

# 迭代学习控制器设计: 一种有限时间死区方法

孙明轩, 何熊熊, 俞立

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310032)

**摘要:** 提出系统不确定性项定常参数化和时变参数化情形下的控制器设计方法, 它允许初始位置任意设置且定位误差不要足够小. 在设计的控制器中, 采用有限时间死区技术, 以保证跟踪误差收敛到这种死区所确定的区域. 提出初始修正吸引子的概念, 构造的时变死区含这种初始修正吸引子, 以使得闭环系统在给定时间区间上可实现完全跟踪. 理论分析与仿真结果表明, 跟踪误差信号在一预先指定区间上收敛到零, 在起始区间段上被囿于死区所确定的区域中; 并保证闭环系统中所有信号是有界的.

**关键词:** 迭代学习控制; 初始条件问题; 有限时间收敛性; 死区

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Iterative learning controller designs: a finite time dead-zone approach

SUN Ming-xuan, HE Xiong-xiong, YU Li

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310032, China)

**Abstract:** The problem of iterative learning control in the presence of initial repositioning errors is addressed without assuming the bound on the repositioning errors to be small enough for the consideration of convergence. For the controller design, a finite time dead-zone approach is applied, where initial rectified attractor is introduced and adopted for constituting the dead-zone. It is also shown that all the signals in the closed-loop are bounded and the resultant tracking error lies within the confined dead-zone, by which the complete tracking over a pre-specified time-interval is achieved. Finally, the effectiveness of the proposed method is verified through theoretical and numerical results for systems with both unknown time-invariant and time-varying parameters.

**Key words:** iterative learning control; initial condition problem; finite time convergence; dead-zone

### 1 引言(Introduction)

实际中, 许多装备、机器、过程、系统完成有限作业区间任务. 这种任务要求跟踪误差在有限时间区间上一致为零, 即

$$e(t) = 0, t \in [0, T],$$

称其为完全跟踪问题. 由于整个响应没有常规意义上的瞬态过程, 它不同于渐近跟踪问题(当时间趋于无穷时, 跟踪误差趋于零). 大多控制方法适于解决渐近跟踪问题. 当它们用于完全跟踪时, 需去除瞬态过程段. 迭代学习控制(ILC)是针对完全跟踪问题而提出的, 适于有限时间区间上完成重复操作任务的受控对象<sup>[1~3]</sup>. 采用这种控制技术, 重复操作中的不随迭代次数变化的确定性干扰可以得到完全补偿, 系统动力学中的不确定性得以克服, 从而实现完全跟踪. ILC最大特点是, 跟踪性能会随迭代逐步改善. 因此, 它被认为是一种可实现精确控制的控制技术.

由于是迭代操作, 在每一次重复操作前ILC需要进行初始定位操作. 它通常要求迭代初态与期望初态一致的初始定位条件, 即

$$\text{IC1) } x_k(0) = x_d(0), k = 0, 1, 2, \dots$$

然而, 由于系统重复定位精度的限制, 实际的初始定位操作存在定位误差. 即

$$\text{IC2) } \|x_d(0) - x_k(0)\| \leq \varepsilon_0, k = 0, 1, 2, \dots$$

在IC2)下, 文 [4]发现初始定位误差会导致P型学习算法发散. 这里的P型学习律是指对于相对阶为一的动态系统, 仅应用输出误差构造学习律或对于状态跟踪对象, 仅使用状态误差构造学习律<sup>[5,6]</sup>. 在P型学习算法中引入遗忘因子可保证这类算法关于初始定位误差的鲁棒性. 这类鲁棒学习控制使得跟踪误差收敛到原点的某邻域内, 邻域半径正比于初始定位误差的界. 这样, 欲提高跟踪性能只能寄望于初始

定位精度. 近年来, 初始定位误差对于系统跟踪性能的影响引起人们的关注. 重复定位方法可以回避初始定位误差问题<sup>[7~9]</sup>, 但该方法不适用于一些无法实现重复定位的受控对象. 文[10]以死区修正克服定位误差的影响, 使得跟踪误差收敛到由死区定义的区域. 文[11,12]分别讨论初始位置固定、任意设定情形. 提出的学习算法使得系统在重复作业方式下输出误差渐近收敛到零, 即实现渐近跟踪. 反馈控制也可实现渐近跟踪, 且不需要迭代. 因此, 在实现完全跟踪的意义下, 放宽初始定位要求的做法是更有意义的.

人们乐于看到的常规控制技术难于达到, 而ILC能够达到的令人耳目一新的控制品质. 例如, 如下的实际完全跟踪问题

$$e(t) = 0, t \in [\Delta, T],$$

其中 $\Delta > 0$ 可预先指定. 对于迭代初态固定的情形, 文[13, 14]提出的带初始修正的学习算法可在给定区间上实现这种实际完全跟踪. 本文研究存在任意初始定位误差时(IC2)下的学习控制. 通过对系统不确定性项分别进行定常参数化和时变参数化, 引进初始修正吸引子的概念, 并用于构造有限时间死区. 提出周期学习及迭代学习方法, 实现系统在指定区间上的实际完全跟踪.

## 2 初始修正吸引子(Initial rectified attractors)

考虑如下线性系统

$$\dot{\varepsilon} = a\varepsilon, \quad \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0, \quad (1)$$

式中:  $a < 0$  是一定常参数,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  是系统状态. 它的解可写成

$$\varepsilon(t) = e^{a(t-t_0)}\varepsilon_0. \quad (2)$$

因为 $a < 0$ ,  $\varepsilon = 0$  为系统的吸引子. 该吸引子是唯一的. 对于非零 $\varepsilon_0$ , 只有 $t \rightarrow \infty$  系统状态才能收敛到该吸引子, 不可能在有限时间达到.

