第24卷第3期 控制理论与应用 Vol. 24 No. 3
2007年6月 Control Theory & Applications Jun. 2007

文章编号: 1000−8152(2007)03−0380−05

有界区域上Petrowsky系统的能控性: 极小泛函方法

宗西举[1], 赵 怡[2]

(1. 济南大学 控制科学与工程学院, 山东 济南 250022; 2. 中山大学 数计学院, 广东 广州 510275)

摘要: 利用极小泛函方法研究Petrowsky系统的控制问题. 通过构造下半连续, 严格凸的强制的泛函, 把能控性问题, 近似能控性问题转化为求泛函极小值存在的问题, 从而得到了一些能控制性理论的充分必要条件, 这些结果是采用了极小泛函方法得到的, 改进了利用乘子方法得到的结果.

关键词: 能控性; 近似能控性; Petrowsky系统; 内部控制; 极小泛函方法

中图分类号: O175 **文献标识码**: A

Controllability of Petrowsky equation in bounded domain: a functional approach

ZONG Xi-ju[1], ZHAO Yi[2]

(1. School of Control Science and Engineering, University of Jinan, Jinan Shandong 250022, China;
2. School of Mathematical and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou Guangdong 510275, China)

Abstract: The interior controllability of Petrowsky equation in a bounded domain is studied in this paper. By constructing functionals which are low-semi-continuous, strictly convex and coercive, some necessary and sufficient conditions are obtained to guarantee the controllability and the approximate controllability, which are more direct than what are obtained by the multiplier method.

Key words: controllability; approximate controllability; Petrowsky equation; interior control; functional approach

1 引言(Introduction)

这一部分讨论在适当的函数空间中Petrowsky系统的控制问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u(x,t)+\Delta^2 u(x,t)=f(x,t)|_\omega,(x,t)\in\Omega\times R_+, \\ u(x,t)=\Delta u(x,t),(x,t)\in\partial\Omega\times R_+, \end{cases} \tag{1}$$

满足任意给定的初值

$$u(x,0)=u^0(x),u_t(x,0)=u^1(x),x\in\Omega. \tag{2}$$

Ω表示$\mathbb{R}^N$中有界的、单连通的开子集, 具有足够光滑的边界$\partial\Omega$. $\omega\subset\Omega$是一个开的非空子集. $\upsilon(x,t)$表示边界上点(x,t)处的单位外法向量, 用$H^m(\Omega)m>0$, 表示Sobolev空间, $u(x,t)$是状态变量, $f(x,t)$ 是分布参数控制函数并且f的支集在ω中. 通过在ω 上施加控制来改变系统的动态行为.

弹性梁和杆的振动问题在工程上有非常广泛而且实际的应用. 其中Petrowsky系统是一类非常重要的物理系统, 一维Petrowsky系统描述了弹性梁和杆的振动, 例如桥梁的振动等. 所以Petrowsky系统的控制问题具有非常重要的实际应用意义, 有关Petrowsky系统更具体的物理背景参看文[1∼4]. 类似的, 章春国、赵宏亮、刘康生[5]利用算子半群方法研究了关于非均质弹性Timoshenko梁的振动问题; 刘康生[6,7]利用乘子技巧和算子半群方法研究了包含Petrowsky系统的广义系统的控制问题. 虽然Petrowsky系统是文[6,7]中所研究的系统的特例之一, 但与文[6,7]所采用的方法不同, 本文是利用变分方法, 极小泛函理论特别地研究此类Petrowsky系统的能控制性问题.

由经典的微分方程解的存在唯一性理论可以知道:

引理 1.1[8](解的存在唯一性) 对任意的$f\in L^2((0,T);\omega)$以及$(u^0,u^1)\in H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 方程(1)(2)有唯一的弱解:

$$(u,u_t)\in C((0,T);H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)),$$

收稿日期: 2005−10−09; 收修改稿日期: 2006−09−04.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371136).

