

随机Rayleigh振子的首次穿越和最优控制

李佼瑞^{1,2}, 徐 伟²

(1. 西安财经学院 精算学系, 陕西 西安 710061; 2. 西北工业大学 应用数学系, 陕西 西安 710072)

摘要: 研究随机Rayleigh振子的首次穿越和最优控制问题. 利用随机平均法给出了系统运动方程的随机平均微分方程, 并对平均方程建立了条件可靠性函数的后向Kolmogorov方程, 得出相应首次穿越条件概率密度函数, 并利用Lyapunov指数法对受控系统的平均方程进行了随机稳定化, 得到了最优控制率.

关键词: Rayleigh 振子; 随机平均法; 首次穿越; 随机稳定化

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

First-passage failure and optimal control of stochastic Rayleigh oscillator

LI Jiao-rui^{1,2}, XU Wei²

(1. Department of Actuarial Science, Xi'an University of Finance & Economics, Xi'an Shaanxi 710061, China;

2. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China)

Abstract: The first-passage failure and optimal control of stochastic Rayleigh oscillator are studied in this paper. An averaged Itô stochastic differential Equation of the stochastic system is reduced by using the stochastic averaging method. A backward Kolmogorov Equation governing the conditional reliability function of first passage failure is then established. The conditional reliability function and the conditional probability density are also obtained by solving the backward Kolmogorov Equation with boundary conditions. Finally, an optimal control law of this system is obtained.

Key words: Rayleigh oscillator; stochastic averaging method; first-passage failure; stochastic stabilization

1 引言(Introduction)

随机稳定性理论是研究动力学系统在受到随机激励下, 其状态在半无限长时间内保持在某平衡点邻域的概率统计特性. 在实践中, 当系统受到随机激励时, 系统将在较大的范围内做随机运动, 首次穿越就是研究此时系统状态在一个时间区间内停留在一个较大区域内的概率统计特性. 系统状态停留在安全域内的概率就是系统的可靠性, 首次穿越安全域边界的平均时间, 就是系统寿命的数学期望. 所以首次穿越问题对于研究随机动力学系统具有十分重要的意义. 然而, 首次穿越问题的研究是十分困难的, 迄今仅限于能求出精确平稳解的一维情形^[1]. 对于无法求得精确平稳解及高维系统, 近年来朱位秋院士及其合作者提出了一种颇为有效的方法^[2~4], 该方法将系统看作是随机激励的、耗散的Hamilton系统, 利用拟Hamilton系统的随机平均法^[5~7]得出系统的随机平均微分方程, 对平均方程建立条件可靠性

函数的后向Kolmogorov方程及首次穿越时间条件矩的Pontragin方程, 通过这两个方程研究系统的首次穿越问题. 而对于系统的最优控制问题^[8,9], 是通过反馈控制使原不稳定的随机动力学系统变成稳定, 或提高系统的稳定度. 在半无限长时间上的随机稳定化是一种具有待定成本函数的遍历控制方法. 对于系统的随机平均微分方程, 以最大Lyapunov指数最小为准则确定成本函数, 达到求出最优控制律的目的.

本文中, 考虑到工程振动中随机激励的存在, 研究了典型的振动系统Rayleigh振子在Gauss白噪声参激下的首次穿越和最优控制问题. 利用受激励系统的随机平均方程, 研究系统的非线性阻尼项、随机激励项对首次穿越、可靠性及系统稳定性的影响.

2 随机Itô平均微分方程(Stochastic averaging differential equation)

考虑如下形式的Gauss白噪声参激下Rayleigh

振子:

$$\begin{cases} \dot{Q} = P, \\ \dot{P} = -Q - \varepsilon\mu(aP^2 - bP - c)P + \varepsilon^{\frac{1}{2}}QW(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\dot{P} = \frac{dP}{dt}, \dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$, ε 是小参数, μ, a, b, c 是参数, $W(t)$ 是 Gauss 白噪声, 具有如下的相关函数:

$$E[W(t)W(t + \tau)] = 2D\delta(\tau). \quad (2)$$

其中: $\delta(t)$ 是 Delta 函数, D 为 Gauss 白噪声的强度. 系统(1)可以等价地表示为

$$\begin{cases} dQ = \frac{\partial H}{\partial P} dt, \\ dP = -[\frac{\partial H}{\partial Q} + \varepsilon\mu(aP^2 - bP - c) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}Q\sqrt{2D}dB(t)]. \end{cases} \quad (3)$$

上式描述的是一个 Gauss 白噪声参激下单自由度的拟 Hamilton 系统, 其中 $B(t)$ 是标准 Wiener 过程, H 为未扰 Hamilton 系统的 Hamilton 函数:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2). \quad (4)$$

其中 p, q 是随机过程 P, Q 对应的样本值.