**定义 1**<sup>[15]</sup> 称 $\varepsilon = 0$  为一初始修正吸引子, 如果

$$\dot{\varepsilon} = a\varepsilon - \zeta(t-t_0)e^{a(t-t_0)}\varepsilon(t_0), \quad \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0, \quad (3)$$

式中 $\zeta$ -函数满足

$$\begin{cases} \zeta(t) = 0, t_1 \leq t \leq t_0, \\ \int_{t_0}^{t_1} \zeta(s)ds = 1. \end{cases}$$

为了表达方便, 文中记式(3)的右端为 $b(\varepsilon)$ . 由于与初态有关, 称式(3)右端的第2项为初始修正作用. 正是由于初始修正作用的引入, 使得 $\varepsilon(t) = 0, t \geq t_1$ , 且

$$\varepsilon(t) = (1 - \int_{t_0}^t \zeta(s-t_0)ds)e^{a(t-t_0)}\varepsilon_0, \quad t_0 \leq t < t_1. \quad (4)$$

这样, 初始修正吸引子具有有限时间收敛性. 考虑 $t_1$ 时刻的光滑对接, 即 $\varepsilon$ 在 $t_1$ 时刻的连续性. 由式(4)知

$$\dot{\varepsilon}(t) = (1 - \int_{t_0}^t \zeta(s-t_0)ds)e^{a(t-t_0)}a\varepsilon_0 - \zeta(t-t_0)e^{a(t-t_0)}\varepsilon_0.$$

由 $\zeta$ -函数的定义知,  $\zeta(t_1) = 0$ , 且使得 $\dot{\varepsilon}(t_1) = 0$ . 因此,  $t_1$ 时刻的光滑对接取决于 $\zeta$ -函数的连续性.

下面给出3种可供选用的 $\zeta$ -函数<sup>[15]</sup>:

$$\zeta_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0, \\ \frac{1}{t_1 - t_0}, & t \in (t_0, t_1), \\ 0, & t \geq t_1, \end{cases} \quad (5)$$

$$\zeta_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0, \\ \frac{\pi}{2} \frac{1}{t_1 - t_0} \sin(\pi \frac{t-t_0}{t_1-t_0}), & t \in (t_0, t_1), \\ 0, & t \geq t_1, \end{cases} \quad (6)$$

以及

$$\zeta_3(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0, \\ \frac{4(t-t_0)}{(t_1-t_0)^2}, & t \in (t_0, (t_1+t_0)/2), \\ \frac{4(t_1-t)}{(t_1-t_0)^2}, & t \in [(t_1+t_0)/2, t_1], \\ 0, & t \geq t_1, \end{cases} \quad (7)$$

可以看出,  $\zeta_1$ 在 $t_1$ 处不连续, 而 $\zeta_2$ 和 $\zeta_3$ 在 $t_1$ 处均连续, 二者可保证 $\varepsilon$ 在 $t_1$ 处光滑连接.

## 3 周期学习(Periodic learning)

这一节给出定常参数化情形下的一类动态系统的学习控制器设计及相应闭环系统的性能分析. 考虑下述动态系统

$$\dot{x} = g(\varphi^T(x, t)\theta + u), \quad (8)$$

式中:  $x$  是系统状态,  $u$  为系统的控制输入;  $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  是未知定常参数向量,  $\varphi(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  是相应的已知非线性函数向量;  $g$  是一未知定常参数. 不失一般性, 文中假设 $g > 0$ . 为了突出控制器设计方法及其比较, 首先考虑如系统(8)所示的定常参数化情形. 在第4节, 考虑时变参数化情形下的动态系统. 假设系统在区间 $[0, T]$ 上完成重复作业,  $k$ 记重复次数. 对于给定的期望轨迹 $x_d(t), t \in [0, T]$ , 本文的控制任务是在相当大初始定位误差条件下, 设计学习控制器使得当 $k \rightarrow \infty$ 时, 在给定区间 $[\Delta, T]$ 上,  $x_k(t) \rightarrow x_d(t)$ , 其中 $0 < \Delta < T$ .

**假设 1** 系统迭代初态满足  $|x_d(0) - x_k(0)| < \varepsilon_0, \forall k$ .

在文中提出的学习控制方法中, 要求  $\varepsilon_0 (> 0)$  已知, 但不要求它足够小. 这与通常分析学习控制算法的鲁棒性时所做的假设是不同的<sup>[13]</sup>. 为了控制器设计需要, 引入以下两函数:

**定义 2** 含死区的符号函数  $\varsigma_\varepsilon(e)$  定义为

$$\varsigma_\varepsilon(e) = \begin{cases} \operatorname{sgn} e, & \text{if } |e| \geq \varepsilon, \\ 0, & \text{if } |e| < \varepsilon. \end{cases} \quad (9)$$

**定义 3** 区间示性函数  $\iota_\varepsilon(e)$  定义为

$$\iota_\varepsilon(e) = \begin{cases} 1, & \text{if } |e| \geq \varepsilon, \\ 0, & \text{if } |e| < \varepsilon. \end{cases} \quad (10)$$

以上两函数具有以下性质:

- 1)  $\iota_\varepsilon(e)\varsigma_\varepsilon(e) = \varsigma_\varepsilon(e)$ ; 2)  $\varsigma_\varepsilon(e)\iota_\varepsilon(e) = \iota_\varepsilon(e)$ ;
- 3)  $\iota_\varepsilon(e)\iota_\varepsilon(e) = \iota_\varepsilon(e)$ ; 4)  $\iota_\varepsilon(e)(|e| - \varepsilon)^2 \in C^1$ .

