

## 基于T-S模型的轮式移动机器人轨迹跟踪控制

高兴泉<sup>1,2</sup>, 陈虹<sup>1,3</sup>

(1. 吉林大学 控制科学与工程系, 吉林 长春 130025; 2. 吉林化工学院 机电工程系, 吉林 吉林 132022;  
3. 吉林大学 汽车动态模拟国家重点实验室, 吉林 长春 130025)

**摘要:** 针对带有执行机构饱和和约束与外部干扰的轮式移动机器人, 提出了一种基于T-S模糊模型的轨迹跟踪方法. 利用机器人运动特性和参考轨迹建立轨迹跟踪的误差系统并将其作T-S模型描述. 通过求解具有LMI约束的半定规划问题, 对每个线性子系统单独设计满足控制约束与 $H_\infty$ 性能约束的状态反馈控制器, 并在PDC(动态平行分配补偿)设计框架下构建全局控制器, 最后证明闭环系统的李雅普诺夫稳定性. 仿真结果验证了该方法的有效性和可行性.

**关键词:** 轮式移动机器人; T-S模型; 轨迹跟踪; 执行器饱和和约束; 干扰抑制  
**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Tracking control for wheeled mobile robot via T-S fuzzy model

GAO Xing-quan<sup>1,2</sup>, CHEN Hong<sup>1,3</sup>

(1. Department of Control Science and Engineering, Jilin University, Changchun Jilin 130025, China;  
2. Department of Electromechanical Engineering, Jilin Institute of Chemical Technology, Jilin Jilin 132022, China;  
3. National Automobile Dynamic Simulation Laboratory, Jilin University, Changchun Jilin 130025, China)

**Abstract:** For the wheeled mobile robot(WMR) with actuator saturations and external disturbances, a tracking scheme via Takagi-Sugeno(T-S) fuzzy model is proposed. The tracking error system of WMR is established using the given trajectory and then represented by a T-S fuzzy model. Constrained H-infinity controller in the form of state feedback is also derived for each subsystem by solving LMI based semi-definite programming problems. Furthermore, the overall controller is constructed in the framework of parallel distributed compensation(PDC), and the Lyapunov stability of the closed-loop system is tested. Finally, simulation results are given and discussed to validate the proposed scheme.

**Key words:** wheeled mobile robot; T-S fuzzy model; tracking control; actuator saturations; disturbance attenuation

### 1 引言(Introduction)

近年来, 由于理论上的挑战以及工程实际应用上的广泛应用, 具有非完整约束的轮式移动机器人(WMR)轨迹跟踪问题引起了学者的极大关注. 为解决这个问题, 已经提出了大量的基于不同理论的控制方法<sup>[1~6]</sup>, 例如backstepping方法、非连续反馈方法、时变反馈控制方法、动态反馈线性化方法、基于非线性系统相对度的迭代学习控制算法以及基于微分平坦的方法等等, 取得了很好的效果. 一般来说, 移动机器人是由电机驱动的, 而电机的输出力矩是有限的, 即存在着执行机构饱和因素. 文[7]讨论了在输入受限情况下预测控制在轨迹跟踪上的应用, 但很少有文献考虑在控制力受限情况下跟踪系统的抗干扰性能.

轮式移动机器人的跟踪误差系统是典型的非线性系统<sup>[8]</sup>. 自从Takagi与Sugeno 1985年提出T-S模糊建模方法<sup>[9]</sup>以来, 基于T-S模糊模型的控制方法已经成为一个解决某些非线性系统问题的强有力工具<sup>[10,11]</sup>. 该建模方法通过IF-THEN规则将非线性系统描述为若干个线性子系统的动态线性组合形式. 针对T-S线性子系统可单独设计满足一定性能的控制, 然后在PDC<sup>[12]</sup>(parallel distributed compensation)设计框架下构建全局控制器. 这样就可以用线性系统理论去分析并解决非线性系统的控制问题.

基于T-S模糊模型, 本文提出了在控制力受限情况下对外部干扰有一定抑制能力的WMR轨迹跟踪方法. 首先, 利用轮式移动机器人本身运动特性和参考轨迹建立起跟踪误差系统, 并将WMR实时的期望

角度以及角度跟踪误差作为模糊推理的前件, 对该系统作T-S模型描述, 则它可以描述为16个参变线性子系统的动态线性组合的形式. 针对每个线性子系统, 不考虑各个子系统的相互关系, 单独设计满足控制输入约束以及对于外部干扰有一定抑制能力的状态反馈 $H_\infty$ 控制器, 再利用PDC设计原则构建全局反馈控制器, 并验证闭环系统的李雅普诺夫稳定性. 最后, 给出了有初始跟踪误差以及外部干扰情况下轨迹跟踪的仿真结果.

