文章编号：1000−8152(2007)03−0431−04

一类变时滞神经网络的全局指数稳定性

周建平[1]， 陈红军[2]， 王林山[2,3]

(1. 安徽工业大学 计算机学院, 安徽 马鞍山 243002; 2. 聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059;
3. 中国海洋大学 数学系, 山东 青岛 266071)

摘要: 在不要求激活函数有界的前提下, 利用Lyapunov泛函方法和线性矩阵不等式(LMI)分析技巧, 研究了一类变时滞神经网络平衡点的存在性和全局指数稳定性. 给出判别网络全局指数稳定性的判据, 推广了现有文献中的一些结果. 这些判据具有LMI的形式, 进而易于验证. 仿真例子表明了所得结果的有效性.

关键词: 神经网络; 变时滞; 全局指数稳定
中图分类号: TP183; O175　　　**文献标识码**: A

Global exponential stability of a class of neural networks with time-varying delays

ZHOU Jian-ping[1]， CHEN Hong-jun[2]， WANG Lin-shan[2,3]

(1. School of Computer Science, Anhui University of Technology, Ma’ anshan Anhui 243002, China;
2. School of Mathematical Science, Liaocheng University, Liaocheng Shandong 252059, China;
3. Department of Mathematics, Ocean University of China, Qingdao Shandong 266071, China)

Abstract: Without assuming the boundedness of the activation functions, the existence and global exponential stability of the equilibrium point of a class of neural networks with time-varying delays is studied in this paper. By using Lyapunov functional method and linear matrix inequality (LMI) techniques, some criteria for the exponential stability of the neural networks are presented, which generalize the previous results in the literature. The criteria are easy to verify, since they take the form of LMI. An example is also given to illustrate the effectiveness of the obtained results.

Key words: neural networks; time-varying delays; global exponential stability

1　引言(Introduction)

在神经网络的硬件实现时, 受放大器开关速度和信号传输速度的限制, 时滞的存在是不可避免的. 时滞对神经网络的性能有较大的影响, 它可导致网络产生振荡和不稳定现象. 近年来, 时滞神经网络的稳定性分析引起了广泛的关注, 并且取得了重要成果[1~6]. 文献[1∼4]研究了常时滞细胞神经网络的全局渐近稳定性. 文献[5]研究了常时滞神经网络的全局渐近稳定性, 推广了文献[1∼4]中的结果. 在神经网络的动态变化过程中, 常时滞只是变时滞的一种近似. 此外, 神经网络对平衡点收敛速度的快慢是衡量网络性能的一种重要指标. 为了降低神经计算所需要的时间, 在神经网络的设计中, 通常要求网络中的平衡点具有指数收敛性[6]. 因此, 文献[1∼5]对常时滞神经网络全局渐近稳定性的研究存在较大的局限性. 本文借助于Lyapunov泛函方法和线性矩阵不等式(LMI)分析技巧, 在不要求激活函数有界的前提下, 研究了一类变时滞神经网络平衡点的存在性和全局指数稳定性, 获得具有LMI形式的判据. 这些判据推广了文献[1∼5]的结果, 并且借助于MATLAB中的LMI工具箱易于验证. 仿真例子表明了本文所得结果的有效性.

2　预备知识(Preliminaries)

考虑变时滞神经网络

$$\dot{x}(t)=-Cx(t)+Af(x(t))+Bf(x(t-\tau(t)))+I, \tag{1}$$

其中: $x(t)=[x_1(t)\ \ x_2(t)\ \ \cdots\ \ x_n(t)]^{\mathrm{T}}$为状态向量, $C=\operatorname{diag} c_i$为正的对角矩阵, $A=(a_{ij})_{n\times n}$为反

收稿日期: 2005−12−02; 收修改稿日期: 2006−07−02.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10171072).

馈矩阵, $B=(b_{ij})_{n\times n}$为时滞反馈矩阵, $f(x(\cdot))=[f_1(x_1(\cdot))\,f_2(x_2(\cdot))\cdots f_n(x_n(\cdot))]^{\mathrm{T}}$为激活函数向量, $0\leqslant\tau(t)\leqslant\tau$为可变时滞, $I=[I_1\,I_2\cdots I_n]^{\mathrm{T}}$为外部输入常向量. 系统(1)的初始条件为: $x(s)=\phi(s)$, $\phi(s)=[\phi_1(s)\,\phi_2(s)\cdots\phi_n(s)]^{\mathrm{T}}$, $\phi_i(s)\in C([-\tau,0],R)$.