并且

$$(u,u_t)=S(t)(u^0,u^1)+\int_0^t S(t-\tau)f(t)\mathrm{d}\tau.$$

这里$S(t)$是算子$-\Delta^2$在空间$H_0^2(\varOmega)\times L^2(\varOmega)$中生成的$C_0$-半群, 而且如果

$$f\in W^{2,1}((0,T);L^2(\varOmega)),$$

方程(1)(2)有唯一强解:

$$(u,u_t)\in C^1([0,T];H_0^2(\varOmega)\times L^2(\varOmega)),$$
$$\cap C([0,T];[H^4(\varOmega)\cap H_0^2(\varOmega)]\times H_0^2(\varOmega)).$$

在讨论系统(1)(2)的控制问题之前给出一些术语和特定的表示方法.

能达集[9]　令$T>0$, 对所有初值$(u^0,u^1)\in H_0^2(\varOmega)\times L^2(\varOmega)$, 定义系统(1)(2)的能达集:

$$R(T;(u^0,u^1))=\{(u(T),u_t(T))|(u(t),u_t(t))\text{ 是系统(1)(2)的解}\},$$

显然, $R(T;(u^0,u^1))$是空间$H_0^2(\varOmega)\times L^2(\varOmega)$的闭凸子集.

对于有限维控制系统来说, 精确能控性一般是可以得到的, 但是对于无穷维控制系统一般不能得到精确能控, 这是由于能控性是与底空间$\varOmega$和ω的几何状态得到近似能控性. 在讨论问题之前, 依文[4,9]给出以下几个定义:

定义 1(精确能控性)　给定$T>0$, 任意初始状态$(u^0,u^1)\in H_0^2(\varOmega)\times L^2(\varOmega)$, 如果系统的能达集$R(T;(u^0,u^1))=H_0^2(\varOmega)\times L^2(\varOmega)$, 称系统(1)(2)是精确能控的.

定义 2(近似能控性)　给定$T>0$, 任意初始状态$(u^0,u^1)\in H_0^2(\varOmega)\times L^2(\varOmega)$, 如果系统的能达集$R(T;(u^0,u^1))$ 在$H_0^2(\varOmega)\times L^2(\varOmega)$中是稠密的, 称系统(1)(2)是近似能控的.

定义 3(零能控)　给定给定$T>0$, 任意初始状态$(u^0,u^1)\in H_0^2(\varOmega)\times L^2(\varOmega)$, 如果系统的能达集$R(T;(u^0,u^1))$ 只包含零元素, 称系统(1)(2)是零能控的.

注 1　由于系统(1)(2)是线性的而且是时间可逆的, 所以精确能控性等价于零能控性.

注 2　由于$R(T;(u^0,u^1))=R(T;(0,0))+S(t)(u^0,u^1)$, 所以对于精确能控和近似能控只要考虑初始状态为这种情况就足够了.

2　极小泛函方法, 精确能控性与能观性(Functional approach, exact controllability and observability)

这一节利用极小泛函方法得到系统(1)(2)精确能控的一些充分必要条件. 用$\langle\cdot,\cdot\rangle_{2,-2}$表示空间$H_0^2(\varOmega)$和对偶空间$H^{-2}(\varOmega)$ 的对偶积[10]. 对任意的$(\varphi_T^0,\varphi_T^1)\in L^2(\varOmega)\times H^{-2}(\varOmega)$, 考虑以下方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\varphi(x,t)+\Delta^2\varphi(x,t)=0,(x,t)\in\varOmega\times R_+,\\ \varphi(x,t)=\Delta\varphi(x,t)=0,(x,t)\in\partial\varOmega\times R_+,\\ \varphi(x,T)=\varphi_T^0,\varphi_t(x,T)=\varphi_T^1,x\in\varOmega.\end{cases}\tag{3}$$

令$(\varphi(t),\varphi_t(t))\in L^2(\varOmega)\times H^{-2}(\varOmega)$是(3)唯一弱解.

