文章编号：1000−8152(2007)03−0401−06

不确定离散时滞系统的输出反馈鲁棒预测控制

陈秋霞，俞 立

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310032)

摘要: 对一类输入输出受限的不确定离散时滞系统, 研究了使得闭环系统渐近稳定且滚动时域性能指标在线最小化的鲁棒预测输出反馈控制器设计问题. 基于预测控制的滚动优化原理, 给出了输出反馈控制器存在的充分条件. 采用锥补线性化思想将控制器的设计转化为一个受线性矩阵不等式 (LMI) 约束的非线性规划问题, 并利用该线性矩阵不等式的可行解给出了输出反馈控制器的构造方法. 最后通过仿真验证了该方法的有效性.

关键词: 鲁棒预测控制; 不确定系统; 离散时滞系统; 输出反馈; LMI

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Robust model predictive control for uncertain discrete time-delay systems via dynamic output feedback

CHEN Qiu-xia, YU Li

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Zhejiang Hangzhou 310032, China)

Abstract: The design problem of robust output feedback model predictive controllers is considered which guarantees that the closed-loop system is asymptotically stable and an on-line receding horizon guaranteed cost is minimized for a class of uncertain discrete time-delay systems with I/O constrains. Firstly, the condition for the existence of the output feedback controller is derived by using the receding optimization. The complementary linearization idea is then employed to convert the controller design into a nonlinear programming problem with linear matrix inequality constraints, and a construction of the desired controllers is also provided in terms of feasible solutions to the LMIs. Finally, the simulation results illustrate the effectiveness of the proposed methods.

Key words: robust predictive control; uncertain systems; discrete time-delay systems; output feedback; LMI

1 引言(Introduction)

模型预测控制(MPC)作为20世纪70年代后期在工业过程领域内发展起来的一类新型计算机控制算法, 已被工业界广泛应用. MPC具有模型预测、滚动优化、反馈校正等特性, 可以有效处理状态和控制等硬约束问题, 但难以处理模型不确定性. LMI技术可以有效地处理模型不确定性且支持在线优化, 因此基于LMI方法提出了一系列有效的鲁棒模型预测控制方法[1~3]. 最近, 关于不确定时滞系统的鲁棒预测控制研究也取得了一定的进展. 文[4]采用LMI方法给出了一类输入受限离散时滞系统的鲁棒预测性能指标上界和系统稳定的充分条件; 文[5]采用双模控制结构, 基于闭环系统预测, 通过离线构造鲁棒不变椭圆集保证了闭环系统的渐近稳定性. 然而, 在现有的这些文献中, 都只考虑了状态反馈. 在实际系统中, 系统的状态往往难以直接测量得到, 且常有输入输出量的饱和约束. 因此研究具有输入输出受限的不确定时滞系统输出反馈鲁棒预测控制具有重要的理论意义和实际应用价值.

针对一类输入输出受限的不确定离散时滞系统, 本文研究了其鲁棒预测输出反馈控制器的设计问题. 基于预测控制的滚动优化原理, 给出了输出反馈控制器存在的充分条件及其构造方法. 所得结果以非线性矩阵不等式的形式给出, 应用锥补线性化思想得到了控制器的迭代求解方法. 通过在每个采样时刻在线求解相应的非线性规划问题, 保证了滚动时域闭环系统鲁棒预测性能指标的在线最小化. 仿真结果表明了该方法的有效性.

2 问题的描述和准备(Problem statement and preliminaries)

考虑以下的不确定离散时滞系统

收稿日期: 2005−08−10; 收修改稿日期: 2006−02−23.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60274034, 60525304); 国家高技术研究发展计划(863计划)资助项目(2006AA04Z178).

