第 24 卷第 3 期
2007 年 6 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 24 No. 3
Jun. 2007

文章编号：1000−8152(2007)03−0391−05

具有零动态仿射非线性系统控制Lyapunov函数的构造

蔡秀珊，汪晓东，吕干云

(浙江师范大学 数理与信息工程学院, 浙江 金华 321004)

摘要: 研究具有零动态仿射非线性系统控制Lyapunov函数的构造问题. 提出通过求解一个Lyapunov方程获得可线性化部分的二次型控制Lyapunov函数. 由可线性部分的控制Lyapunov函数和零动态部分的Lyapunov函数, 通过构造一个正定函数, 得到了整个系统的控制Lyapunov函数, 且设计了可半全局镇定整个闭环系统的控制律. 仿真实例说明了所提出方法的有效性.

关键词: 非线性系统; 控制Lyapunov函数; 半全局镇定; 零动态

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Constructive control Lyapunov functions for affine nonlinear systems with zero dynamics

CAI Xiu-shan, WANG Xiao-dong, LÜ Gan-yun

(College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang 321004, China)

Abstract: The construction of control Lyapunov functions for affine nonlinear systems with zero dynamics is considered in this paper. A method is developed to ensure that a control Lyapunov function for the feedback linearizable part can be obtained by solving a Lyapunov equation. Using the control Lyapunov function of the feedback linearizable part and a Lyapunov function of the zero dynamics, a control Lyapunov function for the overall nonlinear system is then established by constructing a definite function. A state feedback is also designed to semiglobally stabilize the closed-loop system. Finally, a simulation example is given to illustrate the effectiveness of the design.

Key words: nonlinear systems; control Lyapunov functions; semiglobal stabilization; zero dynamics

1 引言 (Introduction)

对于非线性系统的镇定问题, 控制Lyapunov函数(CLF)是一种强有力的工具. 它将稳定性的描述转化为解决镇定问题的工具. Sontag[1] 研究仿射系统的镇定并由CLF构造通用的反馈控制律. 一旦构造出CLF就可以利用它来获得控制律,这些成就极大地推动了人们对CLF的研究[2~7]. 但是对于一般的非线性系统, 至今缺少有效的构造方法. CLF的构造无疑是制约这种方法发展的瓶颈问题. 从目前的构造方法来看,基本局限于Backstepping方法[2~5], 但Backstepping方法只适用于具有严格反馈结构的系统. 研究了线性系统CLF构造的问题, 证明了线性系统任意一个CLF都是一种Lyapunov方程的解, 而且这种方程的正定解一定能够生成CLF[6].

本文在文[6]的基础上, 继续探索具有零动态的非线性系统CLF的构造问题. 应用文[6]的方法, 通过求解一个Lyapunov方程, 获得了可线性化部分二次型的CLF. 由获得的可线性化分的CLF和零动态部分的Lyapunov函数, 通过构造一个正定函数, 得到了整个系统的CLF. 且设计了可半全局镇定整个闭环系统的控制律. 仿真实例说明了所提出方法的有效性.

2 系统的描述和预备知识 (System description and preliminaries)

考虑非线性系统

$$\dot{z} = Q(z, x), \tag{1a}$$

$$\dot{x} = Ax + B[F(z, x) + G(z, x)u], \tag{1b}$$

$$y = cx. \tag{1c}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^r$, $z \in \mathbb{R}^{n-r}$都为状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $y \in \mathbb{R}^l$ 是输出. $Q(z, x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-r}$ 为C^1 映射, $f_i, g_{ij} : \mathbb{R}^n \to R, i = 1, 2, \cdots, l, j = 1, 2, \cdots, m$ 都为C^1 函数, 且$f_i(0, 0) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, l$.

收稿日期: 2005−08−05; 收修改稿日期: 2006−02−23.

基金项目: 浙江省自然科学基金资助项目(Y105141); 浙江省教育厅科研基金资助项目(20050291); 浙江师范大学国家基金预研资助项目(2005gjjj021).

