

不确定系统的不确定项观测器设计

李文林¹, 李钧涛^{1,2}

(1. 河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007; 2. 北京航空航天大学 第七研究室, 北京 100083)

摘要: 为了克服常规用不确定项的界估计来设计控制器带来的保守性和动态性能差的弊端, 本文就连续的和离散的不确定系统, 分别提出了不确定项的观测器设计方案. 通过引入分布和离散加权平均的概念, 对这两种观测器的观测误差精度进行了分析估算, 从数学上证明了所得的观测值在加权平均意义下是无偏的. 此外, 通过适当选择观测器反馈增益, 可以得到满意的误差估计精度. 把该方法应用到一个控制系统中, 仿真结果表明所提出的观测器能很好的估计不确定项和改进闭环系统动态性能.

关键词: 不确定系统; 不确定项观测器; 观测误差; 加权平均

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Uncertainty observers for uncertain systems

LI Wen-lin¹, LI Jun-tao^{1,2}

(1. College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang Henan 453007, China;

2. The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: The estimation for uncertainties in dynamic systems plays an important role in controller design, and the traditional bound estimation for uncertainties would induce more conservative controller or worse dynamic performances. Motivated by uncertainties estimation via state feedback, we proposed uncertainty observers design schemes for both continuous and discrete uncertain systems in this paper. By introducing the concept of distributed and discrete weighted averages, observation errors are analyzed and the observed values are mathematically proved to be unbiased in terms of the weighted average. Moreover, satisfactory accuracy of observation errors can be achieved via choosing appropriate observer gain matrix. The scheme is applied to a control system. Simulation results show that the proposed observers can efficiently estimate the uncertainties, and the improved closed-loop dynamic performances are achieved.

Key words: uncertain system; uncertainty observer; observation error; weighted average

1 引言(Introduction)

对于不确定系统, 由于不确定项是未知的, 实际控制器的设计大都是假设不确定项满足一些匹配性有界条件, 比如: $f(x, t) = E(x, t)F(x, t)D(x, t)$, 其中 $E(x, t)$, $D(x, t)$ 是已知矩阵函数, $F(x, t)$ 未知并且满足 $F(x, t)^T F(x, t) \leq I$; 或者满足一些线性有界性条件 $\|f(x, t)\| \leq \alpha\|x\| + \beta$ 等, 然后用估计的界去设计控制器的参数, 显然, 这样设计出的控制器保守性大, 动态性能差. 文[1,2]在研究变结构控制律设计中提出了设计干扰观测器的思想, 用观测值代替不确定项的实际值, 设计控制器. 但文[1,2]针对的系统过于简单、特殊, 没有一般性, 而且观测器的设计与控制耦合, 不具有分离性, 也没有给出观测误差精度的分析.

本文就一般的不确定系统(连续的和离散的), 分

别给出了不确定项的观测器的设计方案, 并且对观测误差精度进行分析估算, 从数学上证明了本文所得的观测值在加权平均意义下是无偏的, 而且适当选取观测增益可使观测误差有满意的精度, 克服了常规用不确定项的界估计来设计控制器带来的保守性和动态性能差的弊端, 一个应用实例和仿真结果阐述了所提设计方法的正确性.

2 问题陈述(Problem statement)

本文目的是研究系统中不确定项的估计问题, 希望得到一个估计精度较高的可行的估计方法.

考虑连续不确定系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(x(t), t) \quad (1)$$

和离散不确定系统

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) + f(x(k), k). \quad (2)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统的状态和控制变量, A, B, G, H 是适当维数的矩阵, $f(x, t)$ 和 $f(x(k), k)$ 是连续时间系统和离散时间系统的摄动与所受外界干扰的总和或者是未知非线性项.

对于不确定项的估计, 人们最先想到的就是均值, 而且往往把无偏性作为评价估计方法优劣的一个标准, 常常取参数测量值的均值作为参数的估计. 本文也希望所构造的不确定项观测器的观测值是无偏的. 为此, 笔者把常规均值的概念作以延伸, 提出分布加权和离散加权平均的概念.

定义 1 (离散加权平均) 设 $G_i > 0, i = 1, \dots, n$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty} G_i = 1$, 则称 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k G_i f(k-i)$ 为函数 $f(k)$ 的离散加权平均值; 如果 $f(k)$ 的估计值 $\hat{f}(k)$ 满足: $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k G_i f(k-i)$, 则称 $\hat{f}(k)$ 是 $f(k)$ 在加权平均意义下的无偏估计.

