

文章编号: 1000-8152(2008)01-0027-06

# 无未知参数先验信息的非线性自适应观测器设计

丁玉琴, 刘允刚

(山东大学 控制科学与工程学院, 山东 济南 250061)

**摘要:** 研究了一类具有未知参数的非线性系统自适应观测器设计问题. 不同于现有结果, 本文所研究的非线性系统更为一般, 已知的系统信息更少: 1) 系统未知参数的范数的上界未知; 2) 具有关于可测输出非Lipschitz连续的非线性动态; 3) 系统输出显式地依赖于控制输入. 通过设计自适应调节器来估计未知参数范数, 从而给出了不基于未知参数先验信息的非线性自适应观测器设计的新方法. 所设计的观测器为全局渐近收敛的, 即实现了系统状态的渐近重构, 确保了未知参数估计的一致有界性. 此外, 在系统输出不显式地依赖于控制输入的条件下, 研究了降维观测器的设计问题. 仿真例子验证了本文理论结果的正确性.

**关键词:** 非线性系统; 未知参数; 自适应观测器; 降维; Lyapunov函数

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Nonlinear adaptive observer design without a priori knowledge on the unknown parameters

DING Yu-qin, LIU Yun-gang

(School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China)

**Abstract:** The adaptive observer design is investigated for a class of nonlinear systems with unknown parameters. Being different from the existing results, the nonlinear system studied here is more general and less dependent on a priori knowledge including 1) the upper bound of the (Euclidean) norm of the system unknown parameters; 2) the non-Lipschitz continuous nonlinear dynamics of the measurable output; 3) the explicitly dependence of the system output upon the control input. By adding an adaptive regulator to estimate the norm of the unknown parameters, a novel approach is developed under some conditions to design the nonlinear adaptive observer. The observer designed is globally asymptotically convergent, i.e., it not only gives the convergent reconstruction of the system states, but also guarantees the uniform boundedness of the estimations of the unknown parameters. In addition, the reduced-order observer design is considered when the system output is independent of the control input. A simulation example is given to illustrate the correctness of the theoretical results of this paper.

**Key words:** nonlinear systems; unknown parameters; adaptive observer; reduced-order; Lyapunov function

### 1 引言(Introduction)

状态观测问题与控制问题对偶, 是控制理论的中心问题之一, 自其出现以来一直都是控制理论的热点研究领域<sup>[1~10]</sup>. 另一方面, 与观测器理论紧密相关的输出(不完全状态)反馈控制、故障诊断、信号处理等理论也在一定程度上不断推动着观测器理论的发展<sup>[9,11]</sup>.

近20年来, 非线性观测器的设计问题得到了大量研究. 早在20世纪六、七十年代, 著名的Kalman滤波器<sup>[1]</sup>和Luenberger观测器<sup>[2]</sup>就给出了线性系统状态观测器完好的设计方法. 与线性系统不同, 非线性系统观测器的设计要复杂得多. 对非线性系统, 至今还没有统一的分析方法. 目前流行的办法是首先对系

统进行分类, 然后对不同类型的非线性系统分别研究状态观测器的存在性和如何设计等问题. 例如, 按照系统的非线性程度, 已经得到充分研究的系统有: Lipschitz非线性系统<sup>[5,12]</sup>, 仅依赖于系统输出的非线性系统<sup>[13,14]</sup>, 满足多变量圆判据的非线性系统<sup>[15]</sup>, 严格反馈随机非线性系统<sup>[16]</sup>等. 针对不同类型的非线性系统, 现在已经发展了多种设计观测器的方法, 主要有: 类Lyapunov函数法, 扩展的Kalman滤波器方法及扩展的Luenberger方法等等. 另外, 为适应不同系统模型与目标, 还往往要求所设计的观测器具有除状态重构外的其它功能, 例如自适应观测器、鲁棒观测器、高增益观测器等等.

自适应观测器不仅可给出参数不确定性非线性

收稿日期: 2006-09-04; 收修稿日期: 2007-03-19.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60304002, 60674036); 山东省科技发展计划资助项目(2004GG4204014); 教育部新世纪人才支持计划资助项目; 山东省优秀中青年科学家科研奖励基金资助项目(2007BS01010).

系统状态(或函数)重构,还在持续激励条件下给出系统未知参数的渐近估计.自适应观测器的研究要追溯到20世纪70年代<sup>[17~20]</sup>.其中,文[17~19]对含有未知参数的线性系统,提出了一种简单的渐近收敛自适应观测器设计方法;文[20]则基于滤波变换,给出了任意指数收敛自适应观测器设计方法.20世纪80年代后期,文[4]推广了文[18]的结果,提出了非线性系统自适应观测器问题.进一步的发展见文[13, 14],给出了自适应观测器特征型以及可转化为该型的充要条件,但系统的非线性仅依赖于系统输入和可测输出.不同于文[4, 13, 14],文[12]在系统的非线性动态关于状态为Lipschitz连续条件下,给出了非线性系统的自适应观测器设计方法,但该文的缺点是需事先已知未知参数范数的上界. Besançon在文[7]中综合了上述结果,提出了设计非线性自适应观测器的更一般性的理论框架.