定义  $e_k = x_d - x_k$  为跟踪误差, 且  $e_{\varepsilon,k} = |e_k| - \varepsilon$ ,  $p = [1/g, \theta^T]^T$ ,  $\psi(x_k(t), t) = [\varsigma_\varepsilon(e_k(t))b(\varepsilon(t)) - \dot{x}_d(t), \varphi^T(x_k(t), t)]^T$ . 为了表达简便, 记  $\iota_{\varepsilon,k}(t) = \iota_\varepsilon(e_k(t))$ ,  $\varsigma_{\varepsilon,k}(t) = \varsigma_\varepsilon(e_k(t))$ ,  $\psi_k(t) = \psi(x_k(t), t)$ . 参数估计误差定义为  $\tilde{p}_k = p - \hat{p}_k$ ,  $\hat{p}_k$  为  $p$  在第  $k$  次迭代时的估计. 针对定常参数化情形下的系统(8), 提出反馈控制律

$$u_k = c\varsigma_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k} - \psi_k^T \hat{p}_k, \quad (11)$$

$\hat{p}_k$  由下述周期修正律给出:

$$\dot{\hat{p}}_k = -\gamma\varsigma_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}\psi_k, \quad (12)$$

$$\hat{p}_k(0) = \hat{p}_{k-1}(T), \hat{p}_{-1}(T) = 0, \quad (13)$$

$c, \gamma > 0$  为两可调参数.

控制器中未直接使用跟踪误差本身, 而是使用引入时变死区的信号  $e_{\varepsilon,k}$ ,  $\varepsilon$  由上一节给出.  $p$  是定常参数, 故满足  $T$ -周期性. 笔者将证明, 只要每次迭代时参数估值的初值按式(13)周期地设置, 定常参数化  $p$  的估计可采用微分学习律(12). 与迭代学习控制的原始提法不同, 这里  $\hat{p}_k$  可随时调整, 而不是每次迭代完了才进行调整.

**假设 2** 选取  $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ , 即下式成立:

$$|x_d(0) - x_k(0)| < \varepsilon(0).$$

为分析闭环系统的稳定性与收敛性, 选取非负函数

$$L_k(t) = V_k(t) + \frac{1}{2\gamma} \tilde{p}_k^T(t) \tilde{p}_k(t), \quad (14)$$

$$V_k(t) = \frac{1}{2g} \iota_{\varepsilon,k}(t) e_{\varepsilon,k}^2(t). \quad (15)$$

**注 1** 在提出的控制算法中, 使用了时变死区, 其边界由上节定义的  $\varepsilon$  界定, 其初始值满足假设2. 依据假设2,  $|e_k(0)| < \varepsilon(0)$ . 这样,  $\iota_{\varepsilon,k}(0) = 0$ . 进一步地, 有

$$V_k(0) = 0.$$

在给出分析结果之前, 需先给出  $L_k - L_{k-1}$  的一些性质.

**引理 1** 在假设1及假设2下, 若系统(8)采用反馈控制律(11)和参数周期修正律(12), 则有如下等式成立

$$\begin{aligned} L_k(t) - L_{k-1}(t) = & -V_{k-1}(t) - \int_0^t c\iota_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}^2 ds + \frac{1}{2\gamma} \tilde{p}_k^T(0) \tilde{p}_k(0) - \\ & \frac{1}{2\gamma} \tilde{p}_{k-1}^T(t) \tilde{p}_{k-1}(t). \end{aligned} \quad (16)$$

当  $t = T$  时,

$$L_k(T) - L_{k-1}(T) = -V_{k-1}(T) - \int_0^T c\iota_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}^2 ds. \quad (17)$$

**证** 在式(16)中, 置  $t = T$ , 并应用条件(13), 可得式(17). 因此, 只需证明式(16)成立. 由跟踪误差的定义, 系统误差方程可写成

$$\dot{e}_k = \dot{x}_d - g(\varphi^T(x_k, t)\theta + u_k). \quad (18)$$

沿式(18)的解轨迹函数  $V_k$  关于时间的导数为

$$\dot{V}_k = -\varsigma_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}(\psi_k^T p + u_k).$$

应用反馈控制律(11), 可得

$$\dot{V}_k = -c\iota_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}^2 - \varsigma_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}\psi_k^T \tilde{p}_k. \quad (19)$$

从注1知,  $V_k(0) = 0$ . 因此, 由0到  $t$  积分式(19)两端得

$$V_k(t) = -\int_0^t c\iota_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}^2 ds - \int_0^t \varsigma_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}\psi_k^T \tilde{p}_k ds. \quad (20)$$

考查  $L_k - L_{k-1}$ . 由  $L_k$  的定义(14)知

$$L_k - L_{k-1} = V_k - V_{k-1} + \frac{1}{2\gamma} (\tilde{p}_k^T \tilde{p}_k - \tilde{p}_{k-1}^T \tilde{p}_{k-1}). \quad (21)$$

将式(20)代入式(21), 并利用

$$\tilde{p}_k^T(t) \tilde{p}_k(t) = \tilde{p}_k^T(0) \tilde{p}_k(0) - 2 \int_0^t \dot{\tilde{p}}_k^T \tilde{p}_k ds. \quad (22)$$

