gamma) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{u}_n(\beta, \delta, \gamma) \hat{u}_n(\beta, \delta, \gamma)'. \quad (5)$$

其中 $\hat{u}_n(\beta, \delta, \gamma) = u_n(\hat{\alpha}, \hat{\Gamma}_i, \beta, \delta, \gamma)$.

定义 Θ 为 β , δ 和 γ 构成的参数集, 令参数向量 $\theta = (\beta', \delta', \gamma)$. 为了从式(2)中求得 $\hat{\theta}$, 简化式(2)右端第2项有

$$L_N(\theta) = L_N(\hat{\alpha}(\theta), \hat{\Gamma}_i(\theta), \hat{\Omega}(\theta), \theta) = -\frac{N}{2} \log |\hat{\Omega}(\theta)| - \frac{Np}{2} \quad (6)$$

使得式(6)达到最大的 $(\hat{\alpha}, \hat{\Gamma}_i, \hat{\Omega}, \hat{\theta})$ 就是水平门限同积模型参数的极大似然估计.

在 $\hat{\theta}$ 已知的情况下, 由式(3)(4)和式(5)得到 $\hat{\alpha}$, $\hat{\Gamma}_i$ 和 $\hat{\Omega}$. 由于参数向量 θ 关于似然函数是不可微, 为此采用遗传模拟退火估计式(6)中的 $\hat{\theta}$.

3.2 遗传模拟退火(Genetic simulated annealing(GSA))

GSA是以GA为基础, 结合退火机制的一种混合算法. GSA的优点是继承了GA的平行搜索结构, 并采用SA的Metropolis接受准则保持种群的多样性, 克服了GA的早熟现象和SA收敛速度低的缺陷. 令目标函数 $\max F(\theta) = \max L_N(\theta)$, 采用实数编码, GSA的具体步骤如下:

步骤1 进化代数初始化: $g = 0$, 最大进化代数为 G ; 随机产生 M 个个体的初始种群 $P(0)$; 设置退火参数(包括初始温度 C_0 , 最大退火步数为 K);

步骤 2 利用目标函数评价种群 $P(g)$ 的个体适应度 $F_j = F(\theta_j) (j = 1, 2, \dots, M)$;

步骤 3 对种群 $P(g)$ 分两步进行遗传操作得到种群 $P'(g)$:

a) 交叉. 本文采用算术交叉法, 即由两个个体 θ_a^g, θ_b^g 线性组合产生新的个体 $\theta_a^{g+1}, \theta_b^{g+1}$,

$$\begin{cases} \theta_a^{g+1} = r\theta_a^g + (1-r)\theta_b^g, \\ \theta_b^{g+1} = r\theta_b^g + (1-r)\theta_a^g. \end{cases} \quad (7)$$

其中 r 为区间 $[0, 1]$ 上产生的均匀随机数.

b) 变异. 本文采用高斯变异法, 则新的个体 θ'_a 由下式确定:

$$\theta'_a = \theta_a + b\tau. \quad (8)$$

其中: τ 是一个正态分布的随机数, b 为系统参数, 决定随机扰动对进化代数的依赖程度.

步骤 4 对种群 $P'(g)$ 分 3 步进行模拟退火操作得到种群 $P''(g)$:

a) 在个体 $\theta'_j (j = 1, 2, \dots, M)$ 的邻域中产生新的可行解 θ''_j ;

b) 计算新个体适应度 $F(\theta''_j)$ 和旧个体适应度 $F(\theta'_j)$ 的差值 ΔF_j , 依概率 $\min\{1, \exp(-\Delta F_j/C_k)\} > r$ 接收新个体, 其中 r 为均匀随机数, C_k 为当前温度;

c) 令 $C_{k+1} = a * C_k, k \leftarrow k+1$, 其中 $a = 0.95$, 若满足抽样准则, 则本次退火过程结束; 否则转 a).

步骤 5 评价种群 $P''(g)$ 的个体适应度 $F_i = F(\theta''_j)$, 其中 $j = 1, \dots, M, i = j + M$;

步骤 6 复制: 从种群 $P(g)$ 和种群 $P''(g)$ 混合的 $2M$ 个个体中选择 M 个个体构成下一代种群 $P(g+1)$. 本文采用轮盘赌法复制种群, 个体被选中的概率 p_{is} 与其适应度 F_i 成正比,

$$p_{is} = F_i / \sum_{i=1}^{2M} F_i (i = 1, 2, \dots, 2M). \quad (9)$$

步骤 7 终止条件判断, 若 $g < G$, 则 $g \leftarrow g + 1$, 转到步骤 3 进行下一步进化过程; 若 $g = G$, 则输出当前最优个体, 算法结束.

在遗传模拟退火算法的进化过程中, 由于选择、交叉、变异等遗传操作的随机性, 有可能破坏当前群体中适应度最好的个体. 为此使用保优策略, 即当前群体中适应度最高的个体直接保留到下一代.