本文旨在研究一类具有未知参数的非线性系统的自适应观测器设计问题.与文[7, 12, 21]不同,本文所给出的非线性自适应观测器设计方法无需知道未知参数所属的范围(例如在文[12]中,未知参数 $\|\theta\| \leq \gamma_3$ 就给出了 $\theta$ 所属的范围).通过在线估计未知参数的范数,从而设计出基于更少未知参数信息的非线性自适应观测器.所设计观测器不仅实现了状态的渐近重构,还确保了未知参数估计的一致有界性.此外,在系统输出不显式地依赖于控制输入的条件下,本文还给出了一类无需自适应律的降维鲁棒非线性观测器设计方法.

本文中,用 $\mathcal{C}(\mathcal{U}_1; \mathcal{U}_2)$ 表示所有从集合 $\mathcal{U}_1$ 映射到集合 $\mathcal{U}_2$ 的连续函数的集合;用 $\lambda_{\max}(P)$ 和 $\lambda_{\min}(P)$ 分别表示对称矩阵 $P$ 的最大和最小特征值;用 $H^\top$ 表示向量或矩阵 $H$ 的转秩;用 $0_{m \times n}$ 表示所有元素皆为零的 $m \times n$ 矩阵;用 $I_m$ 表示 $m \times m$ 单位矩阵.

## 2 非线性自适应观测器设计(Nonlinear observer design)

### 2.1 系统模型与问题刻画(System model and problem formulation)

考虑如下非线性系统的自适应观测器设计问题:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi_1(u, y) + \varphi_2(u, x) + \\ \quad B(\Phi_1(u, y) + \Phi_2(u, x))\theta, \\ y = Cx + \varphi_3(t, u), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态向量,且初始值 $x(0) = x_0$ ,其观测值记作 $\hat{x}$ ,观测误差记作 $\tilde{x}$ ,即 $\tilde{x} = x - \hat{x}$ ;  $u \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{R}^r$ 分别是系统的控制输入和输出;常数向量 $\theta \in \mathbb{R}^p$ 完全未知.在系统(1)中,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times s}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $\varphi_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r; \mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi_3 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^r)$ ,  $\Phi_1 \in$

$\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r; \mathbb{R}^{s \times p})$ ,  $\Phi_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{s \times p})$ .在本文中,假设 $(A, C)$ 可观,  $y$ 可测.则可以选取参数矩阵 $K \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,使得 $A - KC$ 是Hurwitz的.

本文的主要结论是建立在系统(1)满足如下假设条件基础之上:

**假设 1** 函数 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 一致有界,且存在正常数 $\gamma_1, \gamma_2$ 使得函数 $\varphi_2, \Phi_2$ 分别满足

$$\begin{cases} \|\varphi_2(u, x) - \varphi_2(u, \hat{x})\| \leq \gamma_1 \|x - \hat{x}\|, \\ \quad \forall u \in \mathbb{R}, \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \\ \|\Phi_2(u, x) - \Phi_2(u, \hat{x})\| \leq \gamma_2 \|C_1(x - \hat{x})\|, \\ \quad \forall u \in \mathbb{R}, \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2)$$

此处 $C_1 \in \mathbb{R}^{s \times n}$ 的行向量皆是 $C$ 的行向量的线性组合,即存在矩阵 $M \in \mathbb{R}^{s \times r}$ ,使得 $C_1 = MC$ .

**假设 2** 存在对称、正定矩阵 $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 使得 $\gamma_1 < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}^2(P) + 1}$ ,且满足

$$\begin{cases} (A - KC)^\top P + P(A - KC) = -Q, \\ B^\top P = C_1. \end{cases} \quad (3)$$

**注 1** 形如系统(1)的观测器设计问题在故障诊断、信号传输以及自适应控制等领域有着较为广泛的应用<sup>[9, 11]</sup>.在文[9]中研究的电力同步机系统的监测问题就是系统(1)的一个特殊情况.

**注 2** 值得强调的是:要求函数 $\varphi_1$ 和 $\Phi_1$ 均为连续可导的函数是必要的.据此以及假设1可确保系统(1)的解是有定义的.此外,函数 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 的一致有界性对确保状态观测误差的收敛性起关键作用,这一点可从后面的分析中看出.

**注 3** 本文所研究的非线性系统(1)较现有文[7, 12, 21]中已研究的系统更为一般,已知的系统信息更少:1)系统未知参数的范数的上界未知;2)具有关于可测输出非Lipschitz连续的非线性动态;3)系统输出显式地依赖于控制输入.