式(21)可写成

$$\begin{aligned} L_k(t) - L_{k-1}(t) = & -V_{k-1}(t) - \int_0^t c\iota_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}^2 ds - \int_0^t \varsigma_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}\psi_k^T \tilde{p}_k ds - \\ & \frac{1}{\gamma} \int_0^t \dot{\tilde{p}}_k^T \tilde{p}_k ds + \frac{1}{2\gamma} \tilde{p}_k^T(0) \tilde{p}_k(0) - \frac{1}{2\gamma} \tilde{p}_{k-1}^T(t) \tilde{p}_{k-1}(t). \end{aligned}$$

这时, 代入学习律(12), 即证得(16). **证毕.**

**定理 1** 若对于满足假设1及假设2的系统(8), 施加反馈控制律(11), 未知参数估计采用参数周期修正律(12), 则闭环系统中所有信号在区间  $[0, T]$  上关于  $k$  有界. 并且, 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\forall \varepsilon \in [0, T]$ ,  $e_k(t)$  收敛于  $[-\varepsilon(t), \varepsilon(t)]$ , 其中  $\varepsilon(t)$  由定义1给出.

**证** 首先证明闭环系统中所有信号的有界性. 由式(17)知,  $L_k(T) \leq L_{k-1}(T) \leq \dots \leq L_1(T) \leq$

$L_0(T)$ . 因此,  $L_k(T)$  为一非增序列, 其有界性取决于  $L_0(T)$  的有界性. 由  $L_k$  的定义(式(11))以及学习律(12), 易知

$$\dot{L}_0 = \dot{V}_0 + \varsigma_{\varepsilon,0} e_{\varepsilon,0} \psi_0^T \tilde{p}_0 = -c \iota_{\varepsilon,0} e_{\varepsilon,0}^2 \leq 0. \quad (23)$$

另外, 由于  $L_0(0) = V_0(0) + \frac{1}{2\gamma} p^T p$ , 故  $L_0(T)$  有界.  $L_k(T)$  也因此有界, 且  $\hat{\theta}_k(T)$  有界.

由式(16)知

$$L_k - L_{k-1} \leq -V_{k-1} + \frac{1}{2\gamma} \tilde{p}_k^T(0) \tilde{p}_k(0) - \frac{1}{2\gamma} \tilde{p}_{k-1}^T \tilde{p}_{k-1}.$$

因此

$$L_k \leq L_{k-1} - V_{k-1} + \frac{1}{2\gamma} \tilde{p}_k^T(0) \tilde{p}_k(0) - \frac{1}{2\gamma} \tilde{p}_{k-1}^T \tilde{p}_{k-1}.$$

由于  $L_k - V_k = \frac{1}{2\gamma} \tilde{p}_k^T \tilde{p}_k$ , 有

$$L_k \leq \frac{1}{2\gamma} \tilde{p}_k^T(0) \tilde{p}_k(0) = \frac{1}{2\gamma} \tilde{p}_{k-1}^T(T) \tilde{p}_{k-1}(T). \quad (24)$$

式(24)表明,  $\hat{p}_k(T)$  的有界性蕴涵  $L_k(t)$  的有界性. 进一步地, 由  $V_k$  的定义知,  $e_k$  及  $x_k$  有界. 由式(12)知,  $\dot{p}_k$  有界. 因为  $p_k(t) = p_k(0) + \int_0^t \dot{p}_k ds = p_{k-1}(T) + \int_0^t \dot{p}_k ds$ , 所以,  $\hat{p}_k$  有界. 由式(11)的右端各项的有界性可推知  $u_k$  有界.

现在证明跟踪误差的收敛性. 仍利用式(17)得

$$L_k(T) - L_{k-1}(T) \leq - \int_0^T c \iota_{\varepsilon,k} e_{\varepsilon,k}^2 ds. \quad (25)$$

令式(25)中  $k = 1, 2, \dots, K$  并求和

$$\sum_{i=1}^K \int_0^T c \iota_{\varepsilon,i} e_{\varepsilon,i}^2 ds \leq L_0(T) - L_K(T) \leq L_0(T).$$

由于  $L_0(T)$  有界, 故  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \iota_{\varepsilon,k} e_{\varepsilon,k}^2 ds = 0$ .

另外, 考查被积函数  $\iota_{\varepsilon,k} e_{\varepsilon,k}^2$  的导数知

$$\frac{d}{dt} \iota_{\varepsilon,k} e_{\varepsilon,k}^2 = 2 \iota_{\varepsilon,k} e_{\varepsilon,k} (\varsigma_{\varepsilon,k} \dot{e}_{\varepsilon,k} - \dot{\varepsilon}). \quad (26)$$

为保证该导数有界, 需知  $\dot{e}_k$  的有界性. 从式(18)可以看出, 其右端均为有界量, 故  $\dot{e}_k$  有界. 进一步地, 由式(26)知,  $\iota_{\varepsilon,k} e_{\varepsilon,k}^2$  关于所有  $k$  在  $[0, T]$  上一致有界, 由此推知其等度连续. 因此,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \iota_{\varepsilon,k}(t) e_{\varepsilon,k}^2(t) = 0, \forall t \in [0, T]$ . 证毕.

**注 2** 由  $\varepsilon$  的定义知, 当  $t \geq \Delta$  时,  $\varepsilon(t) = 0$ . 因此,  $e_k(t)$  收敛至区间  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  意味着  $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) \rightarrow 0, t \in [\Delta, T]$ . 而且,  $e_k(t)$  在区间  $[0, \Delta]$  上的动态行为也围于  $\varepsilon$  的变化范围. 因此, 尽管初始定位是任意设定的(满足假设1), 本文提出的学习控制方法可以保证在一预先指定区间上的完全跟踪. 本文引入的初始吸引子概念(即引入由定义1给出的  $\varepsilon$ ) 在保证这种收敛性方面起着关键作用.