4 仿真实验和分析 (Simulation experiment and analysis)

仿真实验由模型(1)产生维数 $p = 3$ 的模拟数据 $\{x_t\}$, 设样本容量 $N = 250$. 首先由均值为零, 协方差 Ω 为单位阵的标准正态分布生成噪声序列 $\{u_t\}$, 然后利用设置的模型参数(见表 1 和表 2 的真值)产生模拟数据. 为简化仿真实验, 令 $\Gamma_i = 0 (i = 1, \dots, l-1)$. 由规范化条件已知 $\beta_1 = 1$ 和 $\delta_1 = 0$.

为了比较 GSA 的估计性能, 同时用 RS, SA 和 GA 估计门限参数和同积向量. 每种算法重复 10 次, 计算均值和标准差, 估计结果见表 1 (括号内为标准差). 估计门限参数和同积向量之后, 由式(3)和式(5)估计调节矩阵和协方差阵, 估计结果见表 2.

表 1 门限和同积向量的估计均值和标准差

Table 1 Mean value and standard error of the threshold and cointegrating vector

参数	真值	RS	SA	GA	GSA
$\hat{\gamma}$	0.0	-0.369 (0.406)	0.059 (0.278)	-0.123 (0.160)	-0.008 (0.088)
$\hat{\beta}_2$	-0.5	-0.530 (0.142)	-0.464 (0.113)	-0.483 (0.235)	-0.501 (0.035)
$\hat{\beta}_3$	-0.5	-0.097 (0.288)	-0.516 (0.320)	-0.508 (0.130)	-0.497 (0.054)
$\hat{\delta}_2$	0.2	-0.218 (0.172)	-0.047 (0.240)	0.175 (0.103)	0.190 (0.089)
$\hat{\delta}_3$	-0.5	-0.261 (0.273)	-0.077 (0.571)	-0.465 (0.103)	-0.479 (0.145)

表 1 的估计结果显示, 由 GSA 估计的参数均值更接近于真值, 同时 GSA 的标准差除 $\hat{\delta}_3$ 外均比其他 3 种算法的误差低. 其他 3 类估计方法的结果较差, 究其原因在于 GA 在搜索过程中容易早熟, 有时候收敛到局部最优; 而 RS 和 SA 容易受到初值

的影响. 而 GSA 综合了 SA 和 GA 的优点, 克服其缺点, 具有更强的优化估计能力. 表 2 是基于表 1 的估计结果, 由 MLE 估计得到的调节向量和协方差矩阵. 可以看到, 优化算法的性能直接影响到极大似然估计的估计结果. 基于 GSA 的估计值, 调节向量

和协方差阵的估计结果更接近于真实值。

为进一步说明4种优化算法在参数迭代估计中的具体变化,图1给出一次估计中似然函数值的收敛情况。图1横坐标为迭代次数 g ,纵坐标表示似然函数值 L_N 。从图1看到,在初始解相近的条件下,GSA寻找最大目标函数值的能力高于其他3种算

法,收敛到最大似然函数值。一个需要注意的地方是由GSA得到的 $L_N(-392.176)$ 比真实值 (-392.203) 还大,这是因为真实值由设定的参数计算得到,真实值接近最大的 L_N 但不一定就是最大的 L_N ,而用GSA估计是使似然函数值达到最大,因此得到的似然函数值稍大于真实值是完全有可能的。

表2 调节向量和协方差矩阵的极大似然估计

Table 2 Estimates of adjustment vector and coinvariance matrix by MLE

参数	真值	基于RS	基于SA	基于GA	基于GSA
$\hat{\alpha}_1$	-0.4	-0.404	-0.320	-0.446	-0.437
$\hat{\alpha}_2$	0.3	0.353	0.266	0.367	0.356
$\hat{\alpha}_3$	0.2	0.181	0.108	0.219	0.212
$\hat{\Omega}_{11}$	1.0	1.252	1.347	1.082	1.056
$\hat{\Omega}_{22}$	1.0	1.158	1.245	1.046	1.034
$\hat{\Omega}_{33}$	1.0	1.138	1.171	1.069	1.058
$\hat{\Omega}_{12}$	0.0	-0.061	-0.153	0.080	0.099
$\hat{\Omega}_{13}$	0.0	-0.178	-0.241	-0.050	-0.031
$\hat{\Omega}_{23}$	0.0	0.065	0.122	-0.034	-0.049

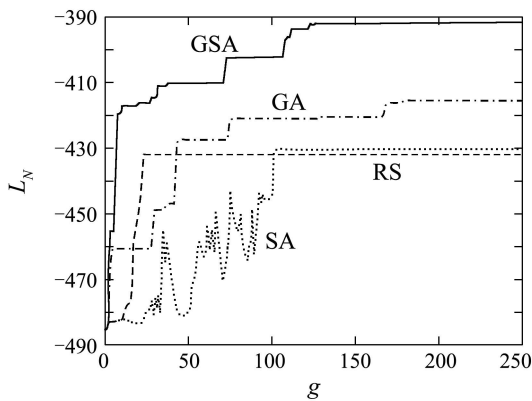


图1 L_N 的收敛性

Fig. 1 Convergence of L_N

5 结束语 (Conclusion)