$$\begin{cases} x(k+1)=A(k)x(k)+A_{\rm d}(k)x(k-d)+B(k)u(k),\\ y(k)=Cx(k),\\ y(k)=\phi(k),\quad -d\leqslant k\leqslant 0\\ \|u(k)\|_2\leqslant u_{\max},\ \|y(k)\|_2\leqslant y_{\max}. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $A(k)=A+\Delta A(k)$, $A_{\rm d}(k)=A_{\rm d}+\Delta A_{\rm d}(k)$, $B(k)=B+\Delta B(k)$, $x(k)\in\mathbb{R}^n$ 是系统状态向量, $u(k)\in\mathbb{R}^m$是控制输入, $y(k)\in\mathbb{R}^p$是测量输出, $d>0$是滞后时间常数, $\phi(k)$为初始向量, A, $A_{\rm d}$, B, C是具有适当维数的实常数矩阵, ΔA, $\Delta A_{\rm d}$, ΔB表示系统模型中的参数不确定性, 且假定具有以下的形式:

$$[\Delta A\ \ \Delta A_{\rm d}\ \ \Delta B]=DF(k)[E_1\ \ E_{\rm d}\ \ E_2],$$

其中: D, E_1, $E_{\rm d}$ 和 E_2 是具有适当维数的实常数矩阵, $F(k)\in\mathbb{R}^{i\times j}$ 是出现在系统模型中的不确定参数矩阵, 假定其范数有界, 即满足 $F^\top(k)F(k)\leqslant\mu I$.

鲁棒模型预测控制的滚动优化性能指标表示为

$$\min_{u(k+i|k),i=0,1,\cdots,m}\ \max_{[A(k+i),A_{\rm d}(k+i),B(k+i)],i\geqslant 0} J(k)$$

$$J(k)=\sum_{i=1}^{p}x^\top(k+i|k)Qx(k+i|k)+\sum_{i=1}^{m}u^\top(k+i|k)Ru(k+i|k), \tag{2}$$

其中: m为控制时域, p 为优化时域, $p\geqslant m$, Q, R 为给定的对称正定加权矩阵, $x(k+i|k)$ 表示在 k 时刻基于模型(1)的 $k+i$ 时刻的状态预测值, 假设$x(k+i|k)=x(k+i|k+i)=x(k+i)$, $u(k+i|k)$ 表示 k 时刻第 i 步预测控制量, 且 $u(k+i|k)=0$, $i>m$.

本文的目的是设计一个全阶的动态输出反馈控制器:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1)=A_{\rm c}\hat{x}(k)+B_{\rm c}y(k),\\ u(k)=C_{\rm c}\hat{x}(k). \end{cases} \tag{3}$$

其中$\hat{x}(k)\in\mathbb{R}^n$是控制器的状态, 使得对所有允许的不确定性, 闭环系统

$$\bar{x}(k+1)=\tilde{A}\bar{x}(k)+\tilde{A}_{\rm d}x(k-d) \tag{4}$$

渐近稳定, 且滚动时域闭环系统的鲁棒预测性能指标值最小化. 其中:

$$\tilde{A}=\bar{A}+\bar{D}F(k)\bar{E}_1,\ \tilde{A}_{\rm d}=\bar{A}_{\rm d}+\bar{D}F(k)\bar{E}_{\rm d},$$

$$\bar{E}_1=[E_1\ \ E_2C_{\rm c}],\ \bar{E}_{\rm d}=E_{\rm d},$$

$$\bar{x}(k)=\begin{bmatrix}x(k)\\ \hat{x}(k)\end{bmatrix},\ \bar{D}=\begin{bmatrix}D\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}A & BC_{\rm c}\\ B_{\rm c}C & A_{\rm c}\end{bmatrix},\ \bar{A}_{\rm d}=\begin{bmatrix}A_{\rm d}\\ 0\end{bmatrix}.$$

相应的闭环性能指标为

$$\min_{u(k+i|k),i=0,1,\cdots,m}\ \max_{[A(k+i),A_{\rm d}(k+i),B(k+i)],i\geqslant 0} J(k)$$

$$J(k)=\sum_{i=1}^{p}\bar{x}^\top(k+i|k)\tilde{Q}\bar{x}(k+i|k), \tag{5}$$

其中$\tilde{Q}=\mathrm{diag}\{Q,\ C_{\rm c}^\top RC_{\rm c}\}$, $\hat{x}(k+i|k)=0$, $i>m$. 这样一个问题称为不确定离散时滞系统(1)的鲁棒预测控制问题. 控制器(3)称为系统(1)和性能指标(2)的一个鲁棒预测输出反馈控制器.