## 4 迭代学习(Iterative learning)

迭代学习为含(非缓变)时变参数的实际系统提供了一种控制器设计方法. 在这一节, 考虑下述时变参数化表示的一类动态系统

$$\dot{x}(t) = g(t)(\varphi^T(x, t)\theta(t) + u(t)). \quad (27)$$

式中:  $x$  是系统状态,  $u$  为系统的控制输入,  $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  是未知时变参数向量,  $\varphi \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  是相应的已知非线性函数向量.  $g$  是一未知时变参数. 不失一般性, 文中假设  $g > 0$ .

笔者提出下述反馈控制律

$$u_k = c \varsigma_{\varepsilon,k} e_{\varepsilon,k} - \psi_k^T \hat{p}_k \quad (28)$$

及迭代修正律

$$\begin{cases} \hat{p}_k = \text{sat}(\hat{p}_{k-1}) - \gamma \varsigma_{\varepsilon,k} e_{\varepsilon,k} \psi_k, & k=0, 1, 2, \dots, \\ \hat{p}_{-1} = 0. \end{cases} \quad (29)$$

式中:  $c, \gamma > 0, p = [\frac{1}{g}, \frac{\dot{g}}{2g^2}, \theta^T]^T, \psi(x_k(t), t) = [\varsigma_{\varepsilon,k}(t)b(\varepsilon(t)) - \dot{x}_d(t), \varsigma_{\varepsilon,k}(t)e_{\varepsilon,k}(t), \varphi^T(x_k(t), t)]^T, \hat{p}_k$  为时变参数  $p$  的估计. 记  $\tilde{p}_k(t) = p(t) - \hat{p}_k(t)$ .  $\text{sat}$  为饱和函数<sup>[8]</sup>. 这里假设  $p$  处在限幅范围内. 为了表达简便, 仍沿用  $e_{\varepsilon,k}, \iota_{\varepsilon,k}, \varsigma_{\varepsilon,k}, \psi_k$  的记法.

**注 3** 使用带部分饱和和限幅的迭代学习律, 其目的是为了证明参数估值的有界性. 但估值的变化范围不能事先确定. 为了使得参数估值围于预定范围, 也可以采用完全饱和和限幅的迭代学习律.

选取非负函数

$$L_k(t) = V_k(t) + \frac{1}{2\gamma} \int_0^t \tilde{p}_k^T \tilde{p}_k ds, \quad (30)$$

$$V_k(t) = \frac{1}{2g} \iota_{\varepsilon,k}(t) e_{\varepsilon,k}^2(t). \quad (31)$$

为了处理时变参数的估计问题, 在  $L_k$  中, 需引入参数估计误差平方和的积分项, 而不是其本身(与式(14)相比较).  $V_k$  在形式上与式(15)相同. 因此, 在假设2下, 仍有  $V_k(0) = 0$ .

**引理 2** 在假设1及假设2下, 若时变参数化系统(27), 采用反馈控制(28)和参数迭代修正律(29), 则有以下不等式成立

$$L_k(t) - L_{k-1}(t) \leq -V_{k-1}(t) - \int_0^t c \iota_{\varepsilon,k} e_{\varepsilon,k}^2 ds - \frac{\gamma}{2} \int_0^t \iota_{\varepsilon,k} e_{\varepsilon,k}^2 \psi_k^T \psi_k ds. \quad (32)$$

证 对于系统(27), 其误差方程可写为

$$\dot{e}_k(t) = \dot{x}_d(t) - g(t)(\varphi^T(x_k, t)\theta(t) + u_k(t)). \quad (33)$$

$V_k$  沿(33)的导数为

$$\dot{V}_k = -\varsigma_{\varepsilon,k} e_{\varepsilon,k} (\psi_k^T p + u_k), \quad (34)$$

应用反馈控制律(28), 式(34)可写成

$$\dot{V}_k = -c\iota_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}^2 - \varsigma_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}\psi_k^T\tilde{p}_k. \quad (35)$$

对式(35)两端积分, 并利用 $V_k(0) = 0$ , 可得

$$V_k(t) = -\int_0^t c\iota_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}^2 ds - \int_0^t \varsigma_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}\psi_k^T\tilde{p}_k ds. \quad (36)$$

由 $L_k$ 的定义,  $L_k - L_{k-1}$ 可写成

$$\begin{aligned} L_k(t) - L_{k-1}(t) = \\ V_k(t) - V_{k-1}(t) + \frac{1}{2\gamma} \int_0^t (\tilde{p}_k^T\tilde{p}_k - \tilde{p}_{k-1}^T\tilde{p}_{k-1}) ds. \end{aligned}$$

将式(36)代入, 可得

$$\begin{aligned} L_k(t) - L_{k-1}(t) = \\ -V_{k-1}(t) - \int_0^t c\iota_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}^2 ds - \int_0^t \varsigma_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}\psi_k^T\tilde{p}_k ds + \\ \frac{1}{2\gamma} \int_0^t (\tilde{p}_k^T\tilde{p}_k - \tilde{p}_{k-1}^T\tilde{p}_{k-1}) ds \leq \\ -V_{k-1}(t) - \int_0^t c\iota_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}^2 ds - \int_0^t \varsigma_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}\psi_k^T\tilde{p}_k ds + \\ \frac{1}{2\gamma} \int_0^t (\tilde{p}_k^T\tilde{p}_k - [p - \text{sat}(\hat{p}_{k-1})]^T[p - \text{sat}(\hat{p}_{k-1})]) ds. \end{aligned} \quad (37)$$