定义 2 (分布加权平均) 设 $\alpha(t) > 0$, 且 $\int_0^{\infty} \alpha(t) dt = 1$, 则称 $\int_0^{\infty} \alpha(t, \tau) f(\tau) d\tau$ 为函数 $f(t)$ 的分布加权平均值. 如果 $f(t)$ 的估计值 $\hat{f}(t)$ 满足: $\hat{f}(t) = \int_0^t \alpha(t, \tau) f(\tau) d\tau$, 则称 $\hat{f}(t)$ 是 $f(t)$ 在加权平均意义下的无偏估计.

3 连续系统的不确定项观测器(Uncertainty observer for the continuous systems)

对于连续不确定系统(1), 要进行有效的控制, 首先是解决不确定项的估计问题. 本文用观测器来解决这个问题. 为便于观测器设计将式(1)改写为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{f} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

由此, 对不确定项建立如下观测器:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \tilde{x}. \quad (4)$$

其中: $\tilde{x} = \hat{x} - x, \tilde{f} = \hat{f} - f$, 观测增益矩阵 L_1, L_2 待定.

记 $\bar{A} = \begin{bmatrix} A - L_1 & I \\ -L_2 & 0 \end{bmatrix}$, 式(4)减去式(3), 可得

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{f}} \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{f} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{f} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

将式(5)两边加上 $\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{f} \end{bmatrix}$, 可得

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{f}} \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{f} \end{bmatrix} - \bar{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{f} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

为下面推导主要结果方便, 先给出两个引理:

引理 1 存在 L_1, L_2 , 使 \bar{A} 有满意的稳定性.

证 结论显然成立. 比如取

$$L_1 = A + 2\Lambda, L_2 = \Lambda^2.$$

其中: $\Lambda = \text{diag}\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}, \Lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$.

显然此时 $\bar{A} = \begin{bmatrix} -2\Lambda & I \\ -\Lambda^2 & 0 \end{bmatrix}$, 取变换阵 $P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Lambda & -I \end{bmatrix}$,

注意到 $P^{-1} = P$, 对 \bar{A} 作相似变换可得 $P\bar{A}P^{-1} = \tilde{A}$,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Lambda & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\Lambda & I \\ -\Lambda^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Lambda & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Lambda & -I \\ 0 & -\Lambda \end{bmatrix}. \quad (7)$$

因此, \bar{A} 有稳定的特征根 $-\Lambda_1, \dots, -\Lambda_n, -\Lambda_1, \dots, -\Lambda_n$, 即 \bar{A} 有满意的稳定性. 证毕.

引理 2

$$e^{\bar{A}t} \bar{A} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\Lambda t} - t\Lambda e^{-\Lambda t} \\ -t\Lambda^2 e^{-\Lambda t} \end{bmatrix} f, \quad (8)$$

$$e^{\bar{A}t} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{f} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -te^{-\Lambda t} \\ -(I + t\Lambda)e^{-\Lambda t} \end{bmatrix} \dot{f}. \quad (9)$$

证 由式(7)可得

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Lambda & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Lambda & -I \\ 0 & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Lambda & -I \end{bmatrix}.$$

由矩阵指数函数 $e^{\bar{A}t}$ 的定义容易算出

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Lambda & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\Lambda t} & -te^{-\Lambda t} \\ 0 & e^{-\Lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Lambda & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\Lambda t} - t\Lambda e^{-\Lambda t} & te^{-\Lambda t} \\ -t\Lambda^2 e^{-\Lambda t} & t\Lambda e^{-\Lambda t} + e^{-\Lambda t} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\bar{A} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\Lambda & I \\ -\Lambda^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

由式(10)和(11)可得

$$e^{\bar{A}t} \bar{A} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\Lambda t} - t\Lambda e^{-\Lambda t} & te^{-\Lambda t} \\ -t\Lambda^2 e^{-\Lambda t} & t\Lambda e^{-\Lambda t} + e^{-\Lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\Lambda t} - t\Lambda e^{-\Lambda t} \\ -t\Lambda^2 e^{-\Lambda t} \end{bmatrix} f,$$

$$e^{\bar{A}t} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\Lambda t} - t\Lambda e^{-\Lambda t} & te^{-\Lambda t} \\ -t\Lambda^2 e^{-\Lambda t} & t\Lambda e^{-\Lambda t} + e^{-\Lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -te^{-\Lambda t} \\ -(I + t\Lambda)e^{-\Lambda t} \end{bmatrix} \dot{f}.$$

证毕.