在主要定理的证明中, 需要以下引理:

引理 1[6] 考虑一个二次型函数

$$V(x(k+i|k))=x^\top(k+i|k)P_1x(k+i|k)+\sum_{j=1}^{d}x^\top(k-j|k)S_1x(k-j|k),$$

其中P_1, S_1为对称正定矩阵. 如果 $V(x(k+i|k))$ 满足条件 $V(x(k+i+1|k))-V(x(k+i|k))\leqslant-[x^\top(k+i|k)Qx(k+i|k)+u^\top(k+i|k)Ru(k+i|k)]$, 则对于式(1)描述的带有终端零状态约束系统, 性能指标满足

$$\max_{[A(k+i),A_{\rm d}(k+i),B(k+i)],i\geqslant 0} J(k)\leqslant V(x(k|k)). \tag{6}$$

3 鲁棒预测输出反馈控制器设计(Design of robust output feedback predictive controllers)

针对输出反馈闭环系统(4), 选取以下离散Lyapunov-Krasovskii泛函

$$\bar{V}(x(k+i|k))=\bar{x}^\top(k+i|k)P\bar{x}(k+i|k)+\sum_{i=1}^{d}x^\top(k-i|k)Sx(k-i|k), \tag{7}$$

其中: $P=P^\top>0$, $S=S^\top>0$.

以下将基于这样一个Lyapunov-Krasovskii泛函导出系统(4)鲁棒稳定的充分条件, 并给出鲁棒预测输出反馈控制器的存在条件和设计方法.

定理 1 对不确定时滞系统(4)和性能指标(5), 若以下优化问题

$$\min_{X,Y,S,W,N,\hat{A},\hat{B},\hat{C},\varepsilon,\gamma,\beta}\gamma(k) \tag{8}$$

s.t.

$$\begin{bmatrix} -\gamma(k)I & * & * & *\\ y(k|k) & -CYC^\top & * & *\\ \hat{x}(k|k) & -N^\top C^\top & -W & *\\ y_{\rm d} & 0 & 0 & -C_{\rm s} \end{bmatrix}<0, \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} -\Omega_{11} & * & * & * & * & * \\ 0 & -S & * & * & * & * \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & -\Omega_{33} & * & * & * \\ 0 & 0 & \Omega_{43} & -\varepsilon^{-1}I & * & * \\ \Omega_{51} & E_{\rm d} & 0 & 0 & -\varepsilon^{-1}I & * \\ \Omega_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_{66} \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} -u_{\max}^2 X & -u_{\max}^2 Y^{-1} & 0 \\ -u_{\max}^2 Y^{-1} & -u_{\max}^2 Y^{-1} & \hat{C}^{\top} \\ 0 & \hat{C} & -\beta I \end{bmatrix} \leqslant 0,$$

$$\begin{bmatrix} -y_{\max}^2 X & -y_{\max}^2 Y^{-1} & C^{\top} \\ -y_{\max}^2 Y^{-1} & -y_{\max}^2 Y^{-1} & C^{\top} \\ C & C & -\beta I \end{bmatrix} \leqslant 0, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \gamma(k) \end{bmatrix} > 0, \ \begin{bmatrix} -\mu^{-1} & \varepsilon^{-1} \\ \varepsilon^{-1} & -1 \end{bmatrix} \leqslant 0.$$

其中:

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k),$$
$$y(k-i|k-i) = y(k-i),\ i = 0, 1, \cdots, d$$
$$y_{\rm d}^{\top} = [y^{\top}(k-1|k-1) \ \cdots \ y^{\top}(k-d|k-d)],$$
$$C_{\rm s} = {\rm diag}\{\underbrace{CS^{-1}C^{\top} \cdots CS^{-1}C^{\top}}_{d}\},$$
$$\Omega_{11} = \begin{bmatrix} -S-Q+X & -S-Q+Y^{-1} \\ -S-Q+Y^{-1} & Y^{-1} \end{bmatrix},$$
$$\Omega_{31} = \begin{bmatrix} XA+\hat{B}C & \hat{A} \\ A & A+B\hat{C} \end{bmatrix},$$
$$\Omega_{32} = \begin{bmatrix} XA_{\rm d} \\ A_{\rm d} \end{bmatrix},\ \Omega_{33} = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix},$$
$$\Omega_{43} = [D^{\top}X \ \ D^{\top}],\ \Omega_{51} = [E_1 \ \ E_1 + E_2\hat{C}],$$
$$\Omega_{61} = \begin{bmatrix} 0 & S+Q \\ 0 & \hat{C} \end{bmatrix},\ \Omega_{66} = \begin{bmatrix} S+Q & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{bmatrix}$$