利用 Itô 微分公式^[2]得到 H 所满足的 Itô 微分方程为

$$dH = \varepsilon[-\mu(aP^2 - bP - c)(\frac{\partial H}{\partial p})^2 + Dq\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}]dt + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\frac{\partial H}{\partial p}\sqrt{2D}qdB(t). \quad (5)$$

利用随机激励的、可积的拟 Hamilton 系统随机平均法得到平均 Itô 方程为

$$dH = \bar{m}(H)dt + \bar{\sigma}(H)dB(t). \quad (6)$$

上式描述的 H 是一维时齐扩散过程, $\bar{m}(H), \bar{\sigma}(H)$ 分别为漂移系数和扩散系数, 并且

$$\bar{m}(H) = \frac{1}{T(H)} \int_{\Sigma} [(-\varepsilon\mu(aP^2 - bP - c) \cdot (\frac{\partial H}{\partial p})^2 + \varepsilon Dq^2 \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}) / \frac{\partial H}{\partial p}] dq, \quad (7)$$

$$\bar{\sigma}^2(H) = \frac{1}{T(H)} \int_{\Sigma} [2D\varepsilon q^2 (\frac{\partial H}{\partial p})^2 / \frac{\partial H}{\partial p}] dq, \quad (8)$$

$$T(H) = \int_{\Sigma} [1 / \frac{\partial H}{\partial p}] dq, \quad (9)$$

$$\Sigma = \{q | -\sqrt{2H} \leq q \leq \sqrt{2H}\}. \quad (10)$$

由式(4)得 $p = \sqrt{2H - q^2}$ 代入式(7)~(10)计算, 得

$$\bar{m}(H) = 8\sqrt{2}\varepsilon\mu bH^{3/2}/3\pi + \varepsilon DH + \varepsilon\mu cH - 3a\varepsilon\mu H^2/2, \quad (11)$$

$$\bar{\sigma}^2(H) = \varepsilon DH^2. \quad (12)$$

其中与平均方程(6)相应的 FPK 方程为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial H}(\bar{m}(H)\varphi) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial H^2}(\bar{\sigma}^2(H)\varphi). \quad (13)$$

其中 $\varphi = \varphi(H, t|H_0)$ 是修正后 Hamilton 过程的转移概率密度, FPK 方程(13)的初始条件为

$$\varphi(H, 0|H_0) = \delta(H - H_0). \quad (14)$$

因为 H 在 $[0, \infty)$ 上变化, 则 FPK 方程(12)的边界条件为

$$\varphi = \text{有限}, H = 0. \quad (15)$$

3 系统的首次穿越(First-passage failure of the system)

系统在受到随机参数激励时, 将在较大范围内做随机运动. 对于 Gauss 白噪声参激下 Rayleigh 振子, 当阻尼项、随机激励项的系数为小量时, 将系统可看作是一个 Gauss 白噪声参激下可积的拟 Hamilton 系统. 首次穿越研究系统状态首次越出某一个允许的安全区域的概率或统计特性. 系统状态停留在安全域的概率就是可靠性, 系统首次越出安全域就意味着损坏. 为此, 对随机平均方程(6)定义条件可靠性函数为

$$R(t|H_0) = P\{H(s) \in \Omega, s \in (0, t] | H(0) = H_0 \in \Omega\}. \quad (16)$$

其中: Ω 为 H 的安全域, Γ_0, Γ_c 为安全域的两个边界, 如图 1 所示.