定理 1 按式(4)构造观测器, 其中 $L_1 = A + 2\Lambda, L_2 = \Lambda^2, \Lambda = \text{diag}\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}, \Lambda_i > 0$, 并且令

$A_{\min} = \min\{A_1 \cdots A_n\}$, 则

i) \hat{f} 收敛于 f 的分布加权平均, 即 $\hat{f}(t) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \alpha(t, \tau) f(x(\tau), \tau) d\tau$. $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \alpha(t, \tau) d\tau = I_n$, $\alpha_i(t, \tau) = (t - \tau) A_i^2 e^{-A_i(t-\tau)}$, $\alpha(t, \tau) = \text{diag}\{\alpha_1(t, \tau), \dots, \alpha_n(t, \tau)\}$.

ii) 设 $\|\hat{f}\| \leq \beta$, 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{f} - f\|_{\infty} \leq \frac{2\beta}{A_{\min}}. \quad (12)$$

证 解方程(6), 并注意到 \bar{A} 是稳定矩阵, 得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{f} \end{bmatrix} &= e^{\bar{A}t} \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \tilde{f}(0) \end{bmatrix} - \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} \bar{A} \begin{bmatrix} 0 \\ f(x(\tau), \tau) \end{bmatrix} d\tau \rightarrow \\ &- \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} \bar{A} \begin{bmatrix} 0 \\ f(x(\tau), \tau) \end{bmatrix} d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

把引理2的式(8)带入式(13)可得

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (t - \tau) A^2 e^{-A(t-\tau)} f(x(\tau), \tau) d\tau, \\ \hat{f}_i(t) &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (t - \tau) A_i^2 e^{-A_i(t-\tau)} f_i(x(\tau), \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

注意到 $(t - \tau) A_i^2 e^{-A_i(t-\tau)} > 0, \tau \in (0, t)$, 并且

$$\begin{aligned} \int_0^t (t - \tau) A_i^2 e^{-A_i(t-\tau)} d\tau &= \\ (t - \tau) A_i e^{-A_i(t-\tau)} \Big|_0^t + \int_0^t A_i e^{-A_i(t-\tau)} d\tau &= \\ -A_i t e^{-A_i t} + \int_0^t A_i e^{-A_i(t-\tau)} d\tau &= \\ 1 - e^{-A_i t} - A_i t e^{-A_i t} \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (15)$$

由式(15)和定义2, 式(14)右端可看作不确定项 f_i 的加权平均, 即得到的观测值 \hat{f} 是不确定项(加权平均意义下)的无偏估计.

解方程(5)得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{f} \end{bmatrix} &= e^{\bar{A}t} \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \tilde{f}(0) \end{bmatrix} - \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{f}(x(\tau), \tau) \end{bmatrix} d\tau \rightarrow \\ &- \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{f}(x(\tau), \tau) \end{bmatrix} d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

把引理2的式(9)带入到式(16)得

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t -[e^{-A(t-\tau)} \dot{f}(x(\tau), \tau) + \\ &(t - \tau) A e^{-A(t-\tau)} \dot{f}(x(\tau), \tau)] d\tau, \\ \tilde{f}_i(t) &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t -[e^{-A_i(t-\tau)} \dot{f}_i(x(\tau), \tau) + \\ &(t - \tau) A_i e^{-A_i(t-\tau)} \dot{f}_i(x(\tau), \tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

因为

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (t - \tau) A_i e^{-A_i(t-\tau)} \dot{f}_i(x(\tau), \tau) d\tau \right| &\leq \\ \max_{0 \leq \tau \leq t} |\dot{f}_i| \int_0^t (t - \tau) A_i e^{-A_i(t-\tau)} d\tau, & \quad (18) \\ \int_0^t (t - \tau) A_i e^{-A_i(t-\tau)} d\tau &= \\ (t - \tau) e^{-A_i(t-\tau)} \Big|_0^t + \int_0^t e^{-A_i(t-\tau)} d\tau &= \\ -t e^{-A_i t} + \int_0^t e^{-A_i(t-\tau)} d\tau \rightarrow & \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-A_i(t-\tau)} d\tau. & \quad (19) \end{aligned}$$

由式(17)~(19), 可得

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{f}_i| &\leq 2 \lim_{t \rightarrow \infty} (\max_{0 \leq \tau \leq t} |\dot{f}_i| \int_0^t e^{-A_i(t-\tau)} d\tau) \leq \\ 2\beta \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-A_i(t-\tau)} d\tau &= \frac{2\beta}{A_i} \leq \frac{2\beta}{A_{\min}}. \end{aligned}$$

证毕.