引理 2.1　$f\in C_0^\infty((0,T);\omega)$ 能够在T时刻把系统(1)(2)的解控制到零当且仅当以下条件成立:

$$\int_0^T\int_\omega\varphi f\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\langle\varphi_t(0),u^0\rangle_{2,-2}-\int_\varOmega\varphi(0)u^1\mathrm{d}x.\tag{4}$$

证　由稠密性条件只需对任意$(u^0,u^1)\in C_0^\infty(\varOmega)\times C_0^\infty(\varOmega),f\in C_0^\infty((0,T);\omega)$讨论即可. 令分别是系统(1) (2)和(3)的足够正则的解. 在式(1)的第1个方程两端乘以φ, 分部积分得到

$$\int_0^T\int_\omega\varphi f\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_\omega\varphi(u_{tt}+\Delta^2u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$
$$\int_\varOmega[\varphi u_t-\varphi_tu]_0^T\mathrm{d}x+\int_0^T\int_\omega u(\varphi_{tt}+\Delta^2\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$
$$\int_\varOmega[\varphi_T^0u_t(T)-\varphi_T^1u(T)]\mathrm{d}x-\int_\varOmega[\varphi(0)u^1-\varphi_t(0)u^0]\mathrm{d}x.$$

在上式中利用稠密性条件, 取极限, 对所有的$(u^0,u^1)\in H_0^2(\varOmega)\times L^2(\varOmega),(\varphi_T^0,\varphi_T^1)\in L^2(\varOmega)\times H^{-2}(\varOmega)$ 有以下式子成立

$$\int_0^T\int_\omega\varphi f\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\langle\varphi_T^1,u(T)\rangle_{2,-2}+\int_\varOmega\varphi_T^0u_t(T)\mathrm{d}x+\langle\varphi_t(0),u^0\rangle_{2,-2}-\int_\varOmega\varphi(0)u^1\mathrm{d}x.\tag{5}$$

由式(5)立即得式(4)成立当且仅当(u^0,u^1)在T时刻可以被控制到零, 控制函数是f. 可以定义对偶空间$L^2(\varOmega)\times H^{-2}(\varOmega)$与$H_0^2(\varOmega)\times L^2(\varOmega)$之间的对偶积如下:

$$\langle(\varphi^0,\varphi^1),(u^0,u^1)\rangle=\langle\varphi^1,u^0\rangle_{2,-2}-\int_\varOmega\varphi^0u^1\mathrm{d}x,$$
$$\forall(\varphi^0,\varphi^1)\in L^2(\varOmega)\times H^{-2}(\varOmega),$$
$$(u^0,u^1)\in H_0^2(\varOmega)\times L^2(\varOmega).$$

定义映射$\varLambda:(\varphi^0,\varphi^1)\mapsto\langle(\varphi^0,\varphi^1),(u^0,u^1)\rangle$, 由文献[9]知如此定义的映射$\varLambda$ 是线性有界的, 所以是连续的, 并且其范数$\|\varLambda\|=\|(u^0,u^1)\|_{H_0^2(\varOmega)\times L^2(\varOmega)}$.

另一方面, 对任意$(\varphi^0,\varphi^1)\in L^2(\varOmega)\times H^{-2}(\varOmega)$考虑以下方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\varphi(x,t)+\Delta^2\varphi(x,t)=0,(x,t)\in\varOmega\times R_+,\\ \varphi(x,t)=\Delta\varphi(x,t)=0,(x,t)\in\partial\varOmega\times R_+,\\ \varphi(x,0)=\varphi^0,\varphi_t(x,0)=\varphi^1,x\in\varOmega.\end{cases}\tag{6}$$

令$(\varphi(t),\varphi_t(t))\in L^2(\varOmega)\times H^{-2}(\varOmega)$是(3)唯一弱解. 依文献[8]有估计

$$\|\varphi(t)\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\varOmega))}+\|\varphi_t(t)\|^2_{L^\infty(0,T;H^{-2}(\varOmega))}\leqslant$$

$$\|(\varphi^0,\varphi^1)\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)}. \tag{7}$$

最后由椭圆方程正则性理论知道算子$-\Delta^2$在空间$H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$中生成一个等距的群, 因此引理2.1可以描述为:

引理 2.2 任意的初始状态$(u^0,u^1)\in H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$能够在$T$时刻能被控制到零当且仅当以下条件成立:

$$\int_0^T\int_\omega \varphi f\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\langle(\varphi^0,\varphi^1),(u^0,u^1)\rangle. \tag{8}$$

这里φ是(6)以(φ^0,φ^1)为初始条件的解. 由泛函极值的必要性条件, 式(8)可以看作是某一泛函的极值存在的必要条件. 定义泛函

$$J:L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)\to\mathbb{R},$$
$$(\varphi^0,\varphi^1)=\frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega|\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\langle(\varphi^0,\varphi^1),(u^0,u^1)\rangle,$$

这里φ是(6)以(φ^0,φ^1)为初始条件的解.