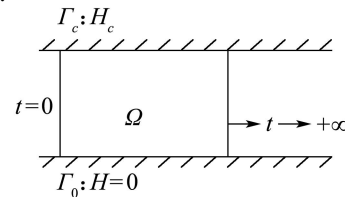


图 1 H 的安全域

Fig. 1 Safe domain of H

支配 $R(t|H_0)$ 的后向 Kolmogorov 方程为

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \bar{m}(H_0)\frac{\partial R}{\partial H_0} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(H_0)\frac{\partial^2 R}{\partial H_0^2}. \quad (17)$$

式中 $\bar{m}(H_0), \bar{\sigma}(H_0)$ 分别为式(11)(12) 在 $H = H_0$ 的值. 初始条件为

$$R(0|H_0) = 1, H_0 \in \Omega. \quad (18)$$

边界条件为

$$R(t|H_0) = 0, H_0 \in \Gamma_c : H = H_c, \quad (19)$$

$$R(t|H_0) = \text{有限}, H_0 \in \Gamma_0 : H = 0. \quad (20)$$

定性边界条件(20)利用式(17)~(19)化为如下的定量条件:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \varepsilon DH \frac{\partial R}{\partial H_0}. \tag{21}$$

记首次穿越的条件概率为

$$F(t|H_0) = 1 - R(t|H_0). \tag{22}$$

条件概率密度函数为

$$f(T|H_0) = \left. \frac{-\partial R(t|H_0)}{\partial t} \right|_{t=T}. \tag{23}$$

对于方程(17)及(23)给出3组不同参数值, 给出利用Peace-Rachford 格式法得到近似解析解的同时, 给出了数字模拟解. 其中: R_1, l_1 所使用的参数值为 $\mu = 0.5, b = 0.4, c = 0.5, a = 0.5, D = 3.0, \varepsilon = 0.05$; R_2, l_2 使用的参数值 $D = 3.3$, 其余参数值与前同; R_3, l_3 使用的参数值为 $D = 3.2, \mu = 0.4$, 其余参数值与前同. 如图2(a)、图2(b)所示.

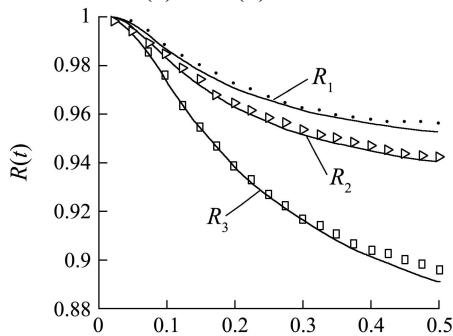


图 2(a) 系统(1)的条件可靠性函数(-: 近似解析解; ●, △, □: 数字模拟解)

Fig. 2(a) Reliability function(-: approximately analytical results; ●, △, □: digital simulation)

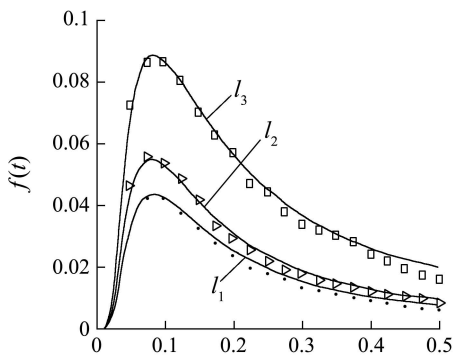


图 2(b) 系统(1)的首次穿越的概率密度(-: 近似解析解; ●, △, □: 数字模拟解)

Fig. 2(b) Probability density of first-passage time of system(-: approximately analytical results; ●, △, □: digital simulation)

在图2(a)中, 比较 $R_1(t), R_2(t), R_3(t)$ 3条曲线, 它们都是时间的单调递减函数, 可见由于随机激励的存在, 系统随着时间的变化, 可靠性逐渐减小. 对比3条可靠性函数曲线, 在初始时刻的临近区域随机激励强度 D 增大会导致可靠性函数曲线向下

方移动, 即由 $R_1(t)$ 移向 $R_2(t)$, 系统可靠性变小. 而当系统的非线性阻尼系数 μ 变小时, 系统能量的耗散减小, 也使得可靠性函数曲线向下移动, 即由 $R_2(t)$ 移向 $R_3(t)$. 图2(b)中, 从系统被损坏的概率密度这个角度给出了同样的解释: 随着随机激励强度 D 增大、非线性阻尼系数 μ 减小, 在初始时刻的临近区域系统发生首次穿越的概率密度增大, 即首次穿越现象更容易发生. 同时近似解析解和数字模拟是相吻合地. 于是可以给出以下结论:

命题 1 对于Gauss白噪声参激下的Rayleigh振子(1), 当随机激励为弱激励时, 可靠性函数 $R(t)$ 随着激励强度 D 增大而减小, 随着非线性阻尼系数 μ 增大而增大.