$F(z,x) = [f_1(z,x), f_2(z,x), \cdots, f_l(z,x)]^{\mathrm{T}}$, $G(z,x) = (g_{ij}(z,x))_{l\times m}$ 是行满秩的. $\{r_1, r_2, \cdots, r_l\}$ 为系统(1)的相对阶, 它们满足$r_1+r_2+\cdots+r_l = r < n$. 式(1b) 具有如下的规范结构:

$$A = \mathrm{blockdiag}\{A_1, A_2, \cdots, A_l\},$$
$$B = \mathrm{blockdiag}\{B_1, B_2, \cdots, B_l\},$$
$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{r_i\times 1},$$
$$C = \mathrm{blockdiag}\{C_1, C_2, \cdots, C_l\},$$
$$C_i = [1\ 0 \cdots 0]_{1\times r_i}.$$

根据Isidori [8] , 仿射非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \tag{2a}$$
$$y = h(x). \tag{2b}$$

若对于任意$x \in \mathbb{R}^n$, 具有向量相对阶$r < n$且分布$G = \mathrm{span}(g(x))$ 总是对合的, 则式(2a)(2b)总可以通过微分同胚化成系统(1)的形式.

称

$$\dot{z} = Q(z, 0) \tag{3}$$

为系统(1)的零动态系统, 简称为零动态.

假定M为n维的解析流型, 令$V : M \to \mathbb{R}^+$是C^1函数. 称V为M上的正定函数, 如果$V(0) = 0$且当$x \in M - \{0\}$时, $V(x) > 0$.

定义 1 若存在正定和真的C^1 函数, 对任意的$x \in M - \{0\}$, 使得

$$\inf_u (L_f V(x) + L_g V(x)u) < 0, \tag{4}$$

则称$V(x)$为系统(2a)在M上的控制Lyapunov函数(CLF).

$V(x)$为系统(2a)在M 上的CLF等价于下列的陈述:

$$\{L_g V(x) = 0, x \in M - \{0\}\} \Rightarrow L_f V(x) < 0.$$

假设 1 对于系统(3) 存在一个包含原点的开集$\Lambda \subset \mathbb{R}^{n-r}$, 及非负实数$h > 1$, 且存在一个$C^1$ 函数$U : \Lambda \to \mathbb{R}^+$, 使得$\{z : U(z) \leqslant h + 1\}$为$\Lambda$中的紧集, 且沿着式(3)的解有

$$\frac{\partial U(z)}{\partial z} \leqslant -\phi_1(z), \tag{5}$$

其中$\phi_1(z)$在Λ上连续, 在集合$\{z : U(z) \leqslant h + 1\}$ 上正定.

引理 1 E为$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 中的紧集, E_z和E_x分别为E的投影, $\chi(z)$为E_z 上的连续函数且在集合$\{(z,x) : x = 0\} \cap E$上正定. $\psi(x)$为E_x上的连续函数且在集合$E_x/\{0\}$上正定. $\xi(z,x)$为E上连续实函数, 且满足对任意$(z,x) \in \{(z,x) : x = 0\} \cap E$, $\xi(z,x) = 0$. κ为K_∞函数, 则必存在一个正实数K_*, 对任意$K \geqslant K_*$,

$$-\chi(z) - \kappa(K)\psi(x) + \xi(z,x) < 0, \forall (z,x) \in E. \tag{6}$$

3 主要结果 (Main results)

本文首先研究反馈可线性化部分CLF的构造方法.

3.1 反馈可线性化部分的CLF (CLF for the feedback linearizable part)

考虑系统(1b), 将A_i, B_i表为分块矩阵:

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{i-1} & A_{i2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{i-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(r_i-1)\times(r_i-1)},$$

$$A_{i2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{(r_i-1)\times 1}, B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{r_i\times 1}.$$

设$P_i, i = 1, 2, \cdots, l$为对称矩阵. 将P_i表成如下的分块矩阵形式:

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{r_i-1} & P_{i2} \\ P_{i2}^{\mathrm{T}} & p_{i3} \end{bmatrix},$$

这里: $P_{r_i-1} \in \mathbb{R}^{(r_i-1)\times(r_i-1)}, p_{i3} \in \mathbb{R}, P_{i2} \in \mathbb{R}^{r_i-1}$.