引理 2.3[11] 设H是一个自反的Banach空间, K是H的一个闭凸子集, 映射h是具有这样的性质:

1) h是凸的;

2) h是下半连续的;

3) 如果h是无界的, 则h是强制的, 即:

$$\lim_{\|x\|\to\infty}h(x)=\infty,$$

那么h在H中可以取得最小值. 即存在唯一的$x_0\in K$使得$h(x_0)=\min\limits_{x\in K}h(x)$.

利用定理2.3, 可以得到系统(1)(2)精确能控的充分条件. 首先, 根据文献[4]定义对偶系统的能观性概念:

定义 4 对偶系统(6)在T时刻是能观的, 如果存在一个正数C, 使得下面不等式成立

$$\int_0^T\int_\omega|\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant C\|(\varphi^0,\varphi^1)\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)},$$
$$\forall(\varphi^0,\varphi^1)\in L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega), \tag{9}$$

φ是(6)以(φ^0,φ^1)为初始条件的解. 不等式(9)称为能观性不等式.

定理 2.1[12] 对任意的初始状态(u^0,u^1), 假设(9)成立则泛函J有唯一最小极值点$(\hat\varphi^0,\hat\varphi^1)\in L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)$.

证 首先J是连续的, 因而J是下半连续的. 其次J是严格凸的. 事实上对任意的$(\psi^0,\psi^1)\in L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega),\forall\lambda\in(0,1)$, 有

$$J(\lambda(\varphi^0,\varphi^1)+(1-\lambda)(\psi^0-\psi^1))=$$
$$\lambda J(\varphi^0,\varphi^1)+(1-\lambda)J(\psi^0-\psi^1)-$$
$$\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_0^T\int_\Omega|\varphi-\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{10}$$

又由式(9)

$$\int_0^T\int_\omega|\varphi-\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant$$
$$C\|(\varphi^0,\varphi^1)-(\psi^0-\psi^1)\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)},$$

所以对任意$(\varphi^0,\varphi^1)\neq(\psi^0,\psi^1)$有

$$J(\lambda(\varphi^0,\varphi^1)+(1-\lambda)(\psi^0-\psi^1))<$$
$$J(\varphi^0,\varphi^1)+(1-\lambda)J(\psi^0-\psi^1).$$

最后J是强制的, 事实上:

$$J(\varphi^0,\varphi^1)\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega|\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$
$$\|(\varphi^0,\varphi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)}\|(u^0,u^1)\|_{H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}\geqslant$$
$$\frac{C}{2}\|(\varphi^0,\varphi^1)\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)}-$$
$$\|(\varphi^0,\varphi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)}\|(u^0,u^1)\|_{H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)},$$

因此 $\lim_{\|(\varphi^0,\varphi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)}}J(\varphi^0,\varphi^1)=\infty$.

利用引理2.3得到J具有唯一的极小值点$(\hat\varphi^0,\hat\varphi^1)\in L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)$.

定理 2.2 对任意的初始状态$(u^0,u^1)\in H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$, 若$(\hat\varphi^0,\hat\varphi^1)\in L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)$是$J$的唯一的极小值点, 令$\hat\varphi$是方程(6)以$(\hat\varphi^0,\hat\varphi^1)$为初值的解. 那么$f=\hat\varphi|_\omega$就是把$(u^0,u^1)$在$T$时刻控制到零的一个控制.