假定激活函数$f_j(\cdot)$, $j=1,2,\cdots,n$满足以下条件:

H) 存在正的对角矩阵$\Sigma=\operatorname{diag}\sigma_j$, 对任意的$s_1,s_2\in\mathbb{R},s_1\neq s_2$有

$$0\leqslant\frac{f_j(s_1)-f_j(s_2)}{s_1-s_2}\leqslant\sigma_j,\ j=1,2,\cdots,n.$$

文中, 对任意的实对称矩阵P和Q, $P>Q(P\geqslant Q)$表示$P-Q$是正定的(半正定的)对称矩阵, $\lambda_M(P)(\lambda_m(P))$表示矩阵$P$的最大(最小)特征值.

定义 1 称实方阵Q为Lyapunov对角稳定的($Q\in LDS$), 若存在对角矩阵$P>0$使得$\frac{1}{2}[PQ+Q^{\mathrm{T}}P]>0$.

引理 1[7] 下面的3个矩阵不等式是相互等价的:

i) $\begin{bmatrix}P & S\\ S^{\mathrm{T}} & Q\end{bmatrix}>0$;

ii) $P>0,Q-S^{\mathrm{T}}P^{-1}S>0$;

iii) $Q>0,P-SQ^{-1}S^{\mathrm{T}}>0$.

引理 2[8] 设Q_1,Q_2,Q_3为维数适宜的实矩阵并且$Q_3>0$, 则有$Q_1^{\mathrm{T}}Q_3Q_1+Q_2^{\mathrm{T}}Q_3^{-1}Q_2\geqslant Q_1^{\mathrm{T}}Q_2+Q_2^{\mathrm{T}}Q_1$.

引理 3[9] 若条件H)满足并且$C\Sigma^{-1}-A\in LDS$, 则对任意的$I\in\mathbb{R}^n$, $H(x)=-Cx+Af(x)+I$是$\mathbb{R}^n$上的一个同胚映射.

引理 4 设Q_1与Q_2是维数相同的实对称矩阵, 若$Q_1>0$, 则存在正常数ω_0使得$Q_1-\omega_0Q_2>0$.

证 因为$\lim\limits_{\omega\to0}\lambda_m(Q_1-\omega Q_2)=\lambda_m(Q_1)>0$, 故存在$\omega_0>0$使得$\lambda_m(Q_1-\omega_0Q_2)>0$, 即有$Q_1-\omega_0Q_2>0$.

3 主要结果(Main results)

定理 1 假定条件 H) 成立并且$0\leqslant\dot\tau(t)\leqslant\eta<1$, 若存在$P=\operatorname{diag}p_i>0$和$Q=(q_{ij})_{n\times n}>0$, 使得

$$\Omega=\begin{bmatrix}2PC\Sigma^{-1}-PA-A^{\mathrm{T}}P-B^{\mathrm{T}}QB & -P\\ -P & (1-\eta)Q\end{bmatrix}>0,\tag{2}$$

则对任意的$I\in\mathbb{R}^n$, 系统(1)存在全局指数稳定的平衡点.

证 i) 平衡点的存在唯一性.

由引理1, 若$\Omega>0$, 则有

$$2PC\Sigma^{-1}-PA-A^{\mathrm{T}}P-B^{\mathrm{T}}QB-(1-\eta)^{-1}PQ^{-1}P>0.\tag{3}$$

因为$0\leqslant\eta<1$, 由引理2知

$$B^{\mathrm{T}}QB+(1-\eta)^{-1}PQ^{-1}P\geqslant B^{\mathrm{T}}QB+PQ^{-1}P\geqslant PB+B^{\mathrm{T}}P.\tag{4}$$

由式(3)(4)得

$$2PC\Sigma^{-1}-P(A+B)-(A+B)^{\mathrm{T}}P>0.$$

易见$C\Sigma^{-1}-(A+B)\in LDS$. 若条件H)成立, 则由引理3知对任意的$I\in\mathbb{R}^n$, $H(x)=-Cx+(A+B)f(x)+I$是$\mathbb{R}^n$上的一个同胚映射, 从而存在唯一的$x^*\in\mathbb{R}^n$, 使得

$$H(x^*)=-Cx^*+(A+B)f(x^*)+I=0.$$

即, 对任意的$I\in\mathbb{R}^n$, 系统(1)有唯一的平衡点x^*.

ii) 平衡点的全局指数稳定性.