4 系统的随机稳定化(Stochastic stabilization of the system)

系统(1)所对应的受控的Hamilton系统为

$$\begin{cases} \dot{Q} = P, \\ \dot{P} = -Q - \varepsilon\mu(aP^2 - bP - c)P + u(P, Q) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}QW(t). \end{cases} \tag{24}$$

其中: $u = u(P, Q)$ 是反馈控制力, 文献[10,11]提出将 u 分成保守控制力 u_1 与耗散控制力 u_2 , 用 u_1 改变系统的Hamilton结构, 从而改变系统中能量与响应的分布. 用 u_2 耗散系统能量, 从而增大稳定性, 减小系统的能量与响应. 为了应用拟Hamilton系统随机平均法, 这里只考虑反馈控制力为耗散控制力 u_2 , 并且假设 u_2 为 ε 阶小量, 即考虑对系统的弱控制. 这时受控系统(24)对应的随机平均方程

$$dH = [\bar{m}(H) + \langle u_2 P \rangle]dt + \bar{\sigma}(H)dB(t). \tag{25}$$

其中

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{T(H)} - \int_{\Sigma} (\cdot / \frac{\partial H}{\partial p}) dq. \tag{26}$$

考虑受控的平均方程(25)的遍历控制, 设性能指标为

$$J = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} [g_1(H(s)) + \langle Ru_2^2(s) \rangle] ds. \tag{27}$$

其中: $g_1(H)$ 是待定的成本函数, R 为待定的正常数. 动态规划方程为

$$\inf_{u_2} \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2(H) \frac{d^2 V}{dH^2} + [\bar{m}(H) + \langle u_2 p \rangle] \frac{dV}{dH} + g_1(H) + \langle u_2^T R u_2 \rangle \right\} = \gamma. \tag{28}$$

上式中

$$\gamma = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} [g_1(H(s)) + \langle Ru_2^{2*}(s) \rangle] ds. \tag{29}$$

将式(28)左边对 u_2 求极小, 得到最优控制律

$$u_2^* = -\frac{1}{2R} \frac{dV}{dH} p, \quad (30)$$

从而有

$$\langle u_2^* p \rangle = -\frac{1}{2R} \frac{dV}{dH} \langle p^2 \rangle, \quad (31)$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{1}{T(H)} \int_{-\sqrt{2H}}^{\sqrt{2H}} (2H - q^2)^{\frac{1}{2}} dq = H. \quad (32)$$

当 $\frac{dV}{dH} > 0$ 时, u_2^* 为拟线性阻尼力, 将 u_2^* 代替式(28)左端得最后动态规划方程

$$\frac{1}{2} \sigma^2(H) \frac{d^2 V}{dH^2} + \bar{m}(H) \frac{dV}{dH} - \frac{1}{4R} \langle \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^2 \rangle \left(\frac{dV}{dH}\right)^2 + g_1(H) = \gamma. \quad (33)$$

为满足动态规划方程(33), 由于 $H \rightarrow 0$ 时, 考虑到式(12)和(32)及

$$\bar{m}(H) = (\varepsilon D - \varepsilon \mu c)H + o(H), \quad (34)$$

则需假定 $H \rightarrow 0$ 时,

$$g_1(H) - \gamma = kH + o(H), \quad (35)$$

$$\frac{dV}{dH} = C + o(H^0). \quad (36)$$

这里 $o(\cdot)$ 表示 $|\cdot|$ 的阶. 将式(12)(32)(34)(35)(36)代入式(33), 得

$$C = R[\varepsilon(D - \mu c) + \sqrt{\varepsilon^2(D - \mu c)^2 + 2k/R}]. \quad (37)$$