有解, 则系统(1)存在鲁棒预测输出反馈控制器(3), 且性能指标$J(k) \leqslant \gamma(k)$. 其中, * 处的矩阵块可以由矩阵的对称关系得到.

证 选取离散Lyapunov-Krasovskii 泛函(7), 对$\bar{V}(x(k+i|k))$沿系统轨迹求一阶前向差分方程可得

$$\begin{aligned} &\Delta\bar{V}(x(k+i|k)) = \\ &\bar{V}(x(k+i+1|k)) - \bar{V}(x(k+i|k)) = \\ &z^{\top}(k)\Gamma z(k) - \bar{x}(k+i|k)^{\top}\tilde{Q}\bar{x}(k+i|k). \quad (12) \end{aligned}$$

其中:

$$\tilde{S} = {\rm diag}\{S, 0\},$$
$$z^{\top}(k) = [\bar{x}^{\top}(k+i|k) \ \ x^{\top}(k+i-d|k)],$$
$$\Gamma = -{\rm diag}\{P-\tilde{S}-\tilde{Q}, S\} + [\tilde{A} \ \ \tilde{A}_{\rm d}]^{\top}P[\tilde{A} \ \ \tilde{A}_{\rm d}].$$

若 $\Gamma < 0$, 则 $\Delta\bar{V}(x(k+i|k)) \leqslant -\bar{x}^{\top}(k+i|k)\tilde{Q}\bar{x}(k+i|k) \leqslant 0$ 保证了 $\bar{V}(x(k+i|k))$ 的单调递减性. 由于 $\bar{x}(k+i|k) = \bar{x}(k+i|k+i) = \bar{x}(k+i)$, 故 $\Delta\bar{V}(x(k+i|k)) = \Delta\bar{V}(x(k+i|k+i)) < 0$, 从而保证了系统(1)的鲁棒渐近稳定, 且定理1在k时刻的任何可行解在$t > k$时刻仍然可行. 进一步根据引理1, 对于任意正整数K,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{K}\bar{x}^{\top}(k+i|k)\tilde{Q}\bar{x}(k+i|k) \leqslant \\ &-\sum_{i=0}^{K}\Delta\bar{V}(x(k+i|k+i)) = \\ &-\bar{V}(x(k+K+1|k) + \bar{V}(x(k|k)) < \\ &\bar{V}(x(k|k)), \quad (13) \end{aligned}$$

为了使性能指标 $J(k)$ 收敛, 令 $x(k+K|k) = 0, K \geqslant p$, 则$\bar{V}(x(k+K+1|k) = 0, K \geqslant p$. 当$K \to p$时, 可得式(6).

利用Schur补性质, $\Gamma < 0$等价于

$$\begin{bmatrix} -P+\tilde{S}+\tilde{Q} & 0 & \tilde{A}^{\top} \\ 0 & -S & \tilde{A}_{\rm d}^{\top} \\ \tilde{A} & \tilde{A}_{\rm d} & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (14)$$

定义矩阵 J

$$J = \begin{bmatrix} -P+\tilde{S}+\tilde{Q} & 0 & \bar{A}^{\top} \\ 0 & -S & \bar{A}_{\rm d}^{\top} \\ \bar{A} & \bar{A}_{\rm d} & -P^{-1} \end{bmatrix}.$$