记$p_{i3}^{-1}P_{i2}^{\mathrm{T}} = [\beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{i,r_i-1}]$, $p_{i3}^{-1}P_{i2}^{\mathrm{T}}$的伴随矩阵表为$C_{\beta_i}$, 即

$$C_{\beta_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\beta_{i1} & -\beta_{i2} & \cdots & -\beta_{i,r_i-1} \end{bmatrix}.$$

C_{β_i}的特征多项式为

$$\lambda_{\beta_i} = \lambda^{r_i-1} + \beta_{i,r_i-1}\lambda^{r_i-2} + \cdots + \beta_{i2}\lambda + \beta_{i1}.$$

需要下列的假设:

H1: $p_{i3} > 0, \lambda_{\beta_i}, i = 1, 2, \cdots, l$ 是Hurwitz 多项式.

H2: $F_i, i = 1, 2, \cdots, l$为正定矩阵, k为正常数.

令

$$(P_{r_i-1}-P_{i2}p_{i3}^{-1}P_{i2}^{\mathrm{T}})C_{\beta_i}+C_{\beta_i}^{\mathrm{T}}(P_{r_i-1}-P_{i2}p_{i3}^{-1}P_{i2}^{\mathrm{T}})= -KF_i, \tag{7}$$

对于假设H1, H2, 有下面3个结论:

结论 1 λ_{β_i}是Hurwitz多项式当且仅当C_{β_i}为Hurwitz矩阵.

结论 2 若C_{β_i}为Hurwitz矩阵, 那么假设H2 蕴含着$P_{r_i-1}-P_{i2}p_{i3}^{-1}P_{i2}^{\mathrm{T}}$ 是正定阵.

结论 3 假设H1, H2, 蕴含着P_i为正定矩阵.

令

$$P=\begin{bmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_l \end{bmatrix}, V(x)=x^{\mathrm{T}}Px. \tag{8}$$

定理 1 若$P_i, i=1,2,\cdots,l$, 满足假设H1, H2, 那么$V(x)$ 是系统(1b)在$\mathbb{R}^r$上的CLF.

证 若$P_i, i=1,2,\cdots,l$, 满足假设H1, H2, 那么由结论1至结论3, 可得P_i是正定. 从而P 为正定.

令

$$f_1(z,x)=Ax+BF(z,x), g_1(z,x)=BG(z,x).$$

因为$G(z,x)$为行满秩, 那么

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x}g_1(z,x)=2x^{\mathrm{T}}PBG(z,x)=0, x\neq 0, \Leftrightarrow \\ x^{\mathrm{T}}PB=0, x\neq 0. \end{cases} \tag{9}$$

由于

$$\frac{\partial V}{\partial x}f_1(z,x)= (Ax+BF(z,x))^{\mathrm{T}}Px+x^{\mathrm{T}}P(Ax+BF(z,x))= x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P+PA)x+F^{\mathrm{T}}(z,x)B^{\mathrm{T}}Px+x^{\mathrm{T}}PBF(z,x). \tag{10}$$

由式(9), 则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x}g_1(z,x)=0, x\neq 0 \Rightarrow \\ \dfrac{\partial V}{\partial x}f_1(z,x)=x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P+PA)x. \end{cases} \tag{11}$$

将x 表为分块矩阵, 即

$$x^{\mathrm{T}}=[x_1^{\mathrm{T}}, x_2^{\mathrm{T}}, \cdots, x_l^{\mathrm{T}}], x_i^{\mathrm{T}}=[x_{i,r_i-1}^{\mathrm{T}}, x_{i,r_i}],$$
$$x_{r_i-1}^{\mathrm{T}}=[x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{i,r_i-1}], i=1,2,\cdots,l.$$