本文的目标是设计如下形式的非线性自适应观测器:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \mu(\vartheta, \hat{x}), \\ \dot{\hat{x}} = \eta(\vartheta, \hat{x}), \end{cases} \quad (4)$$

实现系统(1)所有状态的重构.此处 $\mu \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{p+1})$ ,  $\eta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ,  $\vartheta \in \mathbb{R}^{p+1}$ 为相应的未知参数的估计.

### 2.2 全维自适应观测器设计(Full-order adaptive observer design)

结合文[7, 12]中所给出的自适应观测器设计方法的优点,给出如下无需更多未知参数信息的自适应观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + K(y - \hat{y}) + \varphi_1(u, y) + \varphi_2(u, \hat{x}) + \\ B(\Phi_1(u, y)\hat{\theta} + \Phi_2(u, \hat{x})\hat{\theta} + \gamma_2 C_1 \tilde{x} \hat{\Theta}), \\ \dot{\hat{\theta}} = \Gamma(\Phi_1(u, y) + \Phi_2(u, \hat{x}))^\top C_1 \tilde{x}, \\ \dot{\hat{\Theta}} = \rho \gamma_2 \|C_1 \tilde{x}\|^2, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\hat{x}$ 的初始值 $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$ ,  $\hat{y} = C\hat{x} + \varphi_3(t, u)$ ,  $K$ 满足假设2, 称之为自适应观测器(5)的第一方程的增益矩阵;  $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^p$ 为系统未知参数 $\theta$ 的估计且初始值 $\hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0$ , 其估计误差记作 $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ ,  $\Gamma$ 为正定对称阵, 称之为 $\hat{\theta}$ 的自适应律的增益矩阵;  $\hat{\Theta}$ 为 $\Theta = \|\theta\|$ 的估计且初始值 $\hat{\Theta}(0) = \hat{\Theta}_0$ , 其估计误差记作 $\tilde{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$ ,  $\rho$ 为正常数, 称之为 $\hat{\Theta}$ 的自适应律的增益。

**注4** 显而易见, 所设计的观测器(5)是由 $u, y, C_1 \tilde{x}$ 所驱动的. 其中 $y$ 是系统可测输出. 由假设1可知 $C_1 \tilde{x} = C_1 x - C_1 \hat{x} = My - M\hat{y}$ 是可测的. 据此易知上述所构造的自适应状态观测器是可以实现的.

由式(1)和(5)并注意到 $\frac{d\theta}{dt} = 0_{p \times 1}$ ,  $\frac{d\Theta}{dt} = 0$ , 可得如下状态观测误差和参数估计误差的动态方程:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x} + \varphi_2(u, x) - \varphi_2(u, \hat{x}) + \\ B\Phi_1(u, y)\tilde{\theta} + B(\Phi_2(u, x)\theta - \\ \Phi_2(u, \hat{x})\hat{\theta} - \gamma_2 C_1 \tilde{x} \hat{\Theta}), \\ \dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma(\Phi_1(u, y) + \Phi_2(u, \hat{x}))^\top C_1 \tilde{x}, \\ \dot{\tilde{\Theta}} = -\rho \gamma_2 \|C_1 \tilde{x}\|^2. \end{cases} \quad (6)$$

下面将给出本文的主要结论, 指出式(5)是可实现既定目标的渐近收敛自适应观测器.

### 2.3 主要结果(Main results)

本文的主要结果概括为如下定理.

**定理1** 考虑系统(1)的自适应状态观测器设计问题. 设该系统满足假设1和假设2. 则式(5)为系统(1)的渐近收敛自适应状态观测器, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0_{n \times 1}, \quad \sup_{t \geq 0} (\|\tilde{\theta}(t)\| + \|\tilde{\Theta}(t)\|) < \infty.$$

**证** 选取 Lyapunov 函数为

$$V(\tilde{x}, \tilde{\theta}, \tilde{\Theta}) = \tilde{x}^\top P \tilde{x} + \tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \rho^{-1} \tilde{\Theta}^2.$$

注意到

$$\frac{d\theta}{dt} = 0_{p \times 1}, \quad \frac{d\Theta}{dt} = 0,$$

因而

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = -\frac{d\hat{\theta}}{dt}, \quad \frac{d\tilde{\Theta}}{dt} = -\frac{d\hat{\Theta}}{dt},$$

则沿误差系统(6)的所有可能解求 $V$ 的导数, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{x}^\top ((A - KC)^\top P + P(A - KC)) \tilde{x} + \\ & 2\tilde{x}^\top P(\varphi_2(u, x) - \varphi_2(u, \hat{x})) + \\ & 2\tilde{x}^\top P B \Phi_1(u, y) \tilde{\theta} + 2\tilde{x}^\top P B (\Phi_2(u, x)\theta - \\ & \Phi_2(u, \hat{x})\hat{\theta} - \gamma_2 C_1 \tilde{x} \hat{\Theta}) - 2\tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} - \\ & 2\rho^{-1} \tilde{\Theta} \dot{\tilde{\Theta}}. \end{aligned} \quad (7)$$