证 J在$(\hat\varphi^0,\hat\varphi^1)$点取得极小值, 那么对任意的$(\varphi^0,\varphi^1)\in L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)$有

$$0=\lim_{\xi\to0}\frac{1}{\xi}[J((\hat\varphi^0,\hat\varphi^1)+\xi(\varphi^0,\varphi^1))-J(\hat\varphi^0,\hat\varphi^1)]=$$
$$\int_0^T\int_\Omega\hat\varphi\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\langle\varphi^1,u^0\rangle_{2,-2}+\int_\Omega\varphi^0u^1\mathrm{d}x.$$

再由引理2.1～2.3及定理2.1可以得到的结论.

注 3 $f=\hat\varphi|_\omega$是由极小泛函得到的控能量最优的控制, 即假设$g\in L^2((0,T);\omega)$是另外一个控制可以把(u^0,u^1)在T时刻控制到零, 则

$$\|f\|_{L^2((0,T);\omega)}\leqslant\|g\|_{L^2((0,T);\omega)}.$$

事实上, 若$(\hat\varphi^0,\hat\varphi^1)$是泛函的极小值点. 由式(8)得:

$$\|f\|^2_{L^2((0,T);\omega)}=\int_0^T\int_\Omega|\hat\varphi|^2=\langle\varphi^1,u^0\rangle_{2,-2}-\int_\Omega\varphi^0u^1\mathrm{d}x. \tag{11}$$

另一方面, 由g是另外一个可以使(u^0,u^1)在T时刻控制到零的控制, 由式(8)可得

$$\int_0^T\int_\Omega\hat\varphi g\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\langle\varphi^1,u^0\rangle_{2,-2}-\int_\Omega\varphi^0u^1\mathrm{d}x. \tag{12}$$

由(10)(11)得到

$$\|f\|^2_{L^2((0,T);\omega)}=\langle\varphi^1,u^0\rangle_{2,-2}-\int_\Omega\varphi^0u^1\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^T\int_\Omega\hat\varphi g\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\|\hat\varphi\|_{L^2((0,T);\omega)}\|g\|_{L^2((0,T);\omega)}=$$
$$\|f\|_{L^2((0,T);\omega)}\|g\|_{L^2((0,T);\omega)}.$$

3 近似能控性(Approximate controllability)

这一部分考虑系统(1)(2)的近似能控性, 任给$\varepsilon > 0, (u^0, u^1), (u_d^0, u_d^1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, 本文的目的是想找到这样的一个控制使得系统(1)(2)的解在T时刻满足

$$\|(u^0(T), u^1(T)) - (u_d^0, u_d^1)\|_{H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon. \quad (13)$$

类似前面讨论的极小泛函方法, 构造一个泛函

$$J_\varepsilon : L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$J_\varepsilon(\varphi^0, \varphi^1) = \frac{1}{2}\int_0^T\int |\varphi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \langle(\varphi^0, \varphi^1), (u_d^0, u_d^1)\rangle + \varepsilon\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)}.$$

这里φ是(6)以$(\varphi^0, \varphi^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$为初始条件的解, 在精确能控性中证明了泛函$J$ 具有唯一的极小值点, 因此J_ε也具有唯一的极小值点.

定理 3.1 任给$\varepsilon > 0, (u_d^0, u_d^1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $(\hat\varphi^0, \hat\varphi^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$是泛函$J_\varepsilon$的极小值点, 如果是(6)的解, 那么$f = \hat\varphi|_\omega$是使得系统(1)(2)的初始状态控制到且$(u(T), u_t(T))$满足式(12).

证 令$(\hat\varphi^0, \hat\varphi^1)$是$J_\varepsilon$的极小值点. 那么对任给$\xi > 0, (u^0, u^1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, 有:

$$0 \leqslant \frac{1}{\xi}[J((\hat\varphi^0, \hat\varphi^1) + \xi(\varphi^0, \varphi^1)) - J(\hat\varphi^0, \hat\varphi^1)] = \int_0^T\int_\Omega \hat\varphi\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{\xi}{2}\int_0^T\int_\omega |\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \langle(\varphi^0, \varphi^1), (u^0, u^1)\rangle + \varepsilon\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)},$$