则

$$x^{\mathrm{T}}PB=[x_1^{\mathrm{T}}P_1B_1, x_2^{\mathrm{T}}P_2B_2, \cdots, x_l^{\mathrm{T}}P_lB_l],$$

且

$$x_i^{\mathrm{T}}P_iB_i=X_{i,r_i-1}^{\mathrm{T}}P_{i2}+p_{i3}x_{i,r_i}, i=1,2,\cdots,l.$$

因此当$x^{\mathrm{T}}PB=0, x\neq 0$, 则

$$x_{i,r_i}=-X_{i,r_i-1}^{\mathrm{T}}p_{i3}^{-1}P_{i2}, i=1,2,\cdots,l, \tag{12}$$

且至少有一个$x_i\neq 0$. 所以当$x^{\mathrm{T}}PB=0$, 可得

$$2x_i^{\mathrm{T}}P_iA_ix_i= X_{i,r_i-1}^{\mathrm{T}}[(P_{r_i-1}-p_{i3}^{-1}P_{i2}P_{i2}^{\mathrm{T}})(A_{i-1}-A_{i2}P_{i2}^{\mathrm{T}}p_{i3}^{-1})+ (A_{i-1}-A_{i2}P_{i2}^{\mathrm{T}}p_{i3}^{-1})^{\mathrm{T}}(P_{r_i-1}-p_{i3}^{-1}P_{i2}P_{i2}^{\mathrm{T}})]X_{i,r_i-1}= X_{i,r_i-1}^{\mathrm{T}}[(P_{r_i-1}-p_{i3}^{-1}P_{i2}P_{i2}^{\mathrm{T}})C_{\beta_i}+ C_{\beta_i}^{\mathrm{T}}(P_{r_i-1}-p_{i3}^{-1}P_{i2}P_{i2}^{\mathrm{T}})]X_{i,r_i-1}. \tag{13}$$

因为

$$x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P+PA)x=2\sum_{i=1}^{l}x_i^{\mathrm{T}}P_iA_ix_i, \tag{14}$$

由式(7) (11) (13) (14)可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x}g_1(z,x)=0, x\neq 0 \Rightarrow \\ \dfrac{\partial V}{\partial x}f_1(z,x)=x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P+PA)x<0. \end{cases} \tag{15}$$

所以$V(x)$ 是系统(1b)在$\mathbb{R}^r$上的CLF.

3.2 整个非线性系统的CLF (CLF for the overall nonlinear system)

在这个部分, 对于非线性系统(1a)(1b), 给出CLF的构造方法.

对于任给$c>0$, 令

$$S_1=\{x: V(x)<c+1\}\times\{z: U(z)<h+1\},$$

定义函数$W(z,x): S_1\to\mathbb{R}^+$为

$$W(z,x)=\frac{hU(z)}{h+1-U(z)}+\frac{cV(x)}{c+1-V(x)}, \tag{16}$$

则$W(z,x): S_1\to\mathbb{R}^+$ 在S_1为真.

记

$$S=\{(z,x): W(z,x)\leqslant c^2+h^2+1\}.$$

定理 2 若系统(1)满足假设1, 且$P_i, i=1,2,\cdots,l$ 满足假设H1, H2. 那么存在$K_*>0$, 对任意$K>K_*$, 则$W(z,x): S_1\to\mathbb{R}^+$为系统(1a)(1b)在$S$上的CLF.

证 假定$W(z,x)\leqslant c^2+h^2+1$. 则

$$\begin{cases} V(x)\leqslant (c+1)\dfrac{c^2+h^2+1}{c^2+h^2+1+c}, \\ U(z)\leqslant (h+1)\dfrac{c^2+h^2+1}{c^2+h^2+1+h}. \end{cases} \tag{17}$$

由式(17), 当$W(z,x)\leqslant c^2+h^2+1$, 可得

$$\frac{c}{c+1}\leqslant\frac{c(c+1)}{(c+1-V)^2}\leqslant\frac{(c^2+h^2+1+c)^2}{c(c+1)}, \tag{18}$$

$$\frac{h}{h+1} \leqslant \frac{h(h+1)}{(h+1-U)^2} \leqslant \frac{(c^2+h^2+1+h)^2}{h(h+1)}. \quad (19)$$