4 离散系统的不确定项观测器(Uncertainty observer for the discrete systems)

将系统(2)改写为

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ f(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} u(k) - \begin{bmatrix} 0 \\ f(k) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

由此, 对不确定项 $f(k)$ 设计如下观测器:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{f}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ \hat{f}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \tilde{x}(k). \quad (21)$$

其中: $\tilde{x}(k) = \hat{x}(k) - x(k)$, 观测增益矩阵 L_1, L_2 待定.

记 $\tilde{f}(k) = \hat{f}(k) - f(k)$, $\bar{G} = \begin{bmatrix} G - L_1 I \\ -L_2 I \end{bmatrix}$, 式(21)减去式(20), 可得

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(k+1) \\ \tilde{f}(k+1) \end{bmatrix} = \bar{G} \begin{bmatrix} \tilde{x}(k) \\ \tilde{f}(k) \end{bmatrix} + (I - \bar{G}) \begin{bmatrix} 0 \\ f(k) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

记 $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$, 式(22)又可变形为

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(k+1) \\ \tilde{f}(k+1) \end{bmatrix} = \bar{G} \begin{bmatrix} \tilde{x}(k) \\ \tilde{f}(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta f(k) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

类似与连续系统, 离散系统也有下面结论:

引理 3 存在 L_1, L_2 , 使 \bar{G} 有满意的稳定性.

证 结论显然成立. 比如取

$$L_1 = G + I, \quad L_2 = I - D^2,$$

其中: $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}, |d_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n$.

则 $\bar{G} = \begin{bmatrix} -I & I \\ D^2 - I & I \end{bmatrix}$, 取变换阵 $P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ D + I & -I \end{bmatrix}$,

注意到 $P^{-1} = P$, 对 \bar{G} 作相似变换可得 $P\bar{G}P^{-1} = \tilde{G}$,

$$\tilde{G} = P \begin{bmatrix} -I & I \\ D^2 - I & I \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} D & -I \\ 0 & -D \end{bmatrix},$$

因此, \bar{A} 有特征根 $d_1, \dots, d_n, -d_1, \dots, -d_n$, 全在单位圆内, 所以 \bar{G} 有满意的稳定性. 特别地, 取 $D = 0_n$, 则特征根全是零. 证毕.

定理 2 取 $L_1 = G + I, L_2 = I - D^2$, 其中 $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}, |d_j| < 1, j = 1, 2, \dots, n, d = \max\{|d_1|, \dots, |d_n|\}$, 并且按式(21)构造观测器, 则

- i) $\hat{f}(k)$ 收敛于 $f(k)$ 的离散加权平均;
- ii) 设

$$\|\Delta f(k)\| = \|f(k+1) - f(k)\| \leq \beta,$$

则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{f}(k) - f(k)\|_{\infty} \leq \frac{\beta}{1-d}.$$

证 解方程(22)得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \tilde{x}(k+1) \\ \hat{f}(k+1) \end{bmatrix} = \\ & \bar{G}^{k+1} \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \hat{f}(0) \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^k \bar{G}^i (I - \bar{G}) \begin{bmatrix} 0 \\ f(k-i) \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k (\bar{G}^i - \bar{G}^{i+1}) \begin{bmatrix} 0 \\ f(k-i) \end{bmatrix}, \\ & \hat{f}(k) \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k (\bar{G}^i - \bar{G}^{i+1})_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ f(k-i) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $(\bar{G}^i - \bar{G}^{i+1})_{22}$ 表示分块矩阵 $\bar{G}^i - \bar{G}^{i+1}$ 的后 n 行和后 n 列构成的子矩阵. 考虑到

$$\sum_{i=0}^k (\bar{G}^i - \bar{G}^{i+1}) = I_{2n} - \bar{G}^{k+1} \rightarrow I_{2n},$$

因此 $\sum_{i=0}^k (\bar{G}^i - \bar{G}^{i+1})_{22} \rightarrow I_n$. 由定义1, 式(24)的右端可看作不确定项 $f(k)$ 的加权平均, 因此, 本文得到的观测值 \hat{f} 恰是 $f(k)$ (离散加权平均意义) 的一个无偏估计. 特别地, 如果 $f(k)$ 是慢变的, 则 $\hat{f} \rightarrow f(k)$.