应用假设1和假设2并注意到 $\Theta$ 的定义, 即 $\Theta = \|\theta\|$ 和不等式

$$\|P\tilde{x}\| \|\tilde{x}\| \leq \frac{1}{2} \|P\tilde{x}\|^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{x}\|^2 = \frac{1}{2} \tilde{x}^\top P P \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{x}^\top \tilde{x},$$

从而有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \tilde{x}^\top ((A - KC)^\top P + P(A - KC)) \tilde{x} + \\ & 2\gamma_1 \|\tilde{x}^\top P\| \|\tilde{x}\| + 2\tilde{x}^\top P B (\Phi_1(u, y) + \\ & \Phi_2(u, \hat{x})) \tilde{\theta} - 2\tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} + 2\gamma_2 \|C_1 \tilde{x}\|^2 \Theta - \\ & 2\gamma_2 \tilde{x}^\top P B C_1 \tilde{x} \hat{\Theta} - 2\rho^{-1} \tilde{\Theta} \dot{\tilde{\Theta}} \leq \\ & -\tilde{x}^\top Q \tilde{x} + \gamma_1 (\tilde{x}^\top P P \tilde{x} + \tilde{x}^\top \tilde{x}) + \\ & 2(\tilde{x}^\top P B (\Phi_1(u, y) + \Phi_2(u, \hat{x})) - \\ & \tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1}) \tilde{\theta} + 2(\gamma_2 \|C_1 \tilde{x}\|^2 - \rho^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}) \tilde{\Theta}. \end{aligned} \quad (8)$$

由此及式(5)得到

$$\dot{V} \leq \tilde{x}^\top (\gamma_1 (P P + I) - Q) \tilde{x}. \quad (9)$$

令 $\beta = \lambda_{\min}(Q) - \gamma_1 (\lambda_{\max}^2(P) + 1)$ . 则由假设2可知 $\beta > 0$ . 由此及式(9)可得

$$\dot{V} \leq -\beta \tilde{x}^\top \tilde{x}. \quad (10)$$

这意味着 $V$ 为有界的, 进而由其定义可得 $\tilde{x}, \tilde{\theta}, \tilde{\Theta}$ 的有界性, 即

$$\sup_{t \geq 0} (\max\{\|\tilde{x}(t)\|, \|\tilde{\theta}(t)\|, |\tilde{\Theta}(t)|\}) < \infty. \quad (11)$$

由式(10)还可以得到 $\tilde{x}$ 的平方可积性, 即

$$\int_0^\infty \|\tilde{x}(t)\|^2 dt < \infty.$$

进而由式(11)及定义 $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ 和 $\tilde{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$ , 得到 $\tilde{\theta}$ 和 $\tilde{\Theta}$ 的有界性, 即:

$$\sup_{t \geq 0} \|\tilde{\theta}(t)\| < \infty, \quad \sup_{t \geq 0} |\tilde{\Theta}(t)| < \infty. \quad (12)$$

至此, 由式(11)及(12)和函数 $\Phi_1, \Phi_2$ 的一致有界性(由假设1中保证), 可知式(6)中的第1方程式的右侧各函数均为有界的, 从而可得 $\dot{\tilde{x}}$ 是有界的. 由此及Barbălat引理<sup>1</sup>可得 $\tilde{x}$ 的渐近收敛性. 证毕.

本节给出了系统(1)的全维非线性自适应观测器设计方法. 下节将研究系统(1)在 $\varphi_3 \equiv 0_{r \times 1}$ 时的降维鲁棒非线性观测器设计问题.

<sup>1</sup>Barbălat引理: 如果 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 平方可积, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|x(\tau)\|^2 d\tau < \infty$ ,  $\dot{x}(t)$ 存在且有界, 那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0_{n \times 1}$ .

## 2.4 降维鲁棒非线性观测器设计(Reduced-order robust nonlinear observer design)

假定系统(1)中未知参数 $\theta = \theta(t)$ , 系统输出 $y = Cx$ (即 $\varphi_3 \equiv 0_{r \times 1}$ ), 并且不失一般性地假定

$$C = [I_r \quad 0_{r \times (n-r)}], r < n,$$

否则, 可以通过适当的坐标变换, 使得变换后系统中的 $C$ 具有该结构.

本节将在系统(1)满足假设2及如下较假设1更弱的假设条件下, 研究其降维鲁棒非线性观测器设计问题:

**假设3** 存在正常数 $\gamma_1$ , 使得对 $\forall u \in \mathbb{R}, \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ , 函数 $\varphi_2$ 满足:

$$\|\varphi_2(u, x) - \varphi_2(u, \hat{x})\| \leq \gamma_1 \|x - \hat{x}\|. \quad (13)$$

在给出观测器设计之前, 首先对系统(1)中的矩阵 $A$ 及满足假设条件2的对称正定矩阵 $P$ 和 $Q$ 作如下分解:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^\top & P_3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^\top & Q_3 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中:  $A_{11}, P_1, Q_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ;  $A_{12}, P_2, Q_2 \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$ ;  $A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$ ;  $A_{22}, P_3, Q_3 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ .

