第 24 卷第 5 期 控制理论与应用 Vol. 24 No. 5
2007 年 10 月 Control Theory & Applications Oct. 2007

文章编号：1000−8152(2007)05−0841−05

随机运动目标搜索问题的最优控制模型

朱清新, 卿 利, 彭 博

(电子科技大学 计算机科学与工程学院, 四川 成都 610054)

摘要:提出了$\mathbb{R}^n$ 空间中做布朗运动的随机运动目标的搜索问题的最优控制模型. 采用分析的方法来研究随机运动目标的最优搜索问题, 并将原问题转化为由一个二阶偏微分方程(HJB方程)所表示的确定性分布参数系统的等价问题, 推导出随机运动目标的最优搜索问题的HJB方程, 并证明了该方程的解即是所寻求的最优搜索策略. 由此给出了一个计算最优搜索策略的算法和一个实例.

关键词: 最优搜索; 随机运动目标; 最优控制; HJB方程; 最优化原理

中图分类号: O229 **文献标识码**: A

Optimal control model of search problem for randomly moving targets

ZHU Qing-xin, QING Li, PENG Bo

(School of Computer Science and Engineering, University of Electronic and Technology of China, Chengdu Sichuan 610054, China)

Abstract: The optimal search problem for a randomly moving target perturbed by a Brownian motion is considered in this paper. Firstly, an optimal control model for the search problem is introduced. Based on the principle of optimality, the search problem is then transformed to an equivalent problem of deterministic distributed parameters system, represented by a second order PDE (HJB equation). The solution of HJB equation is the optimal search strategy for the original search problem. An algorithm for computing the optimal search strategy is also presented. Finally, a simple example is given to illustrate the proposed approach.

Key words: optimal search; random moving target; optimal control; HJB equation; principle of optimality

1 引言(Introduction)

最优搜索理论研究如何以一种“最佳”的方式去搜索目标[1]. 早期的研究主要集中于静止目标搜索问题. Koopman[2] 研究了探测函数为指数形式时如何最大化发现目标的概率, 并提出在连续目标空间中和搜索资源连续可分的条件下的最优搜索策略. Kadane[3]提出了离散空间的最优搜索模型. 在上述的研究中, 一个主要的假设是搜索者已经知道目标初始位置的概率分布. ZHU Qingxin[4~6]研究了目标分布函数未知时的最优搜索问题. Trummel和Weisigner[7]证明了寻找最优搜索路径的问题是一个NP完备性问题. 因此, 在计算最优搜索路径时, 需要在理论上的最优值和算法上的实现可行性之间取得折衷.

近年来的研究重心逐渐从数学分析方面的求解转移到了最优搜索路径或资源分配的算法设计, 而运动目标的搜索问题是当前的研究热点. 重点是针对两种特殊类型的运动目标的研究: 一是有条件的确定性运动目标, 这种类型常可以被简化为一个关于静止目标的等价问题[8]. 二是做马尔可夫(Markovian)运动的目标. Brown[9] 对于离散空间中作离散时间马尔可夫运动的目标进行了研究, 在探测函数为指数形式的情况下给出了最优搜索策略的充分必要条件, 以及一个有效的迭代算法. Lukka[10] 考虑了$\mathbb{R}^2$ 空间中的随机运动目标最优搜索问题, 得出了搜索者的最优运动轨迹的必要条件. Mangel[11] 研究了$\mathbb{R}^2$ 空间中以扩散过程的形式运动的运动目标搜索问题. 假设目标是在一个平面上运动, 而搜索者是在三维空间中运动. 在这篇论文里, 搜索密度函数可通过渐进地求解密度函数所满足的搜索方程而近似地计算出来, 由此可以计算出关于目标位置和搜索不成功的联合概率密度函数. Ohsumi[12] 考虑了目标做马尔可夫运动时的最优搜索策略, 通过选择搜索者运动状态的控制变量使得在一个固定的时刻发现目标的概率达到最大化. 在另一篇论文中Ohsumi[13] 考虑了通过最小化一个具

收稿日期: 2005−07−19; 收修改稿日期:2006−10−30.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60671033); 教育部博士点基金资助项目(20060614015).

有指数形式的成本泛函而实现的最优搜索策略, 即把最优搜索问题作为一个最优控制问题来描述, 其中成本泛函反映了发现目标的探测概率.