解方程(23)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \tilde{x}(k+1) \\ \hat{f}(k+1) \end{bmatrix} = \\ & \bar{G}^{k+1} \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \hat{f}(0) \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^k \bar{G}^i \begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta f(k-i) \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \bar{G}^i \begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta f(k-i) \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k P^{-1} \begin{bmatrix} D & -I \\ 0 & -D \end{bmatrix}^i P \begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta f(k-i) \end{bmatrix} = \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k P \begin{bmatrix} D & -I \\ 0 & -D \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta f(k-i) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (25)$$

考虑到

$$\begin{bmatrix} D & -I \\ 0 & -D \end{bmatrix}^i = \begin{cases} \begin{bmatrix} D^i & 0 \\ 0 & (-D)^i \end{bmatrix}, & i = 2m, \\ \begin{bmatrix} D^i & -D^{i-1} \\ 0 & (-D)^i \end{bmatrix}, & i = 2m+1, \end{cases} \quad (26)$$

将式(26)代入式(25)可得

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) & \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} D^i \Delta f(k-i-1), \\ \tilde{f}_j(k) & \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} d_j^i \Delta f_j(k-i-1), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_j(k)| & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k-1} d^i |\Delta f_j(k-i-1)| \leq \\ & \beta \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k-1} d^i = \frac{\beta}{1-d}. \end{aligned}$$

证毕.

5 仿真(Simulations)

考虑第3部分中的连续不确定系统

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u + w(t). \quad (27)$$

其中:

$$\begin{aligned} A & = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \Delta A = \begin{bmatrix} -0.01 & -0.07 \\ 0.02 & 0.11 \end{bmatrix}, \\ B & = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, w(t) = \begin{bmatrix} 0.2 \sin t \\ 0.1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

令总和的不确定项 $f(t) = \Delta Ax(t) + \Delta Bu(t) + w(t)$, 根据式(4)设计不确定项观测器, 并且取 $L_1 = A + 2\Lambda, L_2 = \Lambda^2, \Lambda = \text{diag}\{5, 5\}$. 对式(27)的离散化系统(20), 按式(21)设计观测器, 并且取 $L_1 = A + I, L_2 = I - D^2, D = \text{diag}\{0.1, 0.1\}$, 这两种情况下的系统仿真如图1、图2所示.

图1、图2为连续不确定系统(27), 按式(4)设计不确定项观测器时所做的仿真, 由图像看出, 观测值 $\hat{f}(t)$ 的两个分量对实际值 $f(t)$ 的两个分量均有很好的逼近性能. 图3、图4为系统(27)离散化后的系统(20), 按式(21)设计的不确定项观测器所做的仿

真, 由图像看出, 观测值 $\hat{f}(k)$ 的两个分量对不确定项 $f(k)$ 的两个分量也有很好的逼近性能.

为了验证不确定项观测器在控制器设计中的效果, 下面用本文方法与常规界估计方法对系统(27)设计变结构控制, 并给出仿真比较(篇幅所限, 这里只给了出连续系统的状态仿真).