由假设1及式(17)知S为紧集, 且S 的投影满足

$$S_x \subset \{x : V(x) < c+1\}, S_z \subset \{z : U(z) < h+1\}. \ (20)$$

令

$$f(z,x) = \begin{bmatrix} Q(z,x) \\ Ax+BF(z,x) \end{bmatrix}, g(z,x) = \begin{bmatrix} 0 \\ BG(z,x) \end{bmatrix}.$$

那么, 有

$$L_fW(z,x) = \frac{h(h+1)}{(h+1-U(z))^2}\frac{\partial U}{\partial z}Q(z,x) + \frac{c(c+1)}{(c+1-V(x))^2}\frac{\partial V}{\partial x}(Ax+BF(z,x)), (21)$$

$$L_gW(z,x) = \frac{c(c+1)}{(c+1-V(x))^2}\frac{\partial V}{\partial x}BG(z,x). \quad (22)$$

因为$G(z,x)$为行满秩, 当$L_gW(z,x) = 0$, 则

$$L_fW(z,x) = \frac{h(h+1)}{(h+1-U(z))^2}\frac{\partial U}{\partial z}Q(z,x) + \frac{c(c+1)}{(c+1-V(x))^2}x^{\mathrm{T}}(PA+A^{\mathrm{T}}P)x. \ (23)$$

令

$$X_{r-l}^{\mathrm{T}} = [X_{1,r_1-1}^{\mathrm{T}}\ X_{2,r_2-1}^{\mathrm{T}} \cdots X_{l,r_l-1}^{\mathrm{T}}],$$
$$F = \text{block diag}\ [F_1\ F_2 \cdots F_l].$$

由定理1的证明可知, 当$L_gW(z,x) = 0$, 可得

$$L_fW(z,x) = \frac{h(h+1)}{(h+1-U(z))^2}\frac{\partial U}{\partial z}Q(z,x) - K\frac{c(c+1)}{(c+1-V(x))^2}X_{r-l}^{\mathrm{T}}FX_{r-l}. \ (24)$$

考虑到式(18) (19)与假设1, 当$L_gW(z,x) = 0$, 则

$$L_fW(z,x) \leqslant -\frac{Kc}{c+1}X_{r-l}^{\mathrm{T}}FX_{r-l} + \frac{(c^2+h^2+1+h)^2}{h(h+1)}|\frac{\partial U(z)}{\partial z}(Q(z,x) - Q(z,0))| - \frac{h(h+1)}{(h+1-U(z))^2}\phi_1(z). \ (25)$$

定义

$$\begin{cases} \chi(z) = \dfrac{h(h+1)}{2(h+1-U(z))^2}\phi_1(z), \\ \psi(x) = \dfrac{Kc}{2(c+1)}X_{r-l}^{\mathrm{T}}FX_{r-l}, \\ \kappa = K, \\ \xi(z,x) = \dfrac{(c^2+h^2+1+h)^2}{h(h+1)}|\dfrac{\partial U(z)}{\partial z}(Q(z,x) - Q(z,0))|. \end{cases} \quad (26)$$

由假设1, $\chi(z)$ 为S_z 的连续函数, 且在集合$\{(z,x) : x = 0\} \cap S$的投影上正定. $\psi(x)$ 为S_x上的连续函数,由于$x_{i,r_i} = -X_{i,r_i-1}^{\mathrm{T}}P_{i2}p_{i3}^{-1}, i = 1,2,\cdots,l$, 因此$\psi(x)$ 在集合$S_x/\{0\}$上正定. 对任意$(z,x) \in \{(z,x) : x = 0\} \cap S$, $\xi(z,x) = 0$. 引理1的条件全部满足. 所以必存在正实数K_*, 对任意$K \geqslant K_*$, 及任意$(z,x) \in S$

$$\xi(z,x) < \chi(z) + K\psi(x). \quad (27)$$

由式(25)~(27), 当$L_gW(z,x) = 0, x \neq 0$, 则

$$L_fW(z,x) \leqslant -\frac{Kc}{2(c+1)}X_{r-l}^{\mathrm{T}}FX_{r-l} - \frac{h(h+1)}{2(h+1-U(z))^2}\phi_1(z). \quad (28)$$