根据文[7]中的引理2, 式(14)对所有满足 $F^{\top}F \leqslant \mu I$ 的矩阵F 成立当且仅当存在常数 $\varepsilon \geqslant \sqrt{\mu}$, 使得

$$J + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{D} \end{bmatrix}^{\top} + \varepsilon[\bar{E}_1 \ \bar{E}_{\rm d} \ 0]^{\top}[\bar{E}_1 \ \bar{E}_{\rm d} \ 0] < 0,$$

应用矩阵的Schur补性质, 上式等价于

$$\begin{bmatrix} -P+\tilde{S}+\tilde{Q} & * & * & * & * \\ 0 & -S & * & * & * \\ \bar{A} & \bar{A}_{\rm d} & -P^{-1} & * & * \\ 0 & 0 & \bar{D}^{\top} & -\varepsilon^{-1}I & * \\ \bar{E}_1 & \bar{E}_{\rm d} & 0 & 0 & -\varepsilon^{-1}I \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

由于在矩阵不等式(15)中, 控制器系数矩阵与其它变量以非线性方式耦合在一起, 因此难以从式(15)直接确定这些变量. 以下应用文献[8]中提出的变量变换思想, 给出鲁棒预测输出反馈控制器的设计方法.

首先将矩阵 P 和 P^{-1} 作以下分块:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^{\top} & W \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} X & M \\ M^{\top} & Z \end{bmatrix}. \quad (16)$$

其中X和Y是n阶的对称正定矩阵. 由等式$P^{-1}P=I$可得

$$MN^{\top}=I-XY. \tag{17}$$

定义矩阵

$$U_1=\begin{bmatrix}X & I\\ M^{\top} & 0\end{bmatrix},\ U_2=\begin{bmatrix}I & I\\ 0 & N^{\top}Y^{-1}\end{bmatrix}, \tag{18}$$

则以下关系式成立

$$\begin{aligned}&\mathrm{diag}\{I,Y^{-1}\}P^{-1}U_1=U_2,\\ &U_1^{\top}P^{-1}U_1=\Omega_{33}.\end{aligned}$$

引进变量变换

$$\begin{cases}\hat{A}=XA+\hat{B}C+XB\hat{C}+MA_{\mathrm{c}}N^{\top}Y^{-1},\\ \hat{B}=MB_{\mathrm{c}},\\ \hat{C}=C_{\mathrm{c}}N^{\top}Y^{-1}.\end{cases} \tag{19}$$

则运用矩阵运算及利用关系式(18), 可得

$$\begin{cases}U_2^{\top}\tilde{S}U_2=\begin{bmatrix}S & S\\ S & S\end{bmatrix},\\ U_2^{\top}\tilde{Q}U_2=\begin{bmatrix}Q & Q\\ Q & Q+\hat{C}^{\top}R\hat{C}\end{bmatrix},\\ U_1^{\top}\bar{A}U_2=\Omega_{31},\ U_1^{\top}A_{\mathrm{d}}=\Omega_{32},\\ \bar{D}^{\top}U_1=\Omega_{43},\ \bar{E}_1U_2=\Omega_{51}.\end{cases} \tag{20}$$

定义矩阵 $K_1=\mathrm{diag}\{U_2,\ I,\ U_1,\ I,\ I\}$, 对式(15)分别左乘矩阵 $K_1^{\top}$ 和右乘矩阵 K_1, 进而应用关系式(20)和Schur补性质, 可得矩阵不等式(15)等价于式(10).

依据引理1, 最小化闭环鲁棒性能指标(5)等价于最小化$\bar{V}(x(k|k))$, 即:

$$\begin{aligned}&\min_{\gamma(k),P,S}\gamma(k)\\ &\text{s.t. } J(k)\leqslant\bar{V}(x(k|k))\leqslant\gamma(k).\end{aligned} \tag{21}$$

利用Schur补性质, 式(21)等价于

$$\begin{bmatrix}-\gamma(k)I & * & * & * & *\\ \bar{x}(k|k) & -P^{-1} & * & * & *\\ x(k-1|k-1) & 0 & -S^{-1} & * & *\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & *\\ x(k-d|k-d) & 0 & 0 & \ldots & -S^{-1}\end{bmatrix}\leqslant 0. \tag{22}$$

其中$x(k-i|k-i)=x(k-i),\ i=1,2,\cdots,d.$

定义矩阵 $K_2=\mathrm{diag}\{I,[C\ I],C,\cdots,C\}$, 对式(22)分别左乘矩阵 K_2 和右乘矩阵 $K_2^{\top}$, 进而应用式(16)与关系式 $y(k|k)=Cx(k|k)$, 可得矩阵不等式(22)等价于式(9).