相应地, 系统状态 $x$ 划分为 $x_{[r]} = [x_1, \dots, x_r]^\top$ 和 $x_{[r+1,n]} = [x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n]^\top$ 两部分, 即 $x = [x_{[r]}^\top, x_{[r+1,n]}^\top]^\top$ . 显而易见, 由于 $y = Cx = x_{[r]}$ , 因而 $x_{[r]}$ , 即系统状态的前 $r$ 个分量可由系统输出直接得到. 所以降维观测器的任务是重构系统剩余的不可测状态分量, 即 $x_{[r+1,n]}$ .

至此, 借鉴文[6]中的观测器设计方法, 令 $L = P_3^{-1}P_2^\top \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$ , 从而设计出如下降维非线性观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\zeta}} = (A_{22} + LA_{12})\hat{\zeta} + (L(A_{11} - A_{12}L) + A_{21} - A_{22}L)y + [L \ I_{n-r}](\varphi_1(u, y) + \varphi_2(u, [y^\top \ \hat{\zeta}^\top - y^\top L^\top]^\top)), \\ \hat{x}_{[r]} = x_{[r]} = y, \hat{x}_{[r+1,n]} = \hat{\zeta} - Ly, \end{cases} \quad (15)$$

其中初始值 $\hat{\zeta}(0) = \hat{\zeta}_0$ .

下面定理2指出如上所设计的观测器是系统(1)的一个指数收敛降维鲁棒非线性观测器.

**定理2** 考虑当未知参数 $\theta = \theta(t)$ 以及系统输出 $y = Cx$ 时系统(1)的降维非线性观测器设计问题. 设该系统满足假设2和假设3, 且不失一般性地假定 $C = [I_r \quad 0_{r \times (n-r)}]$ . 则式(15)为此时系统(1)的一个降维、指数收敛鲁棒非线性观测器.

**证** 定义如下坐标变换:

$$\begin{pmatrix} y \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (n-r)} \\ L & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{[r]} \\ x_{[r+1,n]} \end{pmatrix}.$$

由此及系统(1), 得到

$$\begin{cases} y = x_{[r]}, \\ \dot{\zeta} = (A_{22} + LA_{12})\zeta + (L(A_{11} - A_{12}L) + A_{21} - A_{22}L)y + [L \ I_{n-r}](\varphi_1(u, y) + \varphi_2(u, [y^\top \ \zeta^\top - y^\top L^\top]^\top)) + B(\Phi_1(u, y) + \Phi_2(u, [y^\top \ \zeta^\top - y^\top L^\top]^\top))\theta. \end{cases}$$

进而应用式(15)得到降维观测器观测误差 $\tilde{\zeta} = \zeta - \hat{\zeta}$ 的动态方程:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\zeta}} &= (A_{22} + LA_{12})\tilde{\zeta} + [L \ I_{n-r}] \\ &\quad (\varphi_2(u, [y^\top \ \zeta^\top - y^\top L^\top]^\top) - \\ &\quad \varphi_2(u, [y^\top \ \hat{\zeta}^\top - y^\top L^\top]^\top)) + B(\Phi_1(u, y) + \\ &\quad \Phi_2(u, [y^\top \ \zeta^\top - y^\top L^\top]^\top))\theta. \end{aligned} \quad (16)$$

选取Lyapunov函数 $V_r(\tilde{\zeta}) = \tilde{\zeta}^\top P_3 \tilde{\zeta}$ . 该函数沿着降维观测误差方程(16)的所有可能解求导, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= \tilde{\zeta}^\top ((A_{22} + LA_{12})^\top P_3 + P_3(A_{22} + LA_{12}))\tilde{\zeta} + \\ &\quad 2\tilde{\zeta}^\top P_3 [L \ I_{n-r}] (\varphi_2(u, [y^\top \ \zeta^\top - y^\top L^\top]^\top) - \\ &\quad \varphi_2(u, [y^\top \ \hat{\zeta}^\top - y^\top L^\top]^\top)) + B(\Phi_1(u, y) + \\ &\quad \Phi_2(u, [y^\top \ \zeta^\top - y^\top L^\top]^\top))\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

据此及假设3, 得到:

$$\begin{aligned} &2\tilde{\zeta}^\top P_3 [L \ I_{n-r}] (\varphi_2(u, [y^\top \ \zeta^\top - y^\top L^\top]^\top) - \\ &\quad \varphi_2(u, [y^\top \ \hat{\zeta}^\top - y^\top L^\top]^\top)) \leq \\ &2\gamma_1 \|\tilde{\zeta}^\top P_3 [L \ I_{n-r}]\| \|\tilde{\zeta}\| \leq \\ &\gamma_1 \tilde{\zeta}^\top (P_3^\top (LL^\top + I_{n-r})P_3 + I_{n-r})\tilde{\zeta} = \\ &\gamma_1 \tilde{\zeta}^\top (P_2^\top P_2 + P_3^\top P_3 + I_{n-r})\tilde{\zeta}. \end{aligned} \quad (18)$$