令

$$\phi(z,x) = \frac{Kc}{2(c+1)}X_{r-l}^{\mathrm{T}}FX_{r-l} + \frac{h(h+1)}{2(h+1-U(z))^2}\phi_1(z).$$

由式(28), 当$L_gW(z,x) = 0, x \neq 0$, 则$L_fW(z.x) \leqslant -\phi(z,x)$. 由式(26) (27), 可得$\phi(z,x)$在$S_1$连续, 在$S$上正定.

另一方面, 由假设1, 当

$$L_gW(z,x) = 0, x = 0, z \neq 0,$$
$$L_fW(z,x) = \frac{h(h+1)}{(h+1-U(z))^2}\frac{\partial U}{\partial z}Q(z,0) \leqslant -\frac{h}{h+1}\phi_1(z).$$

总之, 对任意$L_gW(z,x) = 0, (z,x) \neq 0$, $L_fW(z,x) < 0$. 因此$W(z,x)$为系统(1)在S上的CLF.

令

$$a(z,x) = L_fW(z,x), B(z,x) = L_gW(z,x).$$

初值$(z(0),x(0)) \in S$. 由Sontag的通用公式[1],

$$u = \begin{cases} -B^{\mathrm{T}}(z,x)\dfrac{a(z,x)+\sqrt{a^2(z,x)+\|B(z,x)\|^4}}{\|B(z,x)\|^2}, \\ \qquad B(z,x) \neq 0, \\ 0, \qquad B(z,x) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

可半全局镇定系统(1a) (1b).

4 仿真 (Simulation)

例 1 考虑多变量非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = 2z_2\sin x_1 + u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = \cos x_4 \sin z_1 + u_2, \\ \dot{z}_1 = -z_1 + x_1\cos x_3, \\ \dot{z}_2 = -z_2 + 2x_4\sin x_2. \end{cases} \quad (30)$$

因为系统(30)的零动态渐近稳定, 取

$$U(z)=0.5z_1^2+0.5z_2^2.$$

令

$$p_{13}^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}=[1\ \ 2],$$
$$p_{23}^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}=[6\ \ 5],$$
$$p_{13}=p_{23}=1,$$
$$F_1=F_2=I_2.$$

由定理1, 可得

$$V(x)=\begin{bmatrix}1.5k+1 & 0.5k+2 & 0 & 0\\ 0.5k+2 & 0.5k+4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{67}{60}k+36 & \frac{k}{12}+30\\ 0 & 0 & \frac{k}{12}+30 & \frac{7}{60}k+25\end{bmatrix}.$$

选择$h=100, c=10000, k=1$.

令

$$W(z,x)=\frac{hU(z)}{h+1-U(z)}+\frac{cV(x)}{c+1-V(x)}.$$

由定理2, 控制律(29)可半全局镇定系统(30).

图1～图3分别显示初值为

$$[z(0)\quad x(0)]=[5\ \ 9\ \ 3\ \ -1\ \ -1\ \ 1]^{\mathrm{T}}\in\{(z,x): W(z,x)\leqslant 1.0001\times 10^8\},$$

式(29) (30)所构成的闭环系统的状态轨线$z(t)$, $x(t)$及控制律$u(t)$. 对允许范围内的初值$[z(0)\quad x(0)]\in\{(z,x): W(z,x)\leqslant 1.0001\times 10^8\}$具有相似的仿真结果.