将式(37)代入式(36), 将式(36)(32)再代入式(31), 进一步将式(31)(34)代入下式:

$$\bar{m}(H) = \bar{m}(H) + \langle u_2^* p \rangle, \quad (38)$$

则

$$\bar{m}(H) = -\sqrt{(\varepsilon D - \varepsilon \mu c)^2 + 2k/R} H + o(H), \quad H \rightarrow 0. \quad (39)$$

最大Lyapunov 指数是诊断和描述动力学系统的稳定性及混沌的重要参数, 对最大Lyapunov 指数的计算的文献较多, 如文献[12], 下面我们给出未控的系统和受控的系统的平均方程的最大Lyapunov指数的计算公式. 平均微分方程(6)的最大Lyapunov指数近似为

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln H^{\frac{1}{2}}(Q, P) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln H(Q, P) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \left\{ \ln H(0) + \int_0^t [\bar{m}(0) - (\bar{\sigma}(0))^2] ds + \int_0^t \bar{\sigma}(0) dB(s) \right\} = [\bar{m}(0) - (\bar{\sigma}(0))^2 / 2] / 2. \quad (40)$$

按照式(40), 未控平均方程(6)的最大Lyapunov指数 λ^u 和受控平均方程(25)的最大Lyapunov指数 λ^c 分别为

$$\lambda^u = \frac{1}{2}(\varepsilon D - \varepsilon \mu c), \quad (41)$$

$$\lambda^c = -\frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon D - \varepsilon \mu c)^2 + 2k/R}, \quad (42)$$

两者之差为

$$\lambda^u - \lambda^c = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{(\varepsilon D - \varepsilon \mu c)^2 + 2k/R} - (\varepsilon D - \varepsilon \mu c) \right) < 0. \quad (43)$$

可以从式(43)直接得到以下结论:

命题 2 对Gauss白噪声参激下的受控Rayleigh 振子(24), 当随机激励为弱激励时, 受控系统的最大Lyapunov指数为负值, 且随着随机激励的强度 D 增大, 最大Lyapunov指数减小.

5 结论(Conclusion)

利用随机平均方法研究了Gauss白噪声参激下Rayleigh 振子的系统首次穿越和随机最优化问题. 当系统的非线性阻尼项、随机激励项的系数为小参数时, 将系统看作是一个Gauss白噪声参激下可积的拟Hamilton系统. 利用随机平均方程研究系统的首次穿越问题, 再利用受控系统的随机平均方程研究系统的随机最优遍历控制问题, 都能使问题简化, 通过3组不同的参数值给出的数值结果, 表明方法是行之有效的.

参考文献(References):

- [1] COX D R, MILLER H D. *The Theory of Stochastic Processes*[M]. New York: Chapman and Hall, 1965.
- [2] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制—Hamilton理论体系框架[M]. 北京: 科学出版社, 2003. (ZHU Weiqiu. *Nonlinear Stochastic Dynamics and Control: Framework of Hamiltonian Theory*[M]. Beijing: Science Press: 2003.)
- [3] ZHU W Q, DENG M L, HUANG Z L. First-passage failure of quasi-integrable Hamiltonian systems[J]. *ASME J of Applied Mechanics*, 2002, 69(3): 274 – 282.
- [4] ZHU W Q. First-passage time of strongly nonlinear oscillators under combined harmonic and white noise excitations[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 32(3): 291 – 305.
- [5] ROBERTS J B, SPANOS P D. Stochastic averaging: an approximate method of solving random vibration problems.[J]. *Int J of Nonlinear Mechanics*, 1986, 21(2): 111 – 134.
- [6] ZHU W Q. Stochastic averaging of quasi-Hamiltonian system[J]. *Science in China, Series A*, 1996, 39(1): 97 – 107.
- [7] ZHU W Q, HUANG Z L, YANG Y Q. Stochastic averaging of quasi-integrable Hamiltonian systems[J]. *ASME J of Applied Mechanics*, 1997, 64(4): 975 – 984.
- [8] KRSTIC M, DENG H. *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems*[M]. London: Springer, 1998.