其中φ是式(6)的解. 令$\xi \to 0$, 得到

$$-\varepsilon\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)} \leqslant \int_0^T\int_\Omega \hat\varphi\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \langle(\varphi^0, \varphi^1), (u^0, u^1)\rangle.$$

同样, $\xi < 0$, 可以得到:

$$\int_0^T\int_\Omega \hat\varphi\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \langle(\varphi^0, \varphi^1), (u^0, u^1)\rangle \leqslant \varepsilon\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)}.$$

因此对任意的$\varepsilon > 0, (u^0, u^1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$有

$$\left|\int_0^T\int_\Omega \hat\varphi\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \langle(\varphi^0, \varphi^1), (u^0, u^1)\rangle\right| \leqslant \varepsilon\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)}.$$

亦即$\|(u^0(T), u^1(T)) - (u_d^0, u_d^1)\|_{H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon$. 近似能控性得到.

在第2节知道系统(1)(2)的精确能控性转化为对偶系统能观性不等式(9) 的成立条件, 同样在这一部分去寻找近似能控性的一个充分必要条件. 即寻找泛函极小值点存在的一个充分条件.

定理 3.2 系统(1)(2)是近似能控的当且仅当以下条件成立: 若φ是(6)以(φ^0, φ^1)为初始条件的解,

$$\varphi|_{[0,T]\times\omega} = 0 \Rightarrow (\varphi^0, \varphi^1) = 0. \quad (14)$$

证 必要性. 式(1)(2)是近似能控的. 令φ是式(6)以$(\varphi^0, \varphi^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$为初始条件的解, 且由前面的讨论知道对任给$\varepsilon > 0, (u_d^0, u_d^1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, 存在一个近似能控的控制$f \in L^2((0, T); \omega)$ 使得式(12)成立. 另一方面由精确能控性知道

$$\langle(\varphi^0, \varphi^1), (u(T), u_t(T))\rangle = 0. \quad (15)$$

由式(12)(14)得到

$$|\langle(\varphi^0, \varphi^1), (u_d^0, u_d^1)\rangle| = |\langle[(\varphi^0, \varphi^1) - (u(T), u_t(T))], (u_d^0, u_d^1)\rangle| \leqslant \varepsilon\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)}.$$

要使(13)对任意的$(u_d^0, u_d^1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$都成立, 当且仅当$(\varphi^0, \varphi^1) = (0, 0)$.

充分性. 假设式(13)成立, 证明系统(1)(2)近似能控. 利用定理2.2只要能够证明近似能控泛函有极小值点就可以.

1) J_ε是严格凸的;

2) J_ε是连续的, 因而是下半连续的;

3) J_ε是强制的,

$$\lim_{\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)}\to\infty} J_\varepsilon(\varphi^0, \varphi^1) = \infty.$$

要证明上式成立, 只要证明以下式子成立即可:

$$\liminf_{\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)}\to\infty} \frac{J_\varepsilon(\varphi^0, \varphi^1)}{\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)}} \geqslant \varepsilon. \quad (16)$$

总可以在空间$L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$中找到一组$\varphi_k = (\varphi_k^0, \varphi_k^1)_{k=1}^\infty$ 满足$\|(\varphi_k^0, \varphi_k^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)} \to \infty$, 单位化得到

$$(\bar\varphi_k^0, \bar\varphi_k^1) = \frac{(\varphi_k^0, \varphi_k^1)}{\|(\varphi_k^0, \varphi_k^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)}} = 1.$$

所以

$$\frac{J(\varphi^0, \varphi^1)}{\|(\varphi_k^0, \varphi_k^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)}} = \frac{1}{2}\|(\varphi_k^0, \varphi_k^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)} \times \int_0^T\int_\omega |\bar\varphi_k|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \langle(\bar\varphi^0, \bar\varphi^1), (u_d^0, u_d^1)\rangle,$$

其中$\bar\varphi$是系统(6)以(φ^0, φ^1)为初始条件的解.