本文研究$\mathbb{R}^n$ 空间中做布朗运动(Brownian motion)的随机运动目标的最优搜索问题的随机最优控制模型. 不同于上面提到的几位学者所使用的概率论方法, 本文采用分析的方法来研究随机运动目标的最优搜索问题, 并将原问题转化为由一个偏微分方程(HJB方程)所表示的确定性分布参数系统的等价问题, 应用最优控制理论与方法对其进行研究. 本文内容安排如下. 第2节引入该领域的一些基本理论和结果, 即最优化原理和Itô公式; 第3节推导随机运动目标最优搜索问题的动态规划方程(HJB方程), 在本文的模型中对探测函数的形式没有限制; 在第4节中进一步证明上节中所得到的HJB方程的解即是所寻求的最优搜索策略, 并给出一个计算最优搜索策略的算法. 第5节讨论一个实例.

2 数学基础(Mathematical background)

2.1 最优化原理(Principle of optimality)

考虑如下的受控随机微分方程(CSDE)

$$\begin{cases} \mathrm{d}y(t) = a^u(t, y(t))\mathrm{d}t + \sigma^u(t, y(t))\mathrm{d}W_t, \\ y(0) \ = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

这里$a^u(t, y(t)) \equiv a(t, y(t), u(t, y(t))), \sigma^u(t, y(t)) \equiv \sigma(t, y(t), u(t, y(t)))$ 是$\mathbb{R}^n$中的线性算子.

定义 1 设 $y(t, x)$ 是方程 (1) 对应初始条件$y(t) = x$的解, ℓ, ϕ_0是已知函数. 令

$$\ell^u(\theta, y_{t,x}(\theta)) = \ell(\theta, y_{t,x}(\theta), u(\theta, y_{t,x}(\theta))),$$

$$J(t, x, u) = \mathrm{E}\{\int_t^T \ell^u(\theta, y_{t,x}(\theta))\mathrm{d}\theta + \phi_0(y_{t,x}(T))\}.$$

则 $\phi(t, x) = \inf\{J(t, x, u) \mid u \in \mathcal{U}_{ad}\}$, 称为价值函数 (value function). 其中$\mathcal{U}_{ad}$是容许控制集.

定理 1 (最优化原理)[14]. 令 $t \leqslant T$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U}_{ad}$, 设u在区间$[t, s]$上的限制仍然用u表示, 则对于所有的$(s < t < T)$ 有

$$\phi(t, x) = \inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}} \mathrm{E}\{\int_t^s \ell^u(\theta, y_{t,x}(\theta))\mathrm{d}\theta + \phi(s, y_{t,x}(s))\}.$$

2.2 随机过程的微分(Differentials of stochastic processes)

设$(\mathit{\Omega}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t \uparrow, P)$ 是筛选概率空间(filtered probability space), 即$(\mathit{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间且$\mathcal{F}_t$是$\mathcal{F}$的σ-子代数的集合, 使得如果$s < r$ 时有$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_r$. 设$I$是实数空间的一个子集(指标集), 如果

$$\begin{cases} \mathrm{E}|\xi(t)| < \infty, \qquad t \in I, \\ \mathrm{E}\{\xi(t)|\mathcal{F}_t\} = \xi(s), s \leqslant t. \end{cases}$$

那么概率空间上的随机过程$\xi = \{\xi(t), t \in I\}$ 叫做$\mathcal{F}_t$–鞅(martingale). 如果$\xi(t)$还有如下的分解形式:

$$\xi(t) = \xi(0) + V(t) + M(t),$$

其中$V(t)$是一个具有有界方差的$\mathcal{F}_t$可测过程, 且$M(t)$是一个$\mathcal{F}_t$-鞅, 那么随机过程$\xi = \{\xi(t), t \in I\}$ 被称为半鞅(semimartingale).

在实分析中, 如果$f = f(t, x)$ 在$I \times \mathbb{R}^n$上的t和x处都具有一阶导数, 那么对任意$x(t) \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, 有如下的微分链式法则:

$$\frac{\mathrm{d}f(t, x(t))}{\mathrm{d}t} = f'_t + (f'_x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}),$$

或等价地

$$\mathrm{d}f = f'_t\mathrm{d}t + (f'_x, \mathrm{d}x),$$

其中$(\cdot, \cdot)$表示$\mathbb{R}^n$空间中的内积, f' 表示f 的一阶偏导数. 如果$x(t)$ 是个随机过程, 这个公式一般就不成立了. 下面的定理给出随机过程的微分法则.