利用关系式 $y(k+i|k)=Cx(k+i|k)$, $u(k+i|k)=C_{\mathrm{c}}\hat{x}(k+i|k)$, 输入输出约束可表示为

$$\begin{cases}\bar{x}^{\top}(k+i|k)C_u\bar{x}(k+i|k)<u_{\max}^2,\\ \bar{x}^{\top}(k+i|k)C_y\bar{x}(k+i|k)<y_{\max}^2,\end{cases} \tag{23}$$

其中: $C_u=\mathrm{diag}\{0,C_{\mathrm{c}}^{\top}C_{\mathrm{c}}\}$, $C_y=\mathrm{diag}\{C^{\top}C,0\}$.

由于 P, S 对称正定, 则由式(21)可得

$$\bar{x}^{\top}(k+i|k)P\bar{x}(k+i|k)\leqslant\alpha<\gamma(k). \tag{24}$$

令$\beta=\alpha^{-1}$, 利用S-procedure, 由式(23)(24)可得

$$\begin{bmatrix}-u_{\max}^2X & -u_{\max}^2 & 0\\ -u_{\max}^2 & -u_{\max}^2Y & Y\hat{C}^{\top}\\ 0 & \hat{C}Y & -\beta I\end{bmatrix}\leqslant 0,$$

$$\begin{bmatrix}-y_{\max}^2X & -y_{\max}^2 & C^{\top}\\ -y_{\max}^2 & -y_{\max}^2Y & YC^{\top}\\ C & CY & -\beta I\end{bmatrix}\leqslant 0, \tag{25}$$

定义矩阵$K_3=\mathrm{diag}\{I,Y^{-1},I\}$, 对式(25)分别左乘矩阵 K_3 和右乘矩阵 $K_3^{\top}$, 并由 $\beta\gamma(k)>1$,可得式(11). 定理得证.

由于式(9)~(11)中同时含有 Y,Y^{-1},S,S^{-1}, 因此, 定理1的条件是非线性的, 难以利用现有的凸优化技术进行求解. 为此, 应用文献[9]提出的线性化思想, 给出不确定离散时滞系统的鲁棒预测控制算法, 具体步骤如下:

Step 1 利用文献[9]的思想, 用 G, T, η 替换 Y^{-1}, S^{-1}, ε^{-1}, 从而将定理1的具有非线性矩阵不等式约束的最优化问题转化为以下具有LMI 约束的非线性规划问题:

$$\min_{X,Y,G,S,T,W,N,\hat{A},\hat{B},\hat{C},\eta}\ \mathrm{trace}(YG+ST) \tag{26}$$

s.t.

$$\begin{bmatrix}-\gamma(k)I & * & * & *\\ y(k|k) & -CYC^{\top} & * & *\\ \hat{x}(k|k) & -N^{\top}C^{\top} & -W & *\\ y_{\mathrm{d}} & 0 & 0 & -C_T\end{bmatrix}<0,$$

$$\begin{bmatrix}-\tilde{\Omega}_{11} & * & * & * & * & *\\ 0 & -S & * & * & * & *\\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & -\Omega_{33} & * & * & *\\ 0 & 0 & \Omega_{43} & -\eta I & * & *\\ \Omega_{51} & E_{\mathrm{d}} & 0 & 0 & -\eta I & *\\ \Omega_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_{66}\end{bmatrix}<0,$$

$$\begin{bmatrix}-u_{\max}^2X & -u_{\max}^2G & 0\\ -u_{\max}^2G & -u_{\max}^2G & \hat{C}^{\top}\\ 0 & \hat{C} & -\beta I\end{bmatrix}\leqslant 0,$$

$$\begin{bmatrix} -y_{\max}^2 X & -y_{\max}^2 G & C^{\top} \\ -y_{\max}^2 G & -y_{\max}^2 G & C^{\top} \\ C & C & -\beta I \end{bmatrix} \leqslant 0,$$

$$\begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \gamma(k) \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} -\mu^{-1} & \eta \\ \eta & -1 \end{bmatrix} \leqslant 0,$$

$$\begin{bmatrix} Y & I \\ I & G \end{bmatrix} \geqslant 0, \ \begin{bmatrix} S & I \\ I & T \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