由假设2, 可知存在矩阵 $M \in \mathbb{R}^{s \times r}$ , 使得:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^\top & P_3 \end{bmatrix} B = C_1^\top = C^\top M^\top = \\ &[I_r \quad 0_{r \times (n-r)}]^\top M^\top = [M \ 0_{s \times (n-r)}]^\top. \end{aligned}$$

由前面的定义知道 $L = P_3^{-1}P_2^\top$ , 从而

$$P_3 [L \ I_{n-r}] B = [P_2^\top \ P_3] B = 0_{(n-r) \times s}.$$

这意味着对 $\forall t \in [0, \infty)$ ,

$$\begin{aligned} &2\tilde{\zeta}^\top P_3 [L \ I_{n-r}] B (\Phi_1(u, y) + \\ &\quad \Phi_2(u, [y^\top \ \zeta^\top - y^\top L^\top]^\top))\theta(t) = 0. \end{aligned}$$

由此及式(18)得到:

$$\dot{V}_r \leq \tilde{\zeta}^\top ((A_{22} + LA_{12})^\top P_3 + P_3(A_{22} + LA_{12}))\tilde{\zeta} +$$

$$\gamma_1(P_2^\top P_2 + P_3^\top P_3 + I_{n-r})\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}^\top(\gamma_1(P_2^\top P_2 + P_3^\top P_3 + I_{n-r}) - Q_3)\tilde{\zeta}. \quad (19)$$

在上式中用到了等式:

$$(A_{22} + LA_{12})^\top P_3 + P_3(A_{22} + LA_{12}) = -Q_3.$$

该等式可将(14)代入假设2中的Lyapunov方程得到.

如此,应用附录中的引理1,从而有

$$\dot{V}_r \leq \tilde{\zeta}^\top(-\lambda_{\min}(Q) + \gamma_1(\lambda_{\max}^2(P) + 1))\tilde{\zeta}. \quad (20)$$

令 $\alpha = \lambda_{\min}(Q) - \gamma_1(\lambda_{\max}^2(P) + 1)$ . 由假设2, 易知 $\alpha > 0$ . 由此及式(20)可知, 对 $\forall \tilde{\zeta} \neq 0_{(n-r) \times 1}$ , 有

$$\dot{V}_r \leq -\alpha \tilde{\zeta}^\top \tilde{\zeta} \leq -\frac{\alpha}{\lambda_{\max}(P_3)} V_r < 0. \quad (21)$$

这意味着 $V_r$ 以 $\frac{\alpha}{\lambda_{\max}(P_3)}$ 为衰减系数指数收敛, 即观测器为以 $\frac{\alpha}{2\lambda_{\max}(P_3)}$ 为衰减系数指数收敛.

证毕.

**注 5** 下面给出的降维观测器无需设计自适应调节器来估计系统的未知参数. 与2.3节所给出的全维观测器相比, 虽系统输出 $y = Cx$ , 但放宽了对系统非线性和未知参数的要求: 去除了在假设1中对 $\Phi_2$ 的约束; 未知参数不再局限于时不变向量. 另一方面, 所得到的降维观测器实现了系统状态的指数重构, 而所得到的全维观测器仅实现了系统状态的渐近重构.

### 3 举例(Example)

考虑如下二阶非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + 0.2x_1e^{-t} + \frac{24}{17}(y\theta_1 + x_1\theta_2), \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 3x_2 + u^2 + 0.2x_2e^{-t} - \frac{40}{17}(y\theta_1 + x_1\theta_2), \\ y = x_1 + e^{-t}, \end{cases} \quad (22)$$

其中控制输入 $u = 2 \sin(1.5t)$ .

基于第2节给出的设计方法, 可设计如下非线性自适应观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 0.2\hat{x}_1e^{-t} + \frac{24}{17}(y\hat{\theta}_1 + \hat{x}_1\hat{\theta}_2 + (x_1 - \hat{x}_1)\hat{\Theta}) - y, \\ \dot{\hat{x}}_2 = 2\hat{x}_1 - 3\hat{x}_2 + u^2 + 0.2\hat{x}_2e^{-t} - \frac{40}{17}(y\hat{\theta}_1 + \hat{x}_1\hat{\theta}_2 + (x_1 - \hat{x}_1)\hat{\Theta}) + y, \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = 40y(x_1 - \hat{x}_1), \quad \dot{\hat{\theta}}_2 = 40\hat{x}_1(x_1 - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{\Theta}} = 20\|(x_1 - \hat{x}_1)\|^2. \end{cases} \quad (23)$$

设系统(22)的初始状态为 $x_1(0) = -0.5, x_2(0) = 1$ ; 观测器(23)的初始状态为 $\hat{x}_1(0) = 0.5, \hat{x}_2(0) =$

$-1, \hat{\theta}_1(0) = 0.5, \hat{\theta}_2(0) = 0.5, \hat{\Theta}(0) = 2.5$ ; 未知参数为 $\theta_1 = -1, \theta_2 = -2$ . 仿真结果如下面图1、图2和图3所示. 从图1和图2可看出所设计的非线性自适应观测器实现了对系统(22)状态的渐近估计, 从图3可看出未知参数估计以及未知参数范数的估计都是有界的. 该仿真结果充分说明了本文理论结果的正确性.