上式应用了不等式<sup>[8]</sup>:  $[a - b]^T[a - b] \geq [a - \text{sat}(b)]^T[a - \text{sat}(b)]$ , 其中 $a$ 满足 $a = \text{sat}(a)$ . 另外, 知道

$$\begin{aligned} \tilde{p}_k^T\tilde{p}_k - [p - \text{sat}(\hat{p}_{k-1})]^T[p - \text{sat}(\hat{p}_{k-1})] = \\ -2\tilde{p}_k^T[\hat{p}_k - \text{sat}(\hat{p}_{k-1})] - [\hat{p}_k - \\ \text{sat}(\hat{p}_{k-1})]^T[\hat{p}_k - \text{sat}(\hat{p}_{k-1})], \end{aligned}$$

因此, 式(37)又可写成

$$\begin{aligned} L_k(t) - L_{k-1}(t) \leq \\ -V_{k-1}(t) - \int_0^t c\iota_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}^2 ds - \int_0^t \varsigma_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}\psi_k^T\tilde{p}_k ds - \\ \frac{1}{\gamma} \int_0^t \tilde{p}_k^T[\hat{p}_k - \text{sat}(\hat{p}_{k-1})] ds - \\ \frac{1}{2\gamma} \int_0^t [\hat{p}_k - \text{sat}(\hat{p}_{k-1})]^T[\hat{p}_k - \text{sat}(\hat{p}_{k-1})] ds. \end{aligned} \quad (38)$$

将学习律(29)代入, 即证得式(32). 证毕.

**定理 2** 满足假设1及假设2的系统(27)在反馈控制律(28)和参数迭代学习律(29)的作用下, 闭环系统中所有信号在区间 $[0, T]$ 上关于 $k$ 有界. 并且, 当 $k \rightarrow \infty$ 时,  $\forall \varepsilon \in [0, T]$ ,  $e_k(t)$ 收敛于 $[-\varepsilon(t), \varepsilon(t)]$ , 其中 $\varepsilon(t)$ 由定义1给出.

**证** 在证明 $L_k$ 的有界性之前, 首先证明 $L_0$ 的有界性. 由 $L_k$ 的定义及 $\hat{p}_0 = -\gamma\varsigma_{\varepsilon,0}e_{\varepsilon,0}\psi_0$ , 可得

$$\dot{L}_0 = \dot{V}_0 + \frac{1}{2\gamma}p^T p + p^T \varsigma_{\varepsilon,0}e_{\varepsilon,0}\psi_0 + \frac{\gamma}{2}\varsigma_{\varepsilon,0}e_{\varepsilon,0}^2\psi_0^T\psi_0. \quad (39)$$

由式(35)知

$$\dot{V}_0 = -c\iota_{\varepsilon,0}e_{\varepsilon,0}^2 - \varsigma_{\varepsilon,0}e_{\varepsilon,0}\psi_0^T p - \gamma\iota_{\varepsilon,0}e_{\varepsilon,0}^2\psi_0^T\psi_0. \quad (40)$$

将式(40)代入式(39), 有

$$\dot{L}_0 = -c\iota_{\varepsilon,0}e_{\varepsilon,0}^2 - \frac{\gamma}{2}\iota_{\varepsilon,0}e_{\varepsilon,0}^2\psi_0^T\psi_0 + \frac{1}{2\gamma}p^T p.$$

因此,  $\dot{L}_0$ 是有界的. 又因 $L_0(0) = 0$ , 故 $L_0(t) (= L_0(0) + \int_0^t \dot{L}_0 ds)$ 关于 $t$ 有界. 由式(32)知

$$L_k \leq L_{k-1}, k = 1, 2, 3, \dots,$$

故 $L_k$ 有界.  $L_k$ 的有界性意味着 $e_k, x_k, \hat{p}_k$ 均有界. 进一步地, 由(28)知,  $u_k$ 有界.

现在证明收敛性. 由式(32)知

$$V_{k-1} \leq L_{k-1} - L_k.$$

从 $k = 0$ 到 $K$ 求和可得

$$\sum_{k=0}^{K-1} V_k \leq L_0 - L_K,$$

$L_0, L_K$ 有界意味着 $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = 0$ . 由于 $g > 0$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iota_{\varepsilon,k}e_{\varepsilon,k}^2 = 0.$$

证毕.

**注 4** 对于同时存在定常和时变未知参数的混杂情形, 有两种学习方式: 1) 混杂学习方式, 即对于其中的定常参数采用周期学习律, 而时变参数采用迭代学习律; 2) 统一学习方式, 即对定常部分也采用迭代学习律. 一般来说, 不易比较两种学习方式的收敛速度. 另外, 定常参数化情形下也可以采用迭代学习律, 其参数修正只能待一次运行完了才能进行. 若采用周期学习律, 参数估值能得到及时调整, 比迭代学习律可望获得较快收敛速度.

**注 5** 本文所讨论的受控对象具有实际背景, 例如重复作业下机械系统的速度控制. 对于二阶以上的动态系统, 其学习控制器设计需采用Backstepping技术, 每一设计步骤中关于一阶系统的设计可采用本文方法, 具体的设计方法待另文发表.

### 5 仿真算例(Simulation examples)

下面分别就定常参数化和时变参数化两种情形给出说明性算例.