a) 如果$\liminf\limits_{k\to\infty} J_\varepsilon(\bar\varphi^0, \bar\varphi^1) = \infty$, 立即得到

$$\lim_{\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)}\to\infty} J_\varepsilon(\varphi^0, \varphi^1) = \infty.$$

b) 如果$\liminf\limits_{k\to\infty} J_\varepsilon(\bar\varphi^0, \bar\varphi^1) = 0$, 由于$(\varphi_k^0, \varphi_k^1)$在$L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$中是有界的, 可以抽取一个子列$(\varphi_{k_j}^0, \varphi_{k_j}^1)$在$L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$中弱收

敛于$\varpi = (\varpi^0, \varpi^1)$. 如果$(\varpi_k^0, \varpi_k^1)$是系统(6)以$(\varphi^0, \varphi^1) = (\varpi_k^0, \varpi_k^1)$为初始条件的解, 那么有$(\bar{\varphi}_{k_j}^0, \bar{\varphi}_{k_j}^1)$在$L^2((0,T); L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)) \cap H^2((0,T); H^{-2}(\Omega) \times [H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)]$中弱收敛于$(\varpi_k^0, \varpi_k^1)$. 由$J_\varepsilon$的下半连续性得:

$$\int_0^T \int_\omega |\varpi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \lim_{k\to\infty} \inf J_\varepsilon(\bar{\varphi}^0, \bar{\varphi}^1) = 0.$$

因此有$\varpi(x,t) = 0, \forall (x,t) \in \omega \times (0,T)$. 再由定理3.2知道所以有$(\varpi^0, \varpi^1) = (0,0)$. 因此得到式(15). 再次利用定理2.1得到$J_\varepsilon$有唯一极小值点$(\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$.

这样就得到了系统(1)(2)的近似能控性.

参考文献 (References):

[1] CHEN G. Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain[J]. *SIAM J on Control and Optimization*, 1979, 17(1): 66 – 81.

[2] CHAN W L, GUO B Z. Pointwise stabilization for a chain of coupled vibration string[J]. *IMA J of Mathematical Control and Information*, 1991, 7(4): 307 – 315.

[3] GUO B Z, ZHANG Q. On harmonic disturbance rejection of an undamped Euler-Bernoulli beam with rigid tip body[J]. *Journal Name*, 2004, 10: 615 – 623.

[4] CURTAIN R F, ZWART H. *An Introduction to Infinite-dimensional Linear Systems Theory*[M]. New York: Springer, 1995.

[5] 章春国, 赵宏亮, 刘康生. 具有局部分布反馈与边界反馈耦合控制的非均质Timoshenko梁的指数镇定[J]. 数学年刊A辑(中文版), 2003, 24A(6): 757 – 764.
(ZHANG Chunguo, ZHAO Hongliang, LIU Kangsheng. The exponential stabilization of nonhomogeneous Timoshenko beam with one locally distributed control and one boundary control[J]. *Annu of Math(in Chinese),* 2003, 24A(6): 757 – 764.)

[6] LIU K S. Equivalentness between controllability and stabilizability for conservative systems and applications[J]. *Chinese Science Bulletin*, 1994, 39(17): 1424 – 1429.

[7] LIU K S, LIU Z Y. Analyticity and differentiability of semigroups associated with elastic systems with damping and gyroscopic forces[J]. *J of Differential Equations*,1997, 141(2): 340 – 355.

[8] PAZY A. *Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Eqations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

[9] LIONS J L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems[J]. *SIAM Review*, 1988, 30(1): 1 – 68.

[10] ADAMS R A. 索伯烈夫空间[M]. 叶其孝, 译. 北京: 人民教育出版社, 1981.
(ADAMS R A. *Sobolev Space*[M]. Translated by YE Qixiao. Beijing: People Education Press, 1981.)

[11] LIONS J L. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1997.

[12] ZUAZUA E. Exponential decay for the wave equation with locally distributed pamping[J]. *Communications in Partial Differential Equations*, 1990, 15(2): 205 – 235.

作者简介:

宗西举 (1981—), 男, 博士研究生, 主要研究兴趣是偏微分方程的镇定与控制问题等, E-mail: zongxiju@163.com;

赵　怡 (1940—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究兴趣是偏微分方程的镇定与控制问题, 无穷维动力系统, 混沌同步等, E-mail: stszy@zsu.edu.cn.