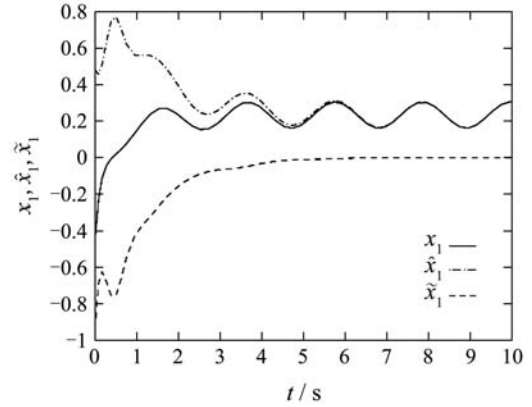


图 1  $x_1, \hat{x}_1$ 和 $\tilde{x}_1$ 的轨迹

Fig. 1 Trajectories of  $x_1, \hat{x}_1$  and  $\tilde{x}_1$

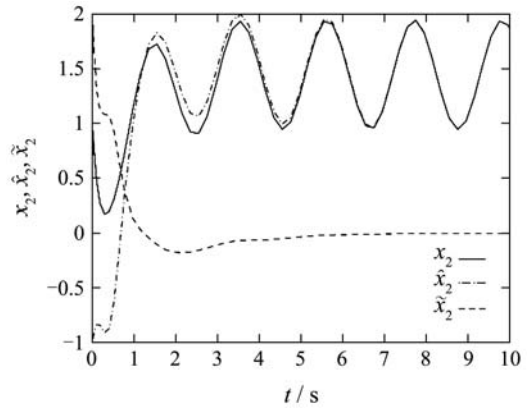


图 2  $x_2, \hat{x}_2$ 和 $\tilde{x}_2$ 的轨迹

Fig. 2 Trajectories of  $x_2, \hat{x}_2$  and  $\tilde{x}_2$

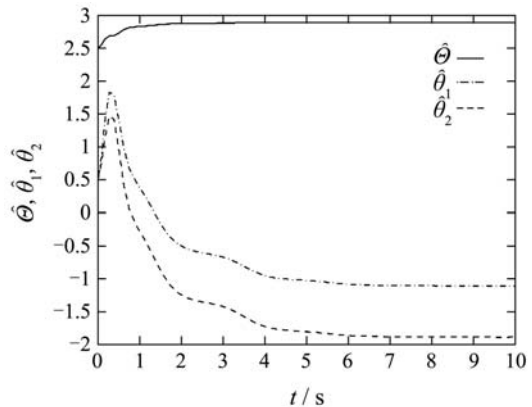


图 3  $\hat{\Theta}, \hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的轨迹

Fig. 3 Trajectories of  $\hat{\Theta}, \hat{\theta}_1$  and  $\hat{\theta}_2$

## 4 结论(Conclusion)

本文针对一类具有未知参数的非线性系统, 研究了其自适应观测器和降维鲁棒观测器设计问题. 本文所设计的非线性自适应观测器无需已知系统未知参数范数的上界. 通过设计自适应调节器来估计未知参数范数, 进而给出了全维渐近收敛的自适应观测器设计新方法. 所构造的观测器不仅实现了系统状态的渐进重构, 而且确保了未知参数及其范数估计的一致有界性. 同时, 在系统输出不显式地依赖于控制输入等条件下, 给出了此时系统的降维、指数收敛鲁棒非线性观测器设计方法.