由式(2)知, 存在$k\in(0,\lambda_m(C)/2)$使得

$$\begin{bmatrix}\Theta & -P\\ -P & (1-\eta)\mathrm{e}^{-2k\tau}Q\end{bmatrix}>0,$$

其中: $\Theta=2P(C-2kE)\Sigma^{-1}-PA-A^{\mathrm{T}}P-B^{\mathrm{T}}QB$, E为$n\times n$单位矩阵. 由引理4知, 存在常数$\omega_1>0$使得

$$\begin{bmatrix}\Theta & -P\\ -P & (1-\eta)\mathrm{e}^{-2k\tau}Q\end{bmatrix}-\omega_1\begin{bmatrix}-A^{\mathrm{T}}\\ -E\end{bmatrix}\cdot(2C-2kE)^{-1}[-A\ \ -E]>0.$$

由引理1得

$$\Gamma=\begin{bmatrix}2\omega_1(C-kE) & -\omega_1A & -\omega_1E\\ -\omega_1A^{\mathrm{T}} & \Theta & -P\\ -\omega_1E & -P & (1-\eta)\mathrm{e}^{-2k\tau}Q\end{bmatrix}>0.\tag{5}$$

令$u(\cdot)=x(\cdot)-x^*$, 系统(1)可改写为

$$\dot u(t)=-Cu(t)+Ag(u(t))+Bg(u(t-\tau(t))),\tag{6}$$

其中:

$$u(t)=[u_1(t)\ \ u_2(t)\ \cdots\ u_n(t)]^{\mathrm{T}},$$
$$g(u(\cdot))=[g_1(u_1(\cdot))\ \ g_2(u_2(\cdot))\ \cdots\ g_n(u_n(\cdot))]^{\mathrm{T}},$$
$$g_j(u_j(\cdot))=f_j(u_j(\cdot)+x_j^*)-f_j(x_j^*),j=1,2,\cdots,n.$$

因为$f_j(\cdot),j=1,2,\cdots,n$满足条件H), 易见

$$g_j(0)=0,0\leqslant g_j(s)/s\leqslant\sigma_j,\tag{7}$$

其中$s \in \mathbb{R}, s \neq 0, j = 1, 2, \cdots, n$.

构造径向无界的Lyapunov泛函如下:

$$V(u(t)) = \omega_1 \mathrm{e}^{2kt} u^{\mathrm{T}}(t)u(t) + 2\mathrm{e}^{2kt}\sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^{u_i(t)} g_i(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{t-\tau(t)}^{t} \mathrm{e}^{2ks} g^{\mathrm{T}}(u(\xi))B^{\mathrm{T}}QBg(u(\xi))\mathrm{d}\xi. \tag{8}$$

沿式(6)的轨线计算$V(u(t))$的导数, 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(u(t)) = {} & 2\omega_1 k\mathrm{e}^{2kt}u^{\mathrm{T}}(t)u(t) + 2\omega_1\mathrm{e}^{2kt}u^{\mathrm{T}}(t)[-Cu(t) + Ag(u(t)) + Bg(u(t-\tau(t)))] + \\ & 4k\mathrm{e}^{2kt}\sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{u_i(t)} g_i(\xi)\mathrm{d}\xi + 2\mathrm{e}^{2kt}g^{\mathrm{T}}(u(t)) \cdot P[-Cu(t) + Ag(u(t)) + Bg(u(t-\tau(t)))] + \\ & \mathrm{e}^{2kt}g^{\mathrm{T}}(u(t))B^{\mathrm{T}}QBg(u(t)) - (1-\dot{\tau}(t)) \cdot \mathrm{e}^{2k(t-\tau(t))}g^{\mathrm{T}}(u(t-\tau(t)))B^{\mathrm{T}}QBg(u(t-\tau(t))).\end{aligned} \tag{9}$$