## 2 问题描述(Problem formulation)

### 2.1 WMR动力学模型(Dynamic model of WMR)

本文考虑的WMR如图1所示, 它可以由以下非线性微分方程来描述<sup>[13]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \phi, \\ \dot{y} = v \sin \phi, \\ \dot{\phi} = \omega, \\ \dot{v} = \beta_1 u_1 + \beta_3 w_1, \\ \dot{\omega} = \beta_2 u_2 + \beta_4 w_2. \end{cases} \quad (1)$$

这里:  $\beta_1 = \frac{1}{bm}$ ,  $\beta_2 = \frac{l}{bI}$ ,  $\beta_3 = \frac{1}{m}$ ,  $\beta_4 = \frac{1}{I}$ , 其中 $m$ 与 $I$ 分别为WMR的质量与转动惯量;  $2l$ 为后轮轴的长度;  $b$ 为轮的半径;  $(x, y)$ 为质心坐标;  $\phi$ 为车身相对于 $x$ 轴的方向角;  $v$ 为线速度;  $\omega$ 为相对于垂直轴的角速度;  $u_1 = \tau_1 + \tau_2$ 与 $u_2 = \tau_1 - \tau_2$ 为控制输入; 这里 $\tau_1$ 与 $\tau_2$ 分别是后轮两个电机提供的驱动力矩;  $w_1$ 和 $w_2$ 分别为加在线速度与角速度上的外部干扰. 考虑电机存在输出饱和情况, 控制约束有形式

$$|u_i| \leq u_{i,\max}, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

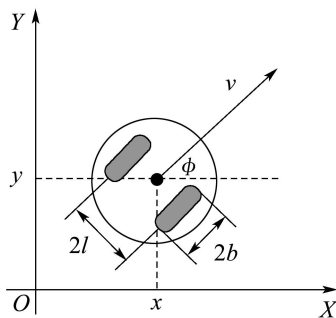


图1 WMR简化示意图

Fig. 1 Simplified diagrammatic sketch of WMR

### 2.2 跟踪误差系统(Tracking error model)

定义 $\zeta = [x, y, \phi, v, \omega]$ 作为系统状态,  $\zeta_d = [x_d, y_d, \phi_d, v_d, \omega_d]$ 为期望的名义轨迹,  $u_d = [u_{1d}, u_{2d}]$ 为名义的控制量, 并令 $e = \zeta - \zeta_d$ ,  $u_e = u - u_d$ 作为误差系统的状态和控制输入, 则该系统可以表示为

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos(\phi_d + e_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\phi_d + e_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta_3 & 0 \\ 0 & \beta_4 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} u_e + \begin{pmatrix} v_d (\cos(\phi_d + e_3) - \cos \phi_d) \\ v_d (\sin(\phi_d + e_3) - \sin \phi_d) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

将最后一项在 $e_3 = 0$ 处线性化并舍去高次项后, 可得到以 $\hat{\theta} = [v_d, \phi_d, e_3]$ 为时变参数的线性参变系统:

$$\dot{e} = A(\hat{\theta})e + B_1 w + B_2 u_e. \quad (3)$$

这里:

$$A(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -v_d \sin \phi_d \cos(\phi_d + e_3) & 0 \\ 0 & 0 & v_d \cos \phi_d \sin(\phi_d + e_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta_3 & 0 \\ 0 & \beta_4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

本文研究的问题是: 设计状态反馈控制器, 跟踪给定的一个参考轨迹并满足控制约束. WMR跟踪误差系统是典型的非线性系统, 近年来发展起来的基于T-S模型的控制方法为笔者用线性系统理论的方法来解决非线性系统问题提供了新的思路. 本文就提出了一种基于T-S模型的轨迹跟踪方法.