定理 2 (Itô公式)[15]. 设$\xi(t)$ 是一个半鞅, $V(t)$和$M(t)$ 都是连续的. 假定$f(t, x)$ 关于$t \in I$ 有一阶导数,关于$x \in \mathbb{R}^n$ 有二阶导数, 且所有这些导数都是连续的, 那么$f(t, \xi(t))$ 的微分由下式给出:

$$\mathrm{d}f = f'_t\mathrm{d}t + (f'_x, \mathrm{d}\xi) + \frac{1}{2}\langle f''_{xx}\mathrm{d}\xi, \mathrm{d}\xi\rangle =$$

$$f'_t\mathrm{d}t + (f'_x, \mathrm{d}V) + (f'_x, \mathrm{d}M) + \frac{1}{2}\langle f''_{xx}\mathrm{d}M, \mathrm{d}M\rangle.$$

在上面的公式中, 算子$\langle\cdot, \cdot\rangle$ 的定义如下. 设

$$\xi(t) = \int_0^t f(\theta)\mathrm{d}W(\theta), \ \ \eta(t) = \int_0^t g(\theta)\mathrm{d}W(\theta),$$

那么

$$\langle\xi(t), \eta(t)\rangle = \int_0^t |f(\theta)g(\theta)|\mathrm{d}\theta,$$

特别地,

$$\langle\xi(t)\rangle = \langle\xi(t), \xi(t)\rangle = \int_0^t |f(\theta)|^2\mathrm{d}\theta$$

称为二次变分过程.

3 随机运动目标的最优搜索模型(Optimal search model for random moving targets)

假设目标做布朗运动, 其运动轨迹满足如下的随机微分方程:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = a(t, x(t))\mathrm{d}t + \sigma(t, x(t))\mathrm{d}W(t), \\ x(0) \ = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

其中$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $W(t) \in \mathbb{R}^n$ 是标准布朗运动(维纳过程). a 和σ分别是已知的向量和矩阵函数. 目标

的初始位置x_0 未知, 但是对于搜索者而言, 目标的初始值的概率分布函数是已知的(或是预先假定的). 从搜索者的角度观察到的搜索路径如下:

$$\begin{cases} \mathrm{d}z(t) = h(t, z(t), u(t, x))\mathrm{d}t, \\ z(0) = z_0, 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{3}$$

这里$z(t) \in \mathbb{R}^n$ 和$u(t, x) \in \mathbb{R}^m, (m \leqslant n)$ 分别是状态函数和控制函数, h为一个非线性函数. 现在可以把针对这个运动目标的最优搜索问题描述如下: 在可容许的控制集合中找到一个控制函数$u^*(t, x)$, 使得搜索者和目标相遇的时间达到最小值. 换句话说, 即寻找$u^*(t, x) \in \mathcal{U}_{ad}$ 使得$\{t|x(t) = z(t)\}$达到最小值.

下面将最优搜索问题的解转化为最优反馈控制系统的HJB方程的解,并证明最优搜索策略的存在性.

4 HJB方程及其最优控制准则(HJB equation and optimal control criteria)

4.1 最优搜索问题的HJB方程(HJB equation of optimal search problem)

设 $y^u(t) = x(t) - z(t)$, 由式(2)和(3)得到下面带有反馈的随机控制系统:

$$\begin{cases} \mathrm{d}y^u(t) = b^u(t, y)\mathrm{d}t + \sigma(t, x)\mathrm{d}W(t), \\ y^u(0) \ = y_0, \end{cases} \tag{4}$$

其中$b^u(t, y) = a(t, x) - h(t, z, u(t, x)), y_0 = x_0 - z_0$. 于是最优搜索问题等价于对所有的 $u \in \mathcal{U}_{ad}$ 求方程 $y^u(t) = y(t, u(t)) = 0, (0 \leqslant t \leqslant T)$ 的最小正根. 而这个问题形式上又等价于求下面的泛函的最小值:

$$\min_{u \in U_{ad}} \mathrm{E}\{\int_0^T g^u(\theta, y^u(\theta))\mathrm{d}\theta\}, \tag{5}$$