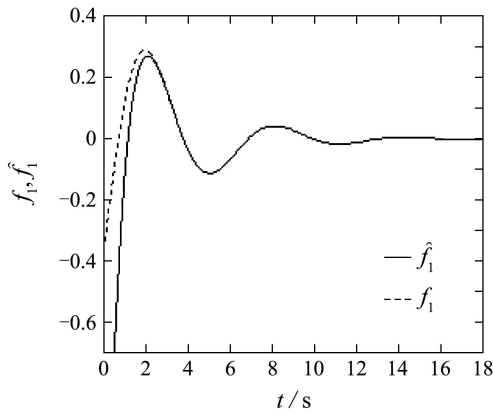


图1 $\hat{f}_1(t)$ 和 $f_1(t)$ 的轨迹

Fig. 1 Trajectories of $\hat{f}_1(t)$ and $f_1(t)$

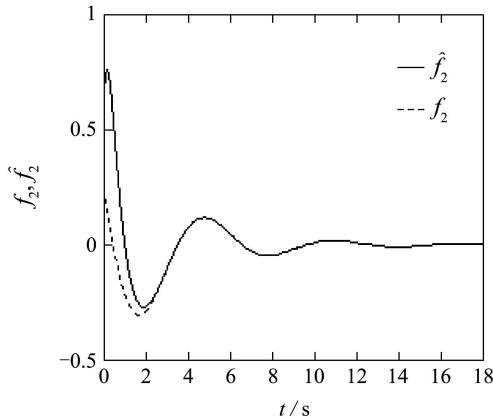


图2 $\hat{f}_2(t)$ 和 $f_2(t)$ 的轨迹

Fig. 2 Trajectories of $\hat{f}_2(t)$ and $f_2(t)$

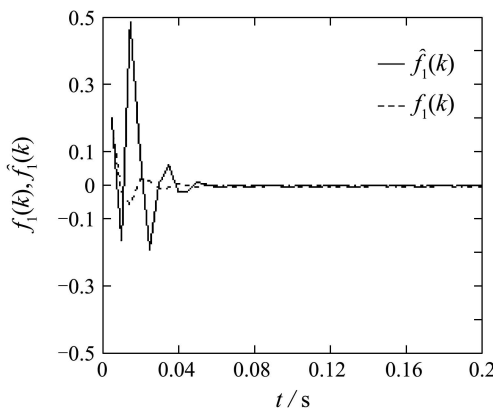


图3 $\hat{f}_1(k)$ 和 $f_1(k)$ 的轨迹

Fig. 3 Trajectories of $\hat{f}_1(k)$ and $f_1(k)$

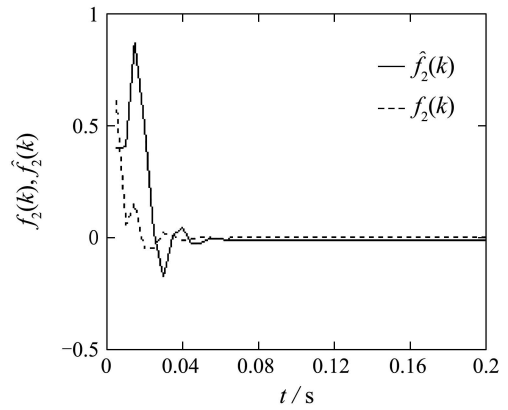


图4 $\hat{f}_2(k)$ 和 $f_2(k)$ 的轨迹

Fig. 4 Trajectories of $\hat{f}_2(k)$ and $f_2(k)$

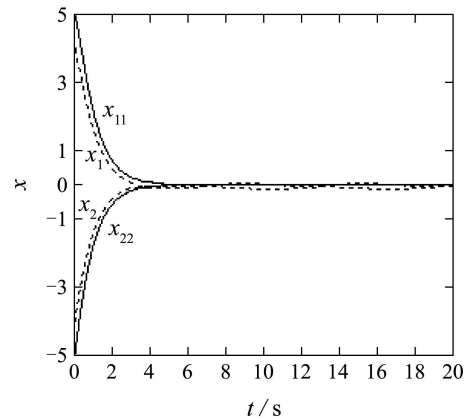


图5 闭环系统状态轨迹

Fig. 5 Trajectories of closed-loop system states

取切换函数 $s = x_1 + x_2$, 按常规界估计方法, 设计滑模控制器

$$u = -\frac{0.5x_1 - x_2 + \varepsilon_1 \text{sgn } s}{0.9}, \quad (28)$$

其中 $\varepsilon_1 > 0.2 + \sqrt{2}|\Delta Ax|$.

而按本文的基于不确定项观测器的设计方法, 设计控制器为

$$u = -0.5x_1 - x_2 - \hat{f}_1 - \hat{f}_2 - \varepsilon_2 \text{sgn } s, \quad (29)$$

其中 $\varepsilon_2 = 0.1$. 显然, 设计的控制器切换增益要比常规按界估计设计要小的多. 图5是两种方法设计变结构控制系统的仿真, 其中 x_1, x_2 (虚线)是常规方法设计的变结构控制系统的状态运动轨迹; x_{11}, x_{22} (实线)是按本文方法用观测的 $\hat{f}(t)$ 代替不确定项 $f(t)$, 设计变结构控制系统状态的的运动轨迹. 从图5看出, 本文方法基本上可以保证状态收敛到零, 常规方法则一般不能保证状态收敛到零, 而且状态在切换面附近穿越振幅大, 平稳性差, 动态性能明显不如本文方法.

(下转第942页)