## 3 约束T-S模糊系统的 $H_\infty$ 控制(H-infinity control for T-S fuzzy systems)

### 3.1 T-S模型(T-S fuzzy model)

考虑带有外部干扰的非线性不确定性系统由以下T-S模型描述, 它是由有限个IF-THEN规则组成:

$$\begin{aligned} R^i: & \text{IF } \lambda_1 \text{ is } M_1^i \cdots \text{ and } \lambda_{q_1} \text{ is } M_{q_1}^i, \text{ THEN} \\ & \dot{x}(t) = A_i(\theta)x(t) + B_{1,i}(\theta)w(t) + B_{2,i}(\theta)u(t), \\ & z(t) = C_i(\theta)x(t) + D_i(\theta)u(t), \quad i = 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (4)$$

其中:  $R^i$ 表示第 $i$ 个模糊模型规则,  $M_j^i$ 是模糊集合,  $\lambda \in \mathbb{R}^{q_1}$ 为系统可测或可计算变量,  $r$ 为模糊模型规则的个数,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量,  $w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ 为外部干扰,  $u(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ 为控制输入变量,  $z(t) \in \mathbb{R}^p$ 为系统性能输出,  $\theta \in \mathbb{R}^{q_2}$ 为时变的不确定参数, 且 $\theta \in \Theta := \text{col}\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n_v}\}$ , 其中 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n_v}$ 为凸

多面体 $\Theta$ 的顶点,  $n_v = 2^{q_2}$ 为其顶点的个数. 假设系统矩阵仿射依赖于参数向量 $\theta$ , 即

$$\begin{pmatrix} A_i(\theta) & B_{1,i}(\theta) & B_{2,i}(\theta) \\ C_i(\theta) & 0 & D_i(\theta) \end{pmatrix} \in \text{col} \left\{ \begin{pmatrix} A_{i,k} & B_{1,i,k} & B_{2,i,k} \\ C_{i,k} & 0 & D_{i,k} \end{pmatrix}, k = 1, 2, \dots, n_v \right\}.$$

时刻 $t$ , 依赖 $\theta$ 的模糊系统输出为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\lambda) [A_i(\theta)x(t) + B_{1,i}(\theta)w(t) + B_{2,i}(\theta)u(t)], \\ z(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\lambda) [C_i(\theta)x(t) + D_i(\theta)u(t)]. \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $\mu_i(\lambda) = \frac{\delta_i(\lambda)}{\sum_{i=1}^r \delta_i(\lambda)}$ ,  $\delta_i(\lambda) = \prod_{j=1}^{q_1} M_j^i(\lambda_j)$ ,  $M_j^i(\lambda_j)$ 为 $\lambda_j$ 属于模糊集合 $M_j^i$ 的隶属度. 且 $\delta_i$ 以及 $\mu_i$ 具有以下性质:  $\delta_i(\lambda) \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^r \delta_i(\lambda) > 0$ ;  $\mu_i(\lambda) \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^r \mu_i(\lambda) = 1$ .

对于模糊T-S系统(4), 令 $C^i$ 为第 $i$ 个子系统对应设计的状态反馈控制器, 则系统的PDC控制器可以描述为

$$C^i: \text{IF } \lambda_1 \text{ is } M_1^i \dots \text{ and } \lambda_{q_1} \text{ is } M_{q_1}^i, \text{ THEN } u(t) = K_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (6)$$

这里 $K_i \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ 是一个常反馈增益矩阵. 那么整个控制器的输出可以表示为

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\lambda) K_i x(t). \quad (7)$$

即使针对每个子系统所设计的控制器可保证闭环系统局域稳定, 但并不能保证由式(5)和(7)组成的闭环系统的全局稳定性, 因此需要验证其全局稳定性<sup>[14]</sup>.

下面不加证明地给出当 $w = 0$ 时该闭环系统在平衡点处李雅普诺夫稳定的条件<sup>[14]</sup>:

**定理 1** 若如果存在矩阵 $P = P^T > 0$ 满足

$$G_{ij}^T P + P G_{ij} \leq 0, \quad 1 \leq i \leq j \leq r, \quad \mu_i \cap \mu_j \neq \emptyset,$$

$$G_{ij} = [(A_i(\theta) + B_{2,i}(\theta)K_j)^T + (A_j(\theta) + B_{2,j}(\theta)K_i)]/2,$$

则系统(5)在平衡点处是全局李雅普诺夫稳定的.

### 3.2 T-S系统的 $H_\infty$ 控制(H-infinity control for T-S systems)

考虑由T-S模糊模型(4)描述的第 $i$ 个子系统, 控制输入约束为

$$|u_j(t)| \leq u_{j,\max}, \quad j = 1, 2, \dots, m_2, \quad t \geq 0. \quad (8)$$

一个控制命题是设计控制器使闭环系统内部稳定, 并使某一类外部干扰信号 $w$ 到系统性能输出 $z$ 的传递函数 $T_{wz}$ 满足 $\|T_{wz}\|_\infty \leq \gamma_i$ , 同时满足约束条件(8). 这里 $\gamma_i$ 为给定的正实数.