其中

$$\begin{cases} g^u(t, y) = [(y^u)^{-1}\delta(t)]/T, 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ g^u(t, y) = 0, \qquad\qquad t_0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

这里 $t_0 = t_0(u)$ 是方程 $y^u(t) = 0$ 的最小根, $(y^u)^{-1}$ 是 y^u 在区间$[0, t_0]$ 上的逆函数(只需在0点处存在, 而在其它点处令其恒为0), $\delta(t)$ 是Kronecker Delta函数:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1\,, t = 0, \\ 0\,, t \neq 0. \end{cases}$$

事实上, 因为$g^u(t, y) = 0, (0 < t \leqslant T)$, 因此有

$$\int_0^T g^u(\theta, y^u(\theta))\mathrm{d}\theta = \\ \int_0^T g^u(0, y^u)\mathrm{d}\theta = \\ T \cdot (y^u)^{-1}(0)/T = t_0.$$

定义成本泛函如下:

$$J(u) = \mathrm{E}\{\int_0^T g^u(\theta, y^u(\theta))\mathrm{d}\theta + f(y^u(T))\}.$$

对于$0 \leqslant t < T$,$x \in \mathbb{R}^n$ 和$u \in \mathcal{U}_{ad}$, 设

$$\phi^u(t, x) = \mathrm{E}\{\int_t^T g^u(\theta, y^u_{t,x}(\theta))\mathrm{d}\theta + f(y^u_{t,x}(T))\}.$$

在给定当前状态$y(t) = x$ 时, 函数ϕ^u 决定了未来控制策略的开销. 定义价值函数如下:

$$\phi(t, x) = \inf\{\phi^u(t, x)|u \in \mathcal{U}_{ad}\}, \tag{6}$$

记 $G = [0, T] \times X$ 并且定义

$$C^{12}(G) = \{\phi(t, x)|存在连续偏导数\phi'_t, \phi'_x, \phi''_{xx}\}.$$

下面推导上述最优搜索问题的HJB方程.

定理 3　如果式 (6) 中定义的价值函数 $\phi \in C^{12}(G)$. 则 ϕ 必定满足下面的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)方程:

$$\begin{cases} \phi_t(t, x) + \inf\limits_{u \in \mathcal{U}_{ad}}\{A^u(t)\phi(t, x) + g^u(t, x)\} = 0, \\ \phi(T, x) = f(x), \end{cases}$$

其中

$$A^u(t)\phi(t, x) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma\sigma'\phi'_{xx}) + (b^u(t, x), \phi'_x),$$

这里: σ'表示矩阵σ的转置, $\mathrm{tr}(\cdot)$表示迹算子(trace operator).

证明可参见Ahmed[15].

4.2 最优控制准则(Optimal control criteria)

HJB方程的解给出了搜索问题的最优成本开销, 由此可以得到最优搜索策略.这个结果包含在下面的定理之中[15].

定理 4　(验证定理) 设$\phi^* \in C^{12}(G)$是HJB方程的解, 假设HJB方程在某个控制函数$u_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ 上取得最小值, 即

$$A^{u_0}\phi + g(t, x, u_0) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}}\{A^u\phi + g^u(t, x).\} \tag{7}$$

则HJB方程的解给出了价值函数, 即

$$\phi^* = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} \phi^u \equiv \phi_B,$$

所以u_0 就是最优控制准则.

验证定理将求解随机最优搜索问题转化成求解两个确定性的问题. 第1个问题是证明HJB方程的解的存在性, 并且在给定的终止条件下解HJB方程. 第2个问题是通过式(7)中给出的最小化条件, 找出相应的u_0来.