其中:

$$C_T = \mathrm{diag}\{\underbrace{CTC^{\top} \cdots CTC^{\top}}_{d}\},$$

$$\tilde{\Omega}_{11} = \begin{bmatrix} -S-Q+X & -S-Q+G \\ -S-Q+G & G \end{bmatrix}.$$

在k时刻, 用MATLAB的LMI工具箱中的求解器mincx 迭代求解非线性规划问题(26), 得到$X, G, S, W, N, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ 等变量的一组特解, 使得滚动时域闭环系统的鲁棒预测性能指标值在线最小化.

Step 2 根据以下关系式

$$Y = G^{-1},\ M = (I - XY)N^{-\top},$$

$$C_{\mathrm{c}} = \hat{C}YN^{-\top},\ B_{\mathrm{c}} = M^{-1}\hat{B},$$

$$A_{\mathrm{c}} = M^{-1}(\hat{A} - XA - \hat{B}C - XB\hat{C})YN^{-\top}.$$

可以唯一确定控制器(3)的系数矩阵$A_{\mathrm{c}},\ B_{\mathrm{c}},\ C_{\mathrm{c}}$;

Step 3 将$A_{\mathrm{c}}, B_{\mathrm{c}}, C_{\mathrm{c}}$代入式(3), 计算得到在 k 时刻基于模型(1)的$k+1$时刻的状态预测值$x(k+1)$, 以及输出反馈控制器状态 $\hat{x}(k+1)$;

Step 4 基于$\hat{x}(k+1)$ 和$y(k)$的测量值, 重复步骤 Step 1～Step 3.

4 例子(Example)

考虑不确定离散时滞系统(1), 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0.13 & 0.63 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, A_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} 0.18 & 0.4 \\ 0.22 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1.4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.12 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = [0.3 \ \ -0.1], E_{\mathrm{d}} = [0.12 \ \ 0.3], E_2 = 0.7,$$

$$F(k) = \sin k,\ \mu = 1,\ d = 2.$$

闭环系统的初始状态为

$$\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ y(-i) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1.5 \end{bmatrix}, i = 0, 1, 2.$$

系统(1)的输入输出约束如下

$$-0.3 \leqslant u(k) \leqslant 0.3,\ -2 \leqslant y(k) \leqslant 2.$$

鲁棒预测性能指标的加权矩阵为

$$R = 1,\ Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

要求设计系统的鲁棒预测输出反馈控制器. 根据本文提出的鲁棒预测控制算法, 应用LMI Toolbox 中的mincx 求解器, 可得相应的非线性规划问题(26)有解. 由Step 2 可得每个采样时刻的输出反馈控制律, 代入式(3)得到如图2所示的控制信号. 根据定理1, 如图1, 3所示, 在输出反馈控制器的作用下, 输入输出受限的不确定时滞系统鲁棒稳定且滚动时域鲁棒预测性能指标在线最小化. 仿真结果验证了本文给出方法的有效性.