考虑状态反馈 $u(t) = K_i x(t)$ , 则闭环系统为

$$\dot{x}(t) = A_{cl,i}(\theta)x(t) + B_{1,i}(\theta)w(t), \quad (9a)$$

$$z(t) = C_{cl,i}x(t), \quad (9b)$$

其中:

$$A_{cl,i}(\theta) = A_i(\theta) + B_{2,i}(\theta)K_i, \\ C_{cl,i}(\theta) = C_i(\theta) + D_i(\theta)K_i.$$

根据文[15],  $A_{cl,i}(\theta)$ 是稳定的且 $\|T_{wz}\|_\infty \leq \gamma_i$ , 当且仅当存在矩阵 $P_i = P_i^T$ 使以下不等式成立:

$$\begin{bmatrix} A_{cl,i}^T(\theta)P_i + P_i A_{cl,i}(\theta) & * & * \\ B_{1,i}^T(\theta)P_i & -\gamma_i^2 I & * \\ C_{cl,i}(\theta) & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (10)$$

令 $Q_i = P_i^{-1}$ ,  $Y_i = K_i Q_i$ , 同时考虑 $\theta$ 的凸性, 则下式成立是式(10)成立的一个充分条件:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{i,k} & * & * \\ B_{1,i,k}^T & -\gamma_i^2 I & * \\ C_{i,k}Q_i + D_{i,k}Y_i & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (11)$$

这里:  $\Phi_{i,k} = A_{i,k}^T Q_i + Q_i A_{i,k} + B_{2,i,k} Y_i + Y_i^T B_{2,i,k}^T$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_v$ . 定义二次型函数 $V_i(x) = x^T P_i x$ , 简单推导不等式(11)可保证当 $w(t) = 0$ 时闭环系统(9)是稳定的, 并有

$$\frac{d}{dt} V_i(x(t)) + \|z(t)\|^2 - \gamma_i^2 \|w(t)\|^2 \leq 0$$

成立, 两边积分后有

$$V_i(x(t)) + \int_0^t \|z(\tau)\|^2 d\tau \leq \gamma_i^2 \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau + V_i(x(0)). \quad (12)$$

假设干扰的能量是有界的, 且 $\int_0^\infty \|w(\tau)\|^2 d\tau \leq w_{\max}$ , 那么由不等式(12)可推出

$$V_i(x(t)) \leq V_i(x(0)) + \gamma_i^2 w_{\max}, \quad t \geq 0.$$

定义 $\alpha_i := \gamma_i^2 w_{\max} + V_i(x(0))$ , 则闭环系统的状态轨迹在如下定义的椭圆域内变化:

$$\Omega(P_i, \alpha_i) := \{x(t) \in \mathbb{R}^n | V_i(x(t)) \leq \alpha_i\},$$

也就是 $x^T(t) \frac{P_i}{\alpha_i} x(t) \leq 1$ 成立. 另一方面, 要保证满足控制约束(8), 则应有

$$u_j^2(t) = (e_j^T K_i x(t))^T e_j^T K_i x(t) \leq u_{j,\max}^2,$$

即  $x^T(t) \frac{K_i^T e_j e_j^T K_i}{u_{k,\max}^2} x(t) \leq 1$ . 这里  $e_j$  为空间  $\mathbb{R}^{m_2}$  的第  $j$  个标准向量基,  $j = 1, 2, \dots, m_2$ . 所以如  $K_i$  满足

$$\frac{K_i^T e_j e_j^T K_i}{u_{k,\max}^2} \leq \frac{P_i}{\alpha_i},$$

则闭环系统满足控制约束(8). 根据前面  $Q_i$  和  $Y_i$  的定义并利用Schur补公式得上式等效于

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_i} u_{j,\max}^2 e_j^T Y_i \\ Y_i^T e_j & Q_i \end{pmatrix} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_2. \quad (13)$$

很显然, 对于一个给定的常数  $\alpha_i$ , 以上不等式是关于  $Q_i$  和  $Y_i$  的LMIs.