下面给出一个求解随机运动目标最优搜索问题的算法描述:

1) 根据目标的位置分布密度函数和机动能力选

择速度函数$a_0(t,x)$,$0\leqslant t\leqslant T$, 获得目标的运动方程:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=a_0(t,x(t))\mathrm{d}t+\sigma(t,x(t))\mathrm{d}W(t),\\ x(0)=x_0.\end{cases}$$

2) 根据目标运动方程以及搜索者的出发点和运动模型选择适当的观察函数h , 确定搜索路径$z(t)$的方程:

$$\mathrm{d}z(t)=h(t,z(t),u(t,x))\mathrm{d}t,$$
$$z(0)=z_0,0\leqslant t\leqslant T.$$

3) 使用适当的终止条件计算下面方程的解$\phi^u(t,x)$:

$$\phi_t(t,x)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma\sigma'\phi_{xx})+\inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}}\{b^u((t,x),\phi_x)+g^u(t,x)\}=0.$$

4) 计算$H(t,x,u)=A^u(t)\phi(t,x)+g^u(t,x)$ 的最小值, 即解方程

$$\frac{\partial H(t,x,u)}{\partial u}=0,$$

得到最优搜索策略$u_0=u_0(t,x,\phi(t,x))$.

由验证定理可知, 函数$H(t,x,u)$的最小值一定在方程$H'_u(t,x,u)=0$ 的某个根u_0处达到, 且u_0就是所求的最优搜索策略. 因此对于任意选定的搜索路径$z(t)$, 该算法给出沿着这条路径的最优资源分配方案, 即局部最优搜索策略. 为获得全局最优搜索策略, 在算法第2)步中选择一条最优的搜索路径是十分重要的, 同时也是非常困难的. 一个在多数情况下适用的指导原则是: 如果搜索者的移动速度远大于目标的速度(例如从飞机上搜索海上漂流的船只), 最优搜索路径应该从目标分布概率最大的点出发, 呈螺旋状展开, 并均匀分布在整个搜索空间中. 而如果搜索者的速度和目标的速度差不多, 则最优搜索路径应该尽快到达目标在下一个时刻(大于等于搜索者达到所需的时间)概率最大的位置. 如果没有找到目标, 则再次转到目标在下一个时刻概率最大的位置. 关于这方面的详细讨论, 有兴趣的读者可以参考文献[16]中的第4章.

4.3 一个实例(Example)

下面通过一个简单的例子来说明上节中的算法过程. 假设目标绕着以o为圆心, 半径为1的圆周逆时针做匀速运动, 角速度恒等于1. 假设目标在运动过程中受到随机干扰,并且施加干扰的作用力可以用布朗运动(即维纳过程)$W(t)$ 来模拟. 搜索者从坐标为$(z_0,0)$ 的点开始搜索, 并沿着直线L 以恒定的速度v 向前运动. 本文的目标是选择一个方向u (即选择L 和x_0轴之间的夹角), 使搜索者能在最短的时间内与目标相遇(见图1).

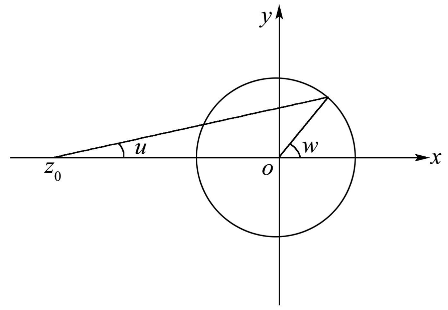

图 1 搜索沿圆周作布朗运动的目标

Fig. 1 Search for a randomly moving target along a circle

目标运动轨迹$x(t)\in\mathbb{R}^2$由下面的随机微分方程给出:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=(-\sin t,\cos t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}W(t),\\ x(0)=(1,0).\end{cases}$$

其中$W(t)\in\mathbb{R}^2$ 是标准的布朗运动(维纳过程). 搜索路径$z(t)\in\mathbb{R}^2$ 可以用下面的式子描述:

$$\begin{cases}\mathrm{d}z(t)=(v\cos u,v\sin u)\mathrm{d}t,\\ z(0)=(-z_0,0),0\leqslant t\leqslant T.\end{cases}$$

状态方程为

$$\mathrm{d}y(t)=b^u(t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}W(t),$$

其中$u(t)\in\mathbb{R}$ 是控制变量.

在这个例子中, 状态方程很容易解出, 从而得到

$$(y_1(t),y_2(t))=(-\sin t-vt\cos u+z_0,\cos t-vt\sin u)+(W_1(t),W_2(t)).$$

但在另一方面, 方程 $y(t)=0$ 却很难求解.