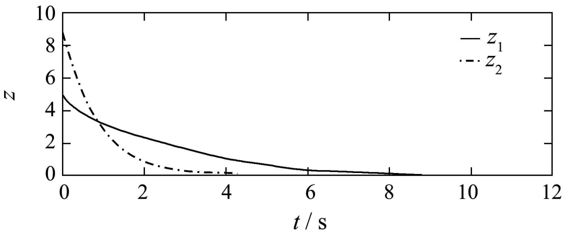

图 1　闭环系统的状态轨线$z(t)$

Fig. 1　State $z(t)$ of the closed-loop system

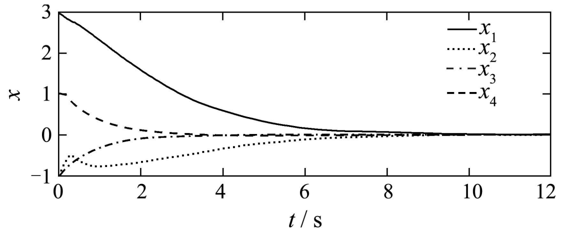

图 2　闭环系统的状态轨线$x(t)$

Fig. 2　State $x(t)$ of the closed-loop system

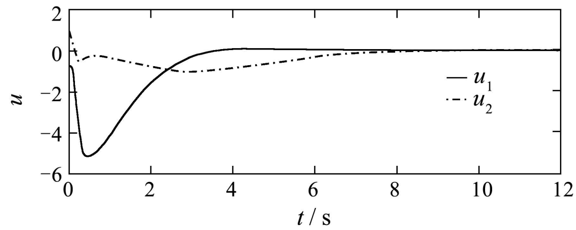

图 3　闭环系统的控制律$u(t)$

Fig. 3　Control $u(t)$ of the closed-loop system

5　结论 (Conclusions)

本文研究具有零动态仿射非线性系统CLF的构造问题. 首先利用Lyapunov方程构造可线性化部分的CLF. 由所获得可线性部分的CLF和零动态部分的Lyapunov函数, 通过构造一个正定函数, 获得了整个系统的CLF, 且设计了可半全局镇定整个闭环系统的控制律. 仿真实例说明了所提出方法的有效性.

参考文献 (References):

[1] SONTAG E D. A ‘Universal’ construction of Artstein’s Theorem on nonlinear stabilization[J]. *Systems & Control Letters*, 1989, 13(2): 117 – 123.

[2] KRSTIC M, LI Z. Inverse optimal design of input-to-state stabilizing nonlinear controllers[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(3): 336 – 350.

[3] PRALY L, JIANG Z P. Stabilization by output-feedback for systems with ISS inverse dynamics[J]. *Systems & Control Letters*, 1993, 21(5): 19 – 33.

[4] KRSTIC M, KOKOTOVIC P V. Adaptive nonlinear design with controller-identifier separation and swapping[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(3): 426 – 441.

[5] SEPULCHRE R, JANKOVIC M, KOKOTOVIC P V. *Constructive Nonlinear Controll*[M]. London: Springer-Verlag, 1997.

[6] CAI X S, HAN Z Z. Universal construction of control Lyapunov functins for linear systems[J]. *Latin American Applied Research*, 2006, 36(1): 15 – 22.

[7] CAI X S, HAN Z Z. Inverse optimal control of nonlinear systems with structural uncertainty[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2005, 152(1): 79 – 83.

[8] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems*[M]. 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 1995.

[9] TEEL A R, PRALY L. Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback[J]. *SIAM J on Control and optimization*, 1995, 33(5): 1443 – 1485.

作者简介:

蔡秀珊　(1966—), 女, 浙江师范大学数理与信息工程学院的教授, 2005年在上海交通大学自动化系获得控制理论与控制工程的博士学位, 主要的研究方向为非线性控制与应用等, E-mail: xiushan@zjnu.cn;

汪晓东　(1958—), 男, 教授, 主要的研究方向为非线性控制、混沌动力学系统与控制等, E-mail: wxd@zjnu.cn;

吕干云　(1976—), 男, 博士, 主要的研究方向为电力系统的稳定性、混沌动力学系统与控制等, E-mail: ganyun-lv@zjnu.cn.