综上, 可以将约束  $H_\infty$  控制问题转化为一个LMI优化问题

$$\min_{\gamma_i^2, Q_i, Y_i} \gamma_i^2 \quad \text{s.t. 式(11)和(13)}. \quad (14)$$

若该优化问题有解  $\gamma_i^*$ ,  $Q_i^*$ ,  $Y_i^*$ , 则T-S模糊系统第  $i$  个子系统的状态反馈矩阵为  $K_i = Y_i^* Q_i^{*-1}$ .

**注1** 参数  $\alpha_i$  可以作为控制器设计的可调参数. 由式(12)得  $\int_0^t \|z(t)\|^2 dt \leq \alpha_i$ , 即  $\alpha_i$  为性能输出能量的上界. 从这个角度讲,  $\alpha_i$  越小越好. 但对于一个给定的  $\alpha_i$ , 在零初始条件下保证满足约束条件下的系统最大干扰能量可以由  $w_{\max} = \frac{\alpha_i}{\gamma_i^2}$  计算, 小的  $\alpha_i$  可能得到小的  $w_{\max}$ . 也就是说,  $\alpha_i$  越小, 能够保证满足约束条件下系统可能承受的最大干扰能量越小, 所以  $\alpha_i$  的选取应根据期望的控制性能以及干扰能量的先验知识来选取.

#### 4 仿真结果(Simulation results)

作为仿真实例, 本文讨论的WMR的各个物理参数选取为  $m = 80 \text{ kg}$ ,  $I = 2 \text{ kg}\cdot\text{m}$ ,  $l = 0.075 \text{ m}$ ,  $b = 0.325 \text{ m}$ ,  $u_{1,\max} = 5 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $u_{2,\max} = 4 \text{ N}\cdot\text{m}$ . 对于跟踪误差系统(3), 选取  $\lambda_1 = \phi_d$  以及  $\lambda_2 = \phi_d + e_3$  作为模糊推理的前件, 其隶属度函数选取如图2所示.

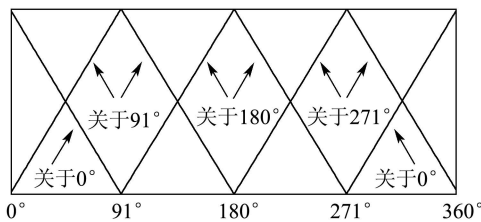


图2 隶属度函数曲线

Fig. 2 Membership functions

考虑到当  $\phi_d = k_1 180^\circ$ ,  $\phi_d + e_3 = k_2 180^\circ + 90^\circ$  或者  $\phi_d + e_3 = k_1 180^\circ$ ,  $\phi_d = k_2 180^\circ + 90^\circ$  (这里  $k_1, k_2$  都是整数) 时, 系统是不可控的, 该系统可以由以下的T-S模型来描述, 它包含了16个模糊规则:

$R^i$ : IF  $\phi_d$  is  $M_1^j$  and  $\phi_d + e_3$  is  $M_2^f$ , THEN

$$\dot{x}(t) = A_i(\theta)x(t) + B_{1,i}(\theta)w(t) + B_{2,i}(\theta)u(t),$$

$$z(t) = C_i(\theta)x(t) + D_i(\theta)u(t),$$

$$i = 1, \dots, r, \quad j, f = 1, \dots, 4,$$

这里模糊集选取为

$$M_1^1, M_2^1: \text{关于 } k360^\circ;$$

$$M_1^2, M_2^2: \text{关于 } k360^\circ + 91^\circ;$$

$$M_1^3, M_2^3: \text{关于 } k360^\circ + 180^\circ;$$

$$M_1^4, M_2^4: \text{关于 } k360^\circ + 271^\circ.$$

各个系数矩阵为

$$A_i(\theta) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{2 \times 2} & \hat{A}_i & \mathcal{O}_{2 \times 1} \\ \mathcal{O}_{3 \times 2} & \mathcal{O}_{2 \times 2} & \hat{E} \end{pmatrix},$$

$$B_{1,i}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{3 \times 2} \\ \beta_3 & 0 \\ 0 & \beta_4 \end{pmatrix}, \quad B_{2,i}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{3 \times 2} \\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

其中  $k$  为整数,  $\mathcal{O}_{M \times N}$  为  $M \times N$  的零矩阵,  $\hat{E} = (1 \ 0 \ 0)^T$  以及