由式(7)知

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{u_i(t)} g_i(\xi)\mathrm{d}\xi \leqslant \sum_{i=1}^{n}p_i\int_0^{u_i(t)} g_i(u_i(t))\mathrm{d}\xi = g^{\mathrm{T}}(u(t))Pu(t), \\ g^{\mathrm{T}}(u(t))P(2kE-C)u(t) \leqslant g^{\mathrm{T}}(u(t))P(2kE-C)\Sigma^{-1}g(u(t)). \end{cases} \tag{10}$$

由式(5)(9)(10)以及$0 \leqslant \tau(t) \leqslant \tau, 0 \leqslant \dot{\tau}(t) \leqslant \eta < 1$, 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(u(t)) \leqslant {} & \mathrm{e}^{2kt}[2\omega_1 u^{\mathrm{T}}(t)(kE-C)u(t) + 2\omega_1 u^{\mathrm{T}}(t)Ag(u(t)) + 2\omega_1 u^{\mathrm{T}}(t)Bg(u(t-\tau(t))) + \\ & g^{\mathrm{T}}(u(t))(2P(2kE-C)\Sigma^{-1} + PA + A^{\mathrm{T}}P + B^{\mathrm{T}}QB)g(u(t)) + 2g^{\mathrm{T}}(u(t))PBg(u(t-\tau(t))) - \\ & (1-\eta)\mathrm{e}^{-2k\tau}g^{\mathrm{T}}(u(t-\tau(t)))B^{\mathrm{T}}QBg(u(t-\tau(t)))] = \\ & -\mathrm{e}^{2kt}[u^{\mathrm{T}}(t)\ \ g^{\mathrm{T}}(u(t))\ \ g^{\mathrm{T}}(u(t-\tau(t)))\ \ B^{\mathrm{T}}] \times \\ & \Gamma\begin{bmatrix} u(t) \\ g(u(t)) \\ Bg(u(t-\tau(t))) \end{bmatrix} < 0,\ u(t) \neq 0.\end{aligned}$$

从而$V(u(t)) \leqslant V(u(0))$. 此外, 由式(8)知$V(u(t)) \geqslant \omega_1\mathrm{e}^{2kt}\|u(t)\|^2$并且

$$V(u(0)) \leqslant [\omega_1 + 2\lambda_M(P\Sigma) + \frac{1}{2}\Upsilon]\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}\|\phi(s)-x^*\|^2,$$

其中: $\Upsilon = k(1-\mathrm{e}^{-2k\tau})\lambda_M(\Sigma^2)\lambda_M(B^{\mathrm{T}}QB)$, $\|\cdot\|$表示$\mathbb{R}^n$上的Euclidean范数. 容易导出

$$\|u(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{1}{\omega_1}(\omega_1 + 2\lambda_M(P\Sigma) + \frac{1}{2}\Upsilon)\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}\|\phi(s)-x^*\|^2}\mathrm{e}^{-kt}.$$

因此, 对任意的$I \in \mathbb{R}^n$, 系统(6)的原点是全局指数稳定的, 进而系统(1)的平衡点具有全局指数稳定性.

推论 1　假定条件H)成立并且$\tau(t) \equiv \tau > 0$, 若存在$P = \mathrm{diag}\ p_i > 0$和$Q = (q_{ij})_{n\times n} > 0$使得

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 2PC\Sigma^{-1} - PA - A^{\mathrm{T}}P - B^{\mathrm{T}}QB & -P \\ -P & Q \end{bmatrix} > 0, \tag{11}$$

则对任意的$I \in \mathbb{R}^n$, 系统(1)存在全局指数稳定的平衡点.

注 1　当系统(1)中$\tau(t) \equiv \tau > 0$时, 文献[5]给出了如下结果: (Δ) 若条件H)成立并且存在矩阵$P = \mathrm{diag}\ p_i > 0$, $S > 0$以及常数$\beta > 0$使得$2PC\Sigma^{-1} - PA - A^{\mathrm{T}}P - \beta B^{\mathrm{T}}SB - \beta^{-1}PS^{-1}P > 0$, 则系统(1)的平衡点是全局渐近稳定的. 易见, 判据(Δ)中的正常数β是一个冗余的参数. 令$D = \beta S$,借助引理1, (Δ)与文中推论1的条件是一致的. 从而, 推论1在以下3个方面优于文献[5]中的结果: 1) 在不要求激活函数为有界函数的前提下, 保证了平衡点的存在唯一性; 2) 获得了平衡点的全局指数稳定性; 3) 其条件具有LMI的形式, 利用MATLAB中的LMI工具箱易于验证. 本文推广了文献[5]的结果, 进而推广了文献[1～4]的结果.