## 参考文献(References):

- [1] KALMAN R E. On a new approach to filtering and prediction problems[J]. *Trans of the ASME-J of Basic Engineering*, 1960, 82(Series D): 35 – 45.
- [2] LUENBERGER D G. An introduction to observers[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1971, 16(6): 596 – 602.
- [3] KRENER A J, ISIDORI A. Linearization by output injection and nonlinear observers[J]. *Systems & Control Letters*, 1983, 3(1): 47 – 52.
- [4] BASTIN G, GEVERS M R. Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1988, 33(7): 650 – 658.
- [5] RAJAMANI R. Observers for Lipschitz nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(3): 397 – 401.
- [6] BESANCON G. On uniform observation of nonuniformly observable systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1996, 29(1): 9 – 19.
- [7] BESANCON G. Remarks on nonlinear adaptive observer design[J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 41(4): 271 – 280.
- [8] KREISSELMEIER G, ENGEL R. Nonlinear observers for autonomous Lipschitz continuous systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(3): 451 – 464.
- [9] BESANCON G, MORALES J L, GUEVRAR O H. On adaptive observers for state affine systems and application to synchronous machines[C] // *Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control*. Maui, Hawaii USA: IEEE Press, 2003: 2192 – 2197.
- [10] BESANCON G. Observer design for nonlinear systems[M] // *Advance Topics in Control Systems Theory*. London: Springer-Verlag, 2006: 61 – 89.
- [11] CHENG T, HE X D, ASADA H H. Nonlinear observer design for two-phase flow heat exchangers of air conditioning systems[C] // *Proc of 2004 American Control Conference*. Boston USA: IEEE Press, 2004: 1534 – 1539.
- [12] CHO Y M, RAJAMANI R. A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(4): 534 – 537.
- [13] MARINO R, TOMEI P. Adaptive observers for single output nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1990, 35(9): 1054 – 1058.
- [14] MARINO R, TOMEI P. Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(8): 1239 – 1245.
- [15] ARCAK M, KOKOTOVIC P. Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis[J]. *Automatica*, 2001, 37(12): 1923 – 1930.
- [16] LIU Y G, ZHANG J F. Reduced-order observer-based control design for stochastic nonlinear systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 52(2): 123 – 135.
- [17] LUDERS G, NARENDRA K S. An adaptive observer and identifier for linear system[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1973, 18(5): 496 – 499.
- [18] LUDERS G, NARENDRA K S. An new canonical form for an adaptive observer[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1974, 19(2): 117 – 119.
- [19] CARROLL R L, LINDORFF D P. An adaptive observer for single-input single-output linear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1973, 18(5): 428 – 435.
- [20] KREISSELMEIER G. Adaptive observer with exponential rate of convergence[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1977, 22(7): 2 – 8.
- [21] 朱芳来. Lipschitz 非线性系统自适应观测器设计[J]. 上海交通大学学报, 2003, 37(6): 943 – 946.  
(ZHU Fanglai. Design of an adaptive observer for Lipschitz nonlinear systems[J]. *J of Shanghai Jiao Tong University*, 2003, 37(6): 943 – 946.)

## 附录 引理(Appendix A lemma)

如下引理指出了任一正定对称矩阵与其主子式的最大、最小特征根之间的关系.

**引理 1** 对任意对称、正定的  $n \times n$  矩阵  $N$ , 作如下分解:  $N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2^\top & N_3 \end{bmatrix}$ , 其中,  $N_1$  和  $N_3$  分别为  $n_1 \times n_1$  和  $n_2 \times n_2$  的对称、正定矩阵 ( $n_1 + n_2 = n$ );  $N_2$  为  $n_1 \times n_2$  矩阵. 则  $N_3$  与  $N$  的最大最小特征值满足不等式:

$$\lambda_{\max}(N_3) \leq \lambda_{\max}(N), \lambda_{\min}(N_3) \geq \lambda_{\min}(N).$$

**证** 令  $T$  为如下可逆三角矩阵:

$$T = \begin{bmatrix} I_{n_1} & -N_2 N_3^{-1} \\ 0_{n_2 \times n_1} & I_{n_2} \end{bmatrix},$$

则  $TN$  和  $(TN)^{-1} = N^{-1}T^{-1}$  分别为:

$$TN = \begin{bmatrix} N_1 - N_2 N_3^{-1} N_2^\top & 0_{n_1 \times n_2} \\ N_2^\top & N_3 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$(TN)^{-1} = \begin{bmatrix} (N_1 - N_2 N_3^{-1} N_2^\top)^{-1} & 0_{n_1 \times n_2} \\ -N_3^{-1} N_2^\top (N_1 - N_2 N_3^{-1} N_2^\top)^{-1} & N_3^{-1} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

注意到  $\lambda_{\max}(T) = \lambda_{\max}(T^{-1}) = 1$ . 由此及式(24)可得:

$$\lambda_{\max}(N_3) \leq \max \left\{ \lambda_{\max}(N_1 - N_2 N_3^{-1} N_2^\top), \lambda_{\max}(N_3) \right\} = \lambda_{\max}(TN) \leq \lambda_{\max}(T) \lambda_{\max}(N) = \lambda_{\max}(N).$$

类似地, 由式(25)可得  $\lambda_{\min}(N_3^{-1}) \leq \lambda_{\min}(N^{-1})$ . 这等价于  $\frac{1}{\lambda_{\min}(N_3)} \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(N)}$ , 即  $\lambda_{\min}(N_3) \geq \lambda_{\min}(N)$ .

**作者简介:**

丁玉琴 (1982—), 女, 硕士研究生, 主要从事非线性观测器设计、基于观测器的故障诊断等研究, E-mail: dyqsdu@126.com;

刘允刚 (1970—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事非线性系统控制、自适应控制、随机系统优化与控制、观测器等研究.