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v_d & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_2 = \begin{pmatrix} -v_d \xi_1 & 1 \\ v_d \xi_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -v_d & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_4 = \begin{pmatrix} -v_d \eta_1 & 1 \\ v_d \eta_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 & \xi_2 \\ v_d & \xi_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_6 = \begin{pmatrix} -v_d \xi_1 & \xi_2 \\ v_d \xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_7 = \begin{pmatrix} 0 & \xi_2 \\ -v_d & \xi_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_8 = \begin{pmatrix} -v_d \eta_2 & \xi_2 \\ v_d \eta_2 & \xi_1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_9 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ v_d & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_{10} = \begin{pmatrix} -v_d \xi_1 & -1 \\ v_d \xi_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -v_d & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_{12} = \begin{pmatrix} -v_d \eta_1 & -1 \\ v_d \eta_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & \eta_2 \\ v_d & \eta_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_{14} = \begin{pmatrix} -v_d \xi_1 & \eta_2 \\ v_d \xi_2 & \eta_1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_{15} = \begin{pmatrix} 0 & \eta_2 \\ -v_d & \eta_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_{16} = \begin{pmatrix} -v_d \eta_1 & \eta_2 \\ v_d \eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix},$$

$$\xi_1 = \sin 91^\circ, \quad \xi_2 = \cos 91^\circ,$$

$$\eta_1 = \sin 271^\circ, \quad \eta_2 = \cos 271^\circ.$$

很显然, 上述T-S模型中每个子系统都是关于时变参数  $\hat{\theta} = v_d$  的线性参变系统, 且对于  $\hat{\theta}$  是仿射的.

利用本文提到的方法进行轨迹跟踪控制器的设计, 并跟踪一个“8”字形的轨迹, 该轨迹如图3所示, 它是由微分平坦理论给出<sup>[5]</sup>, 用以下函数描述:

$$x_d(t) = 2 \sin \frac{t}{15}, \quad y_d(t) = 2 \sin \frac{t}{30}. \quad (15)$$

该轨迹的起始位姿为 $\phi_d(0) = 0.4636$  rad, 初始线速度和角速度分别为 $v_d(0) = 0.1491$  m/s和 $\omega_d(0) = 0$  rad/s. 相应地, 可得到速度轨迹 $v_d(t)$ 与控制输入轨迹 $u_d(t)$ , 且对于所有的 $t > 0$ , 时变参数 $\theta = v_d(t) \in [0.04, 0.15]$  m/s,  $|u_{1d}(t)| \leq 0.04$  N·m,  $|u_{2d}(t)| \leq 0.015$  N·m, 所以可取控制约束

$$\begin{aligned} |u_{1e,max}| &\leq u_{1,max} - 0.04 \text{ N}\cdot\text{m} = 4.96 \text{ N}\cdot\text{m}, \\ |u_{2e,max}| &\leq u_{2,max} - 0.015 \text{ N}\cdot\text{m} = 3.985 \text{ N}\cdot\text{m}. \end{aligned}$$

进一步, 选取参数 $\alpha_i = 5$ , 性能输出的权重系数分别取为 $C_i = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$ ,  $D_i = [\mathcal{O}_{4 \times 2}]$ , 通过求解优化问题(14), 可以得到16个反馈系数矩阵 $K_i (i = 1, 2, \dots, 16)$ .

为了验证系统的全局稳定性, 将得到的控制器代入稳定性条件(11), 通过求解一组LMI的可行性问题, 得到以下满足稳定性条件的正定对称矩阵:

$$P = 10^{-11} \times \begin{pmatrix} 0.092 & 0.003 & -0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.003 & 0.092 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.000 & 0.000 & 0.013 & -0.000 & 0.002 \\ 0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.111 & -0.000 \\ -0.000 & 0.000 & 0.002 & -0.000 & 0.002 \end{pmatrix}.$$