**例 1** 考虑定常参数化情形下的系统(8), 其中

$$\theta = 7, \varphi(x) = \sin x.$$

在每次迭代开始时, 设置初始状态 $x_k(0) = \text{rand}/2$ , rand是区间 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机数. 给定在时间区间 $[0, 1]$ 上的期望轨迹 $x_d(t) = 12t^2(1 - t)$ . 控制律(11)和参数周期修正律(12)中的参数取为 $c = 1, \gamma = 10$ . 引入的初始修正吸引子的参数选为:  $a = 1, \Delta = 0.1, \varepsilon_0 = 0.51, \zeta$ -函数由下式给出

$$\zeta(t) = \begin{cases} 1/\Delta, & 0 \leq t < \Delta, \\ 0, & t \geq \Delta, \end{cases} \quad (41)$$

取性能指标为  $J = \max_{t \in [\Delta, T]} |e_k(t)|$ .

仿真结果表明, 随着迭代次数增加, 区间  $[0.1, 1]$  上的跟踪误差收敛. 迭代至  $k = 11$  的仿真结果见图1, 2所示. 由图1知, 尽管每次迭代时的初态随机设置, 但本文提出的学习控制方法仍可实现区间  $[\Delta, T]$  上的完全跟踪. 图2给出了  $k = 10$  时学习到的控制输入信号.

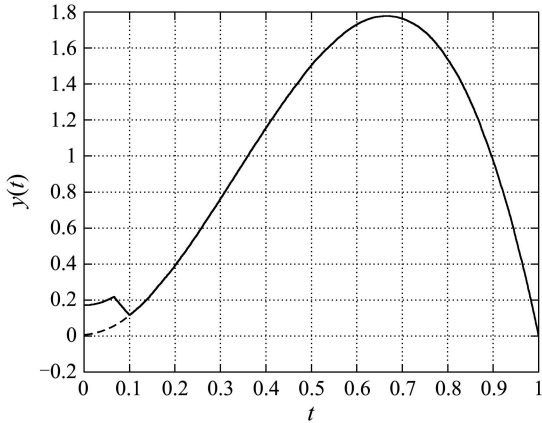


图1  $k = 10$  时的系统输出

Fig. 1 Output trajectory at the cycle  $k = 10$

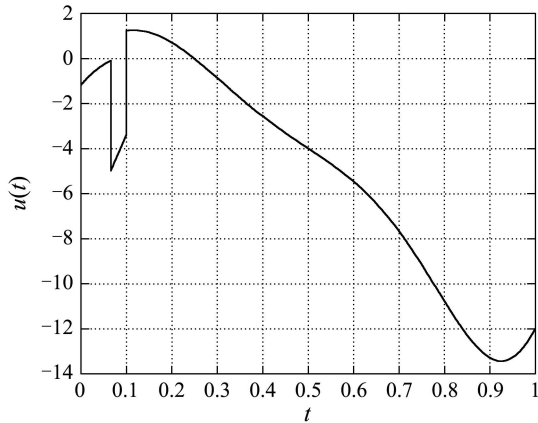


图2  $k = 10$  时的控制输入

Fig. 2 Input profile at the cycle  $k = 10$

**例2** 对于时变参数化情形下的系统(8), 其中

$$p(t) = 7t, \psi(x) = \sin x,$$

控制律(28) 和学习律(29)中的参数取为  $c = 5, \gamma = 30$ . 其它参数同定常参数化情形.

迭代至  $k = 50$  的仿真结果见图3, 4所示. 从图3可以看出, 随着迭代次数增加跟踪误差在区间  $[\Delta, T]$  上收敛到零. 它表明文中提出的学习控制方法对于时变参数情形是有效的. 图4给出了  $k = 50$  时学习到的控制输入信号.

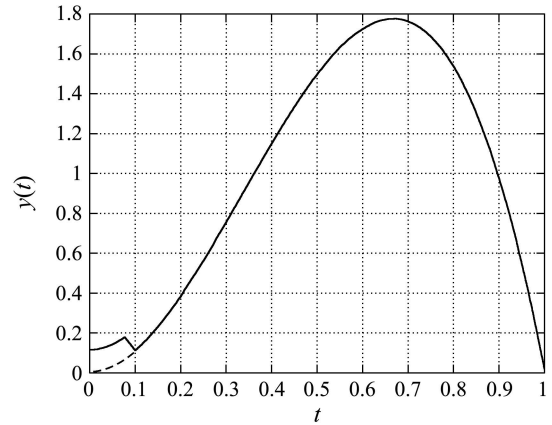


图3  $k = 50$  时的系统输出

Fig. 3 Output trajectory at the cycle  $k = 50$

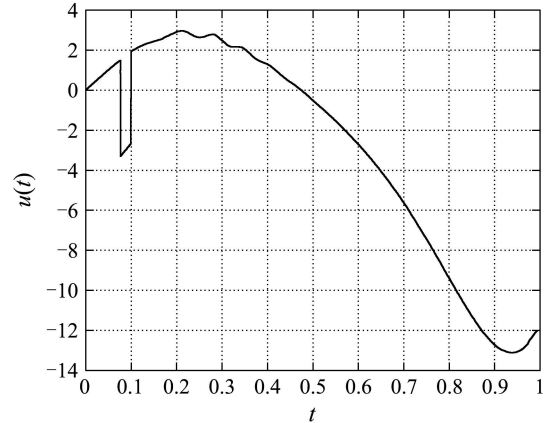


图4  $k = 50$  时的控制输入

Fig. 4 Input profile at the cycle  $k = 50$

## 6 结论 (Conclusions)

在给定作业区间上实现完全跟踪的意义下本文解决了迭代学习控制中的初始定位问题. 给出了系统不确定性项定常参数化和时变参数化两种情形下的学习控制器设计. 分别分析了周期学习及迭代学习算法的收敛性以及闭环系统中各信号的有界性. 理论分析表明采用含初始修正吸引子的时变死区技术是有效的, 可保证跟踪误差收敛到这种时变死区所确定的邻域, 从而实现在给定时间区间上的实际完全跟踪.