- [9] ZHU W Q, HUANG Z L. Stochastic stabilization of quasi non-integrable Hamiltonian systems[J]. *Int J of Nonlinear Mechanics*, 2004, 39(6): 879 – 895.
- [10] ZHU W Q, YING Z G. Optimal nonlinear feedback control of quasi-Hamiltonian systems[J]. *Science in China, Series A*, 1999, 42(11): 1213 – 1219.
- [11] ZHU W Q, YING Z G, SOONG T T. An optimal nonlinear feedback control strategy for randomly excited structural systems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2001, 24(1): 31 – 51.
- [12] 杨绍清, 章新华, 赵长安. 一种最大李雅普诺夫指数估计的稳健算法[J]. *物理学报*, 2000, 49(4): 637 – 640.
- (YANG Shaoqing, ZHANG Xinhua, ZHAO Changan. A robust method for estimating the largest Lyapunov exponent[J]. *Acta Physica Sinica*, 2000, 49(4): 637 – 640.)

作者简介:

李俊瑞 (1973—), 男, 西安财经学院精算学系副教授, 博士, 主要从事非线性随机动力系统的研究, E-mail: jiaoruili@xaufe.edu.cn;

徐伟 (1956—), 男, 西北工业大学应用数学系教授, 博士生导师, 主要从事非线性随机动力系统的研究, E-mail: weixu@nwpu.edu.cn.

(上接第953页)

- [2] RICHalet J. Industrial application of model based predictive control[J]. *Automatica*, 1993, 29(5): 1251 – 1270.
- [3] ERNST E F H C, VERBRUGGON T H B, BOOM I A J J, et al. *First principle modeling and predictive functional control of enthalpic processes*[D]. France: Delf University of Technology, 1996.
- [4] ZHANG J, MORRIS A J. Long-range predictive models based on locally recurrent neural networks[C]//*Preprints of IFAC*. [S.l.]: [s.n.], 1995, 8: 708 – 712.
- [5] SORENSEN P H, NORGAARD M, RAVN O. Implementation of neural network based non-linear predictive control[J]. *Neurocomputing*, 1999, 28(1): 37 – 51.
- [6] 张斌, 李平, 陈红艳. 基于径向基神经网络补偿的预测函数控制[J]. *哈尔滨理工大学学报*, 2003, 8(1): 46 – 53.
(ZHANG Bin, LI Ping, CHEN Hongyan. Predictive functional control based on radial based function neural networks deviation compensation[J]. *J of Harbin University Science and Technology*, 2003, 8(1): 46 – 53.)
- [7] 靳其兵, 王建辉, 顾树生. 多步预测性能指标函数下的神经网络逆动态控制方法[J]. *控制与决策*, 1999, 14(4): 308 – 312.
(JIN Qibing, WANG Jianhui, GU Shusheng. Multi-step prediction cost function based reverse-dynamic method[J]. *Control and Decision*, 1999, 14(4): 308 – 312.)
- [8] 杨煜普, 黄新民, 许晓鸣. 非线性系统多步预测控制的复合神经网络实现[J]. *控制与决策*, 1999, 14(4): 314 – 318.
(YANG Yupu, HUANG Xinmin, XU Xiaoming. Nonlinear multi-step predictive control using compound neural networks[J]. *Control and Decision*, 1999, 14(4): 314 – 318.)
- [9] 刘军, 何星, 许晓鸣. 基于神经网络非线性模型的多级工作点阶跃响应扩展DMC预测控制[J]. *控制与决策*, 2000, 15(3): 342 – 344.
(LIU Jun, HE Xing, XU Xiaoming. Extension of DMC predictive control using neural network based nonlinear multi-step operation point responses[J]. *Control and Decision*, 2000, 15(3): 342 – 344.)
- [10] 方崇智, 萧德云. *过程辨识*[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998.
(FANG Chongzhi, XIAO Deyun. *Process Identification*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1998.)

作者简介:

张日东 (1977—), 男, 博士研究生, 研究领域包括预测控制和自适应控制等, E-mail: zrd-el@163.com;

王树青 (1939—), 男, 教授, 博士生导师, 研究领域包括工业生产过程模型化与优化控制、预测控制等, E-mail: sqwang@iipc.zju.edu.cn.