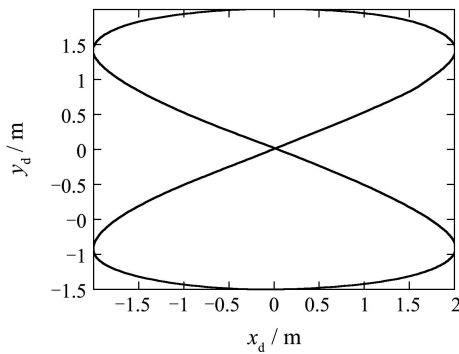


图3 期望轨迹

Fig. 3 Desired trajectory

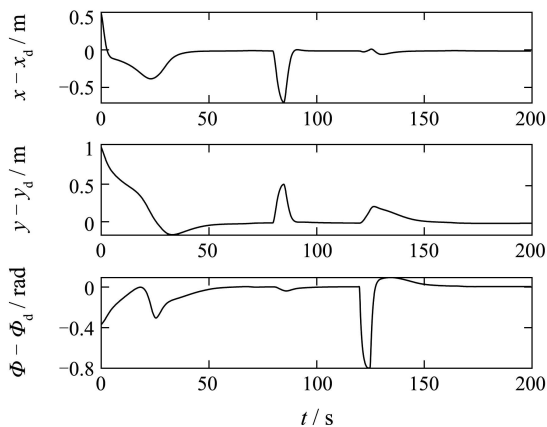


图4 位置误差与角度误差

Fig. 4 Position errors and angular errors

将得到控制器应用到系统(1)中进行仿真.

图4,5给出了当初始误差为 $e(0) = [0.5, 1, -0.4636, 0.2509, 0.5]^T$ , 在时刻 $t = 80$  s时在 $w_1$ 上加入长度为5 s幅值为3.5 N的阶跃干扰, 在时刻 $t = 120$  s时在 $w_2$ 上加入长度为5 s幅值为2.5 N·m的阶跃干扰时的跟踪效果图. 从仿真图中可以看到, 利用本文方法设计的控制器克服了初始跟踪误差与外部干扰的影响, 实现了轨迹的完美跟踪, 并且整个过程中得到的控制量都在允许的范围之内(见图6).

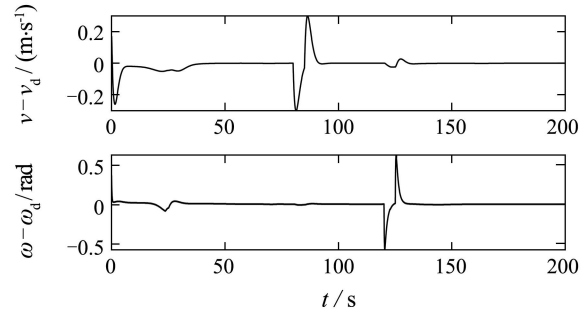


图5 速度误差

Fig. 5 Velocity errors

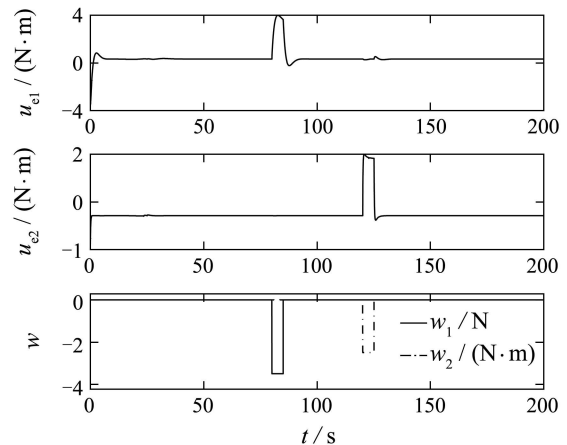


图6 控制输入与外部干扰

Fig. 6 Control inputs and external disturbances

### 5 结论(Conclusion)

本文提出了一种基于T-S模型的控制算法来解决有外部干扰与控制约束条件下的WMR轨迹跟踪问题. 将跟踪误差系统做T-S模型描述后, 本文采取了针对线性子系统单独设计控制器, 然后用PDC构建控制器并验证全局稳定性的方法, 并以跟踪“8”字形轨迹为例给出了应用仿真结果, 跟踪效果理想. 其中控制器的参数都是通过求解LMI优化问题获得. 本文设计的控制器结构简单, 易于实现, 实时性强, 并对初始跟踪误差与外部干扰有很强的鲁棒性. 但是对闭环系统性能指标的定量分析, 例如 $H_\infty$ 性能指标, 也是笔者进一步需要研究的工作.

### 参考文献(References):

[1] JIANG Z P, NIJMEIJER H. A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form[J]. *IEEE Trans on Au-*