本文提出了一类新的非线性时间序列模型—水平门限同积模型,并给出了由极大似然估计和遗传模拟退火相结合的参数拟极大似然估计。对似然函数不可微的门限参数和同积向量,用随机搜索,遗传算法,模拟退火和遗传模拟退火等4种优化算法进行估计比较。仿真结果表明,在给定的四种优化算法比较中,用遗传模拟退火和极大似然估计结合的拟极大似然估计具有更好的估计性能,其优点在于不受模型维数的限制,不受初始解的影响,估计误差更小,具有比较明显的有效性和可行性。

由于遗传模拟退火算法融合了遗传和退火两种机制,程序的控制参数较多,在编程过程中应针

对不同的问题背景设置相应的程序控制参数,才能充分发挥该算法的优化能力和高效性。在水平门限同积模型参数估计的基础上,模型的统计推断以及在实际中的应用将是下一步研究的内容。

参考文献 (References):

- [1] ENGLE R F, GRANGER C W J. Cointegration and error correction: representation, estimation and testing[J]. *Econometrica*, 1987, 55(2): 251 - 276.
- [2] BALKE N S, FOMBY T B. Threshold cointegration[J]. *Int Economic Review*, 1997, 38(3): 627 - 645.
- [3] De GOOIJER J G, VIDIELLA-i-ANGUERAN A. Forecasting threshold cointegrated systems[J]. *Int J of Forecasting*, 2003, 20(2): 237 - 253.
- [4] JOHANSEN S. Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models[J]. *Econometrica*, 1991, 59(6): 1551 - 1580.
- [5] HANSEN B, SEO B. Testing for two-regime threshold cointegration in vector error correction models[J]. *J of Econometrics*, 2002, 110(2): 293 - 318.
- [6] WONG K P, WONG Y W. Genetic and genetic/simulated-annealing approaches to economic dispatch[J]. *IEE Proceedings on Generation, Transmission and Distribution*, 1994, 141(5): 507 - 513.
- [7] 陈金山, 韦岗. 一种新的非线性回归模型参数估计算法[J]. *控制理论与应用*, 2001, 18(5): 808 - 810.
(CHEN Jinshan, WEI Gang. A new algorithm or estimation of parameter of nonlinear regression modeling[J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(5): 808 - 810.)
- [8] 张亮, 王凌, 郑大钟. 有限计算量下模拟退火算法的参数序优化[J]. *控制与决策*, 2004, 19(2): 226 - 229.
(ZHANG Liang, WANG Ling, ZHENG Dazhong. Parameter ordinal optimization for simulated annealing with limited computational efforts[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(2): 226 - 229.)

[5] 李果, 余达太. 电动车制动防抱死控制系统[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(1): 134 – 138.

(LI Guo, YU Dadai. Antilock brake fuzzy controller of electric vehicles[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(1): 134 – 138.)

作者简介:

李 果 (1963—), 男, 教授, 1996年北京理工大学博士后出站, 主要研究领域为机器人控制与规划、智能控制、工业过程控制和鲁

棒自适应控制等, E-mail: guo6396@sina.com

胡剑飞 (1978—), 男, 硕士生, 主要研究领域为智能控制、工业过程控制和鲁棒自适应控制等, E-mail: jianfei@sina.com;

余达太 (1946—), 男, 教授, 博士生导师, 日本九州工业大学研究生院毕业, 主要研究领域为控制理论、工业自动化及智能控制, E-mail: datai@sina.com.

(上接第302页)

作者简介:

杨 政 (1978—), 男, 西北工业大学应用数学系博士研究生, 主要研究非线性时间序列与动态数据处理, E-mail: yzeagle@yahoo.com.cn;

田 铮 (1948—), 女, 教授, 博士生导师, 主要从事非线性时间

序列分析、多尺度非线性随机模型、计算机视觉与图像处理等研究, E-mail: zhtian@nwpu.edu.cn;

党怀义 (1967—), 男, 中国飞行试验研究院测试技术研究所研究员, 主要从事飞行试验数据处理技术、飞行试验数据库技术及相关的应用软件技术研究, E-mail: hydang@sohu.com.

(上接第306页)

$$\begin{bmatrix} (A - H_1 C)^T P + P(A - H_1 C) & P(B - H_1 D) & P H_1 + C^T H_2^T W & C^T H_2^T W \\ (B - H_1 D)^T P & -\Gamma W & D^T H_2^T W & D^T H_2^T W \\ H_1^T P + W H_2 C & W H_2 D \delta I - W H_2 - H_2^T W - \gamma W & W - H_2^T W & \\ W H_2 C & W H_2 D W - W H_2 & -W & \end{bmatrix} < 0.$$

这就是定理2的结果.

作者简介:

缪银龙 (1979—), 男, 硕士研究生, 研究方向为鲁棒控制;

王景成 (1972—), 男, 上海交通大学自动化系教授, 研究方向为实时系统控制与仿真, E-mail: jcwang@sjtu.edu.cn;

吴 风 (1983—), 男, 硕士研究生, 研究方向为抗饱和控制.