4　仿真示例(Simulation example)

考虑具有两个神经元的时滞神经网络

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(x_1(t)) \\ f_2(x_2(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(x_1(t-1)) \\ f_2(x_2(t-1)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

取$f_j(s) = 2s, j = 1, 2$, 在MATLAB中求解LMI(11)可得

$$P = \begin{bmatrix} 0.2995 & 0 \\ 0 & 0.3781 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1.0881 & 0.0269 \\ 0.0269 & 1.2454 \end{bmatrix},$$

由推论1知对任意的$I_1, I_2 \in \mathbb{R}$, 系统(12)存在唯一的平衡点, 并且是全局指数稳定的. 当系统(12)的初始条件为$\phi_1(s) = -0.7, \phi_2(s) = 2.1, s \in [-3, 0]$时, 取$I_1 = -0.7, I_2 = 2.1$, 应用Runge-Kutta法求解式(12), 系统的状态曲线如图1所所示, 仿真结果表明

了推论1的有效性.

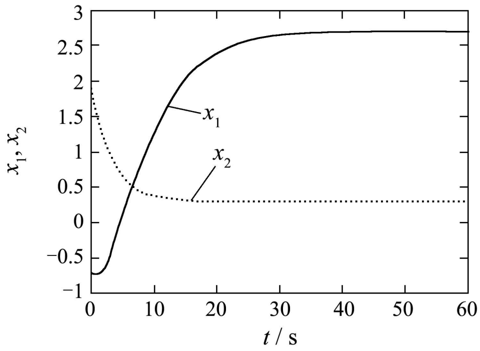

图 1 系统(12)的状态曲线

Fig. 1 State curves of system (12)

5 结论(Conclusion)

本文利用Lyapunov泛函方法和线性矩阵不等式(LMI)分析技巧, 在不要求激活函数有界的条件下, 获得了一类变时滞神经网络存在全局指数稳定的平衡点的判据, 推广了现有文献中的一些结果.

参考文献(References):

[1] ARIK S, JAVSANOGLU V. On the global asymptotic stability of delayed cellular neural networks[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 2000, 47(4): 571 – 574.

[2] LIAO T, WANG F. Global stability for cellular neural networks with time delay[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems Ⅱ*, 2000, 47(11): 1481 – 1485.

[3] CAO J. Global stability conditions for delayed CNNs[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems Ⅰ*, 2001, 48(11): 1330 – 1333.

[4] ARIK S. An analysis of global asymptotic stability of delayed cellular neural networks[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2002, 13(5): 1239 – 1242.

[5] ARIK S. Global asymptotic stability of a larger class of neural networks with constant time-delay[J]. *Physics Letters A*, 2003, 311(6): 504 – 511.

[6] WANG L, XU D. Global exponential stability of reaction-diffusion neural networks with time-delays[J]. *Science in China F*, 2003, 46(6): 466 – 474.

[7] BOYD S, GHAOUI L, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

[8] SANCHEZ E, PEREZ J. Input-to-state stability (ISS) analysis for dynamic NN[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems Ⅰ*, 1999, 46(1): 1395 – 1398.

[9] FORTI M, TASI A. New conditions for global stability of neural networks with application to linear and quadratic programming problems[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems Ⅰ*, 1995, 42(7): 354 – 366.

作者简介:

周建平 (1982—), 男, 硕士, 安徽工业大学计算机学院, 研究方向为时滞神经网络的稳定性, E-mail: jianping1617@yahoo.com.cn;

陈红军 (1974—), 男, 聊城大学硕士研究生, 研究方向为时滞系统;

王林山 (1956—), 男, 博士, 中国海洋大学数学系教授, 博士生导师, 研究方向为泛函微分方程理论及其在神经网络中的应用, E-mail: wls115@sohu.com.