- tomatic Control*, 1999, 44(2): 265 – 279.
- [2] LIU K Z, KANAHARA T. Steering control of vehicles by discontinuous control approach[C] // *Proc of American Control Conference*. Arlington: IEEE Press, 2001: 1521 – 1526.
- [3] SAMSON C. Application to path following and time-varying point stabilization of mobile robots[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(1): 64 – 77.
- [4] ORIOLO G, DE LUCA A, VENDITTELLI M. WMR control via dynamic feedback linearization design, implementation and experimental validation[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2002, 10(6): 835 – 852.
- [5] FLIESS M, LÉVINE J, MARTIN P, et al. Design of trajectory stabilizing feedback for driftless flat systems[C] // *Proc of the 3rd European Control Conference*. Rome: IEEE Press, 1995: 1882 – 1887.
- [6] 胡跃明, 谭慧琼. 基于非线性系统相对度的学习控制算法及在非完整移动机器人中的应用[J]. *控制理论与应用*, 2001, 18(5): 662 – 668.  
(HU Yueming, TAN Huiqiong. Learning control algorithm based on relative degree of nonlinear systems with application to nonholonomic mobile robots[J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(5): 662 – 668.)
- [7] 裴辛哲, 刘志远, 裴润. 控制受限的移动机器人鲁棒跟踪控制器设计[J]. *自动化学报*, 2003, 29(6): 877 – 882.  
(PEI Xinzhe, LIU Zhiyuan, PEI Run. Robust trajectory tracking controller design for mobile robots with bounded input[J]. *Acta Armamentar*, 2003, 29(6): 877 – 882.)
- [8] CHEN H, WANG J, GAO X Q, et al. A moving  $H_\infty$  tracking scheme for wheeled mobile robots with actuator constraints[C] // *Proc of the 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*. New York: IEEE Press, 2004, 8: 129 – 134.
- [9] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1985, 15(1): 116 – 132.
- [10] LI N, LI S Y, XI Y G. Multi-model predictive control based on the Takagi-Sugeno fuzzy models: a case study[J]. *Information Sciences*, 2004, 165(3/4): 247 – 263.
- [11] HSIAO F H, CHEN C W, LIANG Y W, et al. T-S fuzzy controllers for nonlinear interconnected systems with multiple time delays[J]. *IEEE Trans on Circuits and systems*, 2005, 52(9): 1883 – 1893.
- [12] SUGENO M, KANG G T. Fuzzy modeling and control of multilayer incinerator[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 18(3): 329 – 346.
- [13] CORRADINI M L, ORLANDO G. Control of mobile robots with uncertainties in the dynamical model: a discrete time sliding model approach with experimental results[J]. *Control Engineering Practice*, 2002, 10(1): 23 – 34.
- [14] TANAKA K, WANG H O. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*[M]. New York: John Wiley, 2002.
- [15] SCHERER P C, CHILALI M. Multi-objective output feedback control via LMI optimization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(7): 896 – 911.

#### 作者简介:

高兴泉 (1976—), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为预测控制、非线性系统控制等, E-mail: xqgao@email.jlu.edu.cn;

陈虹 (1963—), 女, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为鲁棒控制、预测控制、非线性系统控制等, E-mail: chen@jlu.edu.cn.

## 下期要目

- 基于Backstepping方法的全车液压主动悬挂最优控制设计 ..... 刘震, 祝晓才, 罗成, 胡德文  
水下机器人的神经网络自适应控制 ..... 俞建成, 李强, 张艾群, 王晓辉  
离散事件系统的混合可靠分散监控 ..... 王飞, 冯祖仁, 胡奇英  
导数反馈下闭环广义系统的稳定性 ..... 滕毓发, 张庆灵  
发电机组的一种多模型自学习控制 ..... 袁小芳, 王耀南, 孙炜, 吴亮红, 李树涛  
具有边界控制的线性Timoshenko型系统的指数稳定性 ..... 杜燕, 许跟起  
未知环境下移动机器人同步地图创建与定位研究进展 ..... 王耀南, 余洪山  
具有深度自适应估计的视觉伺服优化 ..... 武波, 李惠光, 徐鹏  
基于T-S模型的非线性时滞系统非脆弱保性能模糊控制 ..... 殷培强, 俞立, 郑科  
基于平衡学习的CMAC神经网络非线性滑模容错控制 ..... 朱大奇, 孔敏  
确保估计性能的离散Markov跳跃系统鲁棒Kalman滤波 ..... 朱进, 奚宏生, 季海波, 王冰  
基于KPLS和TD的热连轧精轧末架微调AGC ..... 张飞, 童朝南, 李江昀  
基于LMI的鲁棒容错控制及其在卫星姿态控制中的应用 ..... 陈雪芹, 耿云海, 张迎春, 王峰  
线性时滞系统基于观测器的最优输出跟踪控制器近似设计 ..... 唐功友, 李超, 高洪伟  
新型粒子群优化算法 ..... 巩敦卫, 张勇, 张建化, 周勇