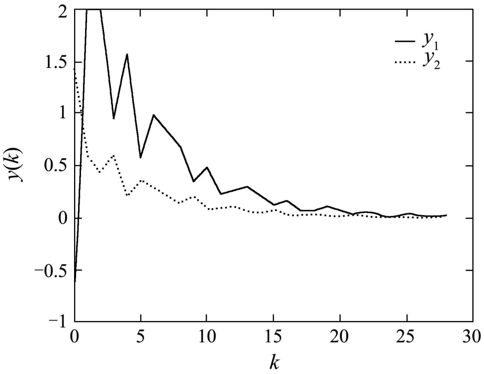

图 1　输出轨迹

Fig. 1　Output trajectories

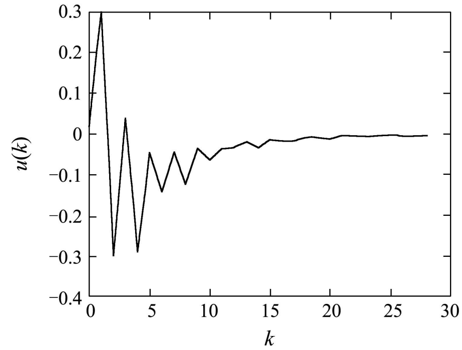

图 2　控制作用

Fig. 2　Control signals

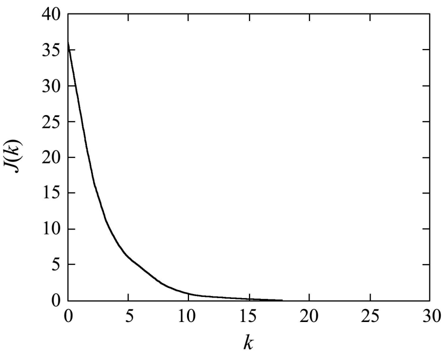

图 3　性能指标

Fig. 3　Guaranteed costs

5 结论 (Conclusions)

对于输入输出受限的不确定离散时滞系统, 本文提出了输出反馈鲁棒预测控制方法. 基于预测控制的滚动优化原理, 给出了输出反馈控制器存在的充分条件及其构造方法. 所得结果以非线性矩阵不等式的形式给出, 应用锥补线性化思想得到了控制器的迭代求解方法. 在每个采样时刻在线求解相应的具有线性矩阵不等式约束的非线性规划问题, 保证了滚动时域闭环系统鲁棒预测性能指标的在线最小化. 最后的仿真研究表明该方法有效可行, 易于求解, 适合于实际应用.

参考文献(References):

[1] KOTHARE V, MAORARI M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 1996, 32(10): 1361 – 1379.

[2] LU Y H, ARKUN Y. Quasi-min-max algorithms for LPV systems[J]. *Automatica*, 2000, 36(4): 527 – 540.

[3] LEE J W. Exponential stability of constrained receding horizon control with terminal ellipsoid constraints[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(1): 83 – 88.

[4] 张军, 裴润, 裴辛哲, 等. 不确定滞后系统的鲁棒模型预测控制[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(7): 212 – 215.
(ZHANG Jun, FEI Run, PEI Xinzhe, et al. Robust model for predictive control of uncertain systems with time-delay[J]. *Proc of the CSEE*, 2003, 23(7): 212 – 215.)

[5] 张军, 谢荣华, 计秉玉, 等. 输入受限时滞系统的鲁棒模型预测控制[J]. 电机与控制学报, 2004, 8(4): 362 – 365.
(ZHANG Jun, XIE Ronghua, JI Bingyu, et al. Robust model predictive control for time-delay systems with input constrains[J]. *Electric Machines and Control*, 2004, 8(4): 362 – 365.)

[6] 李亚东, 李少远. 基于LMI的多模型鲁棒预测控制[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(6) : 829 – 832.
(LI Yadong, LI Shaoyuan. LMI based multi-model robust predictive control[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(6): 829 – 832.)

[7] 俞立, 陈国定, 杨马英. 不确定系统的鲁棒输出反馈区域极点配置[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(2): 244 – 246.
(YU Li, CHEN Guoding, YANG Maying. Robust regional pole assignment of uncertain systems via output feedback controllers[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(2): 244 – 246.)

[8] SCHERER C, GAHINET P, CHILALI M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(7): 896 – 911.

[9] EI G L, OUSTRY F, AITRAMI M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1171 – 1176.

作者简介:

陈秋霞 (1982—), 女, 浙江工业大学硕士研究生, 研究领域为鲁棒预测控制、网络控制, E-mail: chenqiuxia101@sohu.com;

俞 立 (1961—), 男, 浙江工业大学教授, 博士生导师, 研究领域为鲁棒控制、时滞系统的分析与控制、网络控制等.