由定理3得到对应的HJB方程

$$\phi_t(t,x)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\phi_{xx})+\inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}}\{b^u((t,x),\phi_x)+g^u(t,x)\}=0,$$
$$\phi(T,x)=f(x),x\in\mathbb{R}^2,0\leqslant t\leqslant T.$$

其中:

$$b^u(t,x)=a(t,x)-h(t,x,u)=(-\sin t,\cos t)-(v\cos u,v\sin u),$$
$$g^u(t,y)=[(y^u)^{-1}(t)\delta(T)]/T=[(y^u)^{-1}(0)]/T=\frac{t_0}{T}.$$

因为$\phi(x)$ 独立于u , 所以很容易推出HJB方程的最小值在$u=0$ 处得到. 由定理4知, 在这种情况下的最优搜索策略即为$u_0=0$.

5 结论(Conclusions)

本文将最优搜索问题作为最优控制问题研究. 基于最优控制理论的原理推导出用于解决一类随机运动目标最优搜索问题的HJB方程, 这类随机运动目标的运动轨迹可以用方程(2)描述. 通过验证定理证明了HJB方程的解即为所寻求的最优搜索策略. 本文的结果是在一般的情况下推导出来的, 因此同其他传统研究方法相比有更加广泛的实用性.

参考文献(References):

[1] STONE L D. *Theory of Optimal Search*[M]. New York: Academic Press, 1975: 1 – 259.

[2] KOOPMAN B O. *Search and Screening*[M]. Va, USA: [s.n.], 1946.

[3] De GUENIN J. Optimum distribution of effort: an extension of the Koopman basic theory[J]. *Operations Research*, 1961, 9: 1 – 7.

[4] ZHU Q X, JOHN O. On the optimal search problem: the case when the target distribution is unknown[C] // *Proc of the Chilean Computer Science Society*. Los Alamitos, CA, USA: IEEE Comput Soc, 1997: 268 – 277.

[5] ZHU Q X, JOHN O. Optimal search with non-regular detection functions[J]. *Journal of UESTC*, 1999, 28(9): 125 – 128.

[6] ZHUN Q X, ZH M T, JOHN O. Some results on optimal search in discrete and continuous spaces[J]. *Journal of Software*, 2001, 12(12): 1748 – 1751.

[7] TRUMMEL K E, WEISINGER J R. The complexity of the optimal search path problem[J]. *Operations Research*, 1986, 34(2): 324 – 327.

[8] IIDA K, HOZAKI R. The optimal search plan for a moving target minimizing the expected risk[J]. *Journal of Operations Researche Society of Japan*, 1988, 31(4): 294 – 320.

[9] BROWN S S. Optimal search for moving target in discrete time and space[J]. *Operations Research*, 1980, 28(6): 1275 – 1289.

[10] LUKKA M. On the optimal searching tracks for a randomly moving target: a free terminal point problem[J]. *Ann University Turku Series A*, 1979, 175: 11 – 24.

[11] MANGEL M. *Search Theory: A Differential Equation Approach*[M]. New York: Marcel Dekker, 1989: 55 – 101.

[12] OHSUMI A. *Algorithms for Optimal Searching and Control Systems for a Markovian Target*[M]. New York: Academic Press, 1989: 99 – 118.

[13] OHSUMI A. Optimal searching for a Markovian target[J]. *Naval Research Logistics*, 1991, 38(4): 531 – 554.

[14] AHMED N U. Nonlinear evolution equations on Banach space[J]. *Applied Math and Stochastic Analysis*, 1991, 4(3): 187 – 202.

[15] AHMED N U, TEO K L. *Optimal Control of Distributed Parameter Systems*[M]. New York: North-Holland, 1981.

[16] 朱清新. 离散和连续空间中的最优搜索理论[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 1 – 168.
(ZHU Qingxin. *Optimal Search Theory in Discrete and Continuous Spaces*[M]. Beijing: Science Press, 2005: 1 – 168.)

作者简介:

朱清新 (1954—), 男, 博士, 教授, 博士生导师. 四川师范大学数学系本科, 北京理工大学应用数学专业硕士, 加拿大渥太华大学控制论专业博士, 加拿大卡尔顿大学博士后、计算机专业硕士二学位, 研究方向为计算机图形与视觉、计算运筹学、网络与信息安全, E-mail: qxzhu@uestc.edu.cn;

卿 利 (1973—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为计算机网络与信息安全, E-mail: qingli_new@163.com;

彭 博 (1980—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为信息检索、模式识别与仿真, E-mail: hi_bpeng@yahoo.com.