## 参考文献 (References):

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robotics by learning[J]. *J of Robotic Syst*, 1984, 1(2): 123 - 140.
- [2] 谢胜利, 谢振东, 田森平. 非线性系统的迭代学习控制及其算法实现[J]. *控制理论与应用*, 2002, 19(2): 167 - 172.  
(XIE Shengli, XIE Zhengdong, TIAN Senping. Iterative learning control and algorithm realization for nonlinear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(2): 167 - 172.)
- [3] 刘山, 吴铁军. 基于稳定逆的非最小相位系统的迭代学习控制[J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(6): 831 - 837.  
(LIU Shan, Wu Tiejun. Stable-inversion based iterative learning control for non-minimum phase systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 831 - 837.)

- [4] HEINZINGER G, FENWICK D, PADEN B, MIYAZAKI F. Robust learning control[C] // *Proc of the 28th IEEE Conf Decision Control*. Tempa, FL, USA: IEEE Press, 1989: 2640 – 2645.
- [5] KUC T Y, LEE J S. An adaptive learning control of uncertain robotic systems[C] // *Proc of the 30th IEEE Conf Decision Control*. Britain, UK: IEEE Press, 1991: 1206 – 1211.
- [6] CHOI J Y, LEE J S. Adaptive iterative learning control of uncertain robotic systems[J]. *IEE Proc: Control Theory Applications*, 2000, 147(2): 217 – 223.
- [7] MESSNER W, HOROWITZ R, KAO W, BOALS M. A new adaptive learning rule[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(2): 188 – 197.
- [8] DIXON W E, ZERGEROGLU E, DAWSON D M, COSTIC B T. Repetitive learning control: A Lyapunov-based approach[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, Pt B*, 2002, 32(4): 538 – 545.
- [9] XU J X, QU Z. Robust iterative learning control for a class of nonlinear systems[J]. *Automatica*, 1998, 34(8): 983 – 988.
- [10] FRENCH M, ROGERS E. Non-linear iterative learning by an adaptive Lyapunov technique[J]. *Int J Control*, 2000, 73(10): 840 – 850.
- [11] LEE H S, BIEN Z. Study on robustness of iterative learning control with nonzero initial error[J]. *Int J Control*, 1996, 64(3): 345 – 359.
- [12] CHIEN C J, HSU C T, YAU C Y. Fuzzy system-based adaptive iterative learning control for nonlinear plants with initial state errors[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Syst*, 2004, 12(5): 724 – 732.
- [13] 孙明轩, 黄宝键. 迭代学习控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999. (SUN Mingxuan, HUANG Baojian. *Iterative Learning Control*[M]. Beijing: National Defence Press, 1999.)
- [14] SUN M, WANG D. Iterative learning control with initial rectifying action[J]. *Automatica*, 2002, 38(7): 1177 – 1182.
- [15] SUN M, HE X, YU L. Initial rectified attractors for perfect synchronization of chaotic systems[J]. *Physics Letters A*, 2005, 348(1/2): 28 – 36.

### 作者简介:

**孙明轩** (1961—), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 目前研究方向为学习控制, E-mail: mxsun@zjut.edu.cn;

**何熊熊** (1965—), 男, 副教授, 博士, 目前研究方向为学习控制, E-mail: hxx@zjut.edu.cn;

**俞立** (1961—), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 目前研究方向为鲁棒控制, E-mail: lyu@zjut.edu.cn.

## 下 期 要 目

- 带有饱和执行器的T-S离散模糊系统的LQ模糊控制 ..... 刘 博, 贾新春, 高一博
- 控制方向未知的高次非线性系统的鲁棒自适应控制 ..... 魏春玲, 王强德, 武玉强
- 识别强化的双因子免疫控制器及其特性分析 ..... 付冬梅, 位耀光, 郑德玲
- 基于降阶位置/力模型的机器人神经网络控制 ..... 章 云, 刘 治
- 汽车整车主动悬架系统 $H_{\infty}$ 控制器的降阶 ..... 方 敏, 汪洪波, 陈无畏
- 不确定奇异时滞系统的时滞相关型鲁棒 $H_{\infty}$ 弹性控制 ..... 朱淑倩, 李振波, 程兆林, 张承慧
- 基于混沌优化的非线性预测控制器 ..... 宋 莹, 陈增强, 袁著祉
- 稀土串级萃取分离过程元素组分含量的多模型软测量 ..... 贾文君, 柴天佑
- 蚁群协同模式搜索算法及其收敛性分析 ..... 冯远静, 俞 立, 冯祖仁
- 基于模糊神经网络的双凸极永磁电机非线性建模 ..... 孙 强, 程 明
- 时滞不确定随机系统基于参数依赖Lyapunov函数的稳定条件 ..... 吴立刚, 王常虹, 高会军, 曾庆双
- 一类具有量化误差的多步长非线性采样系统的镇定 ..... 余宏旺, 汪志鸣, 王隔霞
- 基于观测器的不确定非线性系统的自适应鲁棒模糊控制 ..... 刘艳军, 王 伟, 王向东
- 一类离散事件系统的监控器综合 ..... 罗继亮, 吴维敏, 董利达, 苏宏业, 褚 健
- 考虑铁损的电动汽车用感应电机矢量控制及其能量优化策略 ..... 李 珂, 张承慧, 崔纳新