文章编号: 1000−8152(2008)01−0139−02

一类多时间尺度机电耦合系统降阶及稳定一致性

刘永强, 徐　鹏

(华南理工大学 电力学院, 广东 广州 510640)

摘要: 针对一类机电耦合系统, 讨论了非线性多时间尺度系统与其相应的简化降阶系统稳定性一致问题, 给出了稳定一致性的条件; 讨论了多时间尺度系统(原始系统)和降阶系统的稳定域边界问题, 分析了非线性多时间尺度系统稳定域边界对摄动参数ε的连续依赖性, 给出了稳定边界对ε连续依赖的条件. 研究表明不论对系统的平衡点稳定性还是稳定域来说, 在可接受的条件下略去快动态是合理的.

关键词: 机电耦合系统; 多时间尺度; 降阶; 稳定性; 稳定域

中图分类号: TP273　　　**文献标识码:** A

Model reduction and stability consistency of a class of multi-time scale electromechenical coupling system

LIU Yong-qiang, XU Peng

(Electric Power College, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: For a class of electromechanical coupling system, this paper discusses the stability consistency between the nonlinear multi-time scale model and the relevant reduced order model, and gives the conditions of stability consistence. The continuous dependence of the stability boundary on the perturbation parameter ε for a multi-time scale system is revealed. The necessary condition for this dependence is given. It is concluded that the negligence of the fast dynamics is rational in the analysis of equilibrium stability and stability region

Key words: electromechanical coupling system; multi-time scale system; order reduction; stability; stability region

1　引言(Introduction)

多时间尺度系统的分析已取得了许多重要成果[1,2], 但原模型与其降阶模型稳定一致性的研究还有许多不足, 特别是稳定域一致性研究尚未开展. 考虑多时间尺度模型:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y), & x, f \in \mathbb{R}^n, \\ \varepsilon\dot{y} = E(x) + G(x)y, & y, E \in \mathbb{R}^m,\ G \in \mathbb{R}^{m\times m}. \end{cases} \tag{1}$$

其中x, y分别表示系统慢变量和快变量. 在不计磁饱和的各种电机模型中, 电路模型总是线性的, 故式(1)中第2组方程必为线性方程. 若不计快动态, 则系统被简化为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y), \\ 0 = E(x) + G(x)y. \end{cases} \tag{2}$$

用简化系统模型(2)代替原系统模型(1), 必须解决下述问题:

1) 在什么条件下, 系统(1)(2)在对应平衡点上具有相同的稳定性质(稳定、渐近稳定、不稳定);

2) 在什么条件下, 系统(1)在稳定平衡点上的稳定域边界连续依赖摄动小参数ε, 且在$\varepsilon \to 0$时系统(1)在向量x张成的空间中的稳定域边界与系统(2)在对应稳定平衡点稳定域的边界重合.

本文研究了简化降阶系统与原系统平衡点稳定性一致问题, 给出了稳定一致性的条件; 分析了非线性多时间尺度系统稳定域边界对摄动参数ε的连续依赖性. 研究表明在一定的条件下略去快动态是合理的与可行的.

2　不变慢流形(Invariant slow manifold)

由文献[1,2], 若系统(1)满足

A1)　对于$\forall x \in D$, $E(x)$为非零向量, 其中$D \subset \mathbb{R}^n$是开连通集;

A2)　矩阵$G(x)$的特征值$\lambda_i = \lambda_i(x)$, $i = 1,\cdots,m$, 满足下面的不等式(β是正实常数):

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i \leqslant -2\beta < 0,\ \ \forall t \in R,\ \ \forall x \in D \subset \mathbb{R}^n.$$

收稿日期: 2007−07−20; 收修改稿日期: 2007−10−15.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60474048, 60534040).

A3) 对于$\forall t \in R, \forall x \in D, \| y + G^{-1}E \| \leqslant \rho_y$, 函数$f, E, G$和$G^{-1}(x)E(x)$是二次连续可微的($\in C^2$). 其中$\varepsilon_0$和$\rho_y$都是正实常数.

则对于$\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, 存在$\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$, 系统(1)存在精确慢流形$M_\varepsilon : y = h(x, \varepsilon), h(x, 0) = -G^{-1}E$. 系统(1)在$M_\varepsilon$上的轨线由降阶系统

$$\dot{x} = f(x, h(x, \varepsilon)) = F(x, \varepsilon) \tag{3}$$

决定. 令$\varepsilon = 0$, 则式(3)被简化成下述形式:

$$\dot{x} = F(x, 0). \tag{4}$$

在条件A1)~A3)下, 对充分小的ε, 有: i) 系统(1)~(4)具有相同的平衡点, 且平衡点的数目也相同; ii) 系统(1)~(4)在其相应的平衡点上具有相同的稳定性质.

3 解对ϵ的连续依赖性(Continuous dependence of the solutions on ε)

由文献[3], 若系统(3)(4)满足

B1) 方程(4)的轨线具有初始状态$x(0) = \eta(\varepsilon)$, 即初始值依赖摄动参数ε;

B2) $D \subset \mathbb{R}^n$是开连通集, $(x, \varepsilon) \in D \times [0, \varepsilon_0]$, 函数$F$和$\eta$具有$N+1$阶连续导数;

B3) 对所有的$t \in [0, \tilde{t}]$, 简化系统(4)在$[0, \tilde{t}]$上具有唯一解$x_0(t)$, 且$x_0(t) \in D$.

则, 存在$\varepsilon^* > 0, \forall \varepsilon < \varepsilon^*$, 系统(3)在$[0, \tilde{t}]$上存在唯一解$x(t, \varepsilon)$(初始状态$\eta(\varepsilon)$), 满足

$$x(t, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t) \varepsilon^k = \mathrm{O}(\varepsilon^N). \tag{5}$$

注意到式(5)及文献[1]的结论可知, 若$\hat{x}(t, \varepsilon)$是式(1)的解, 则存在常数T, 使得$t > T$时有

$$\hat{x}(t, \varepsilon) - x_0(t) \leqslant \mathrm{O}(\varepsilon),$$

也就是说, 若ε充分小, 则原系统的轨线在$t > T$时充分靠近其简化降阶系统.

4 慢流形上的稳定域边界(Stability region boundary in the slow manifold)

设$A(x_s)$是系统$\varSigma : \dot{x} = f(x)$在渐近稳定平衡点$x_s$的稳定域. $\varphi_t(x)$是$\varSigma$的解. 称落在系统$\varSigma$稳定域A边界∂A 的平衡点或周期轨线为系统$\varSigma$的临界元(critical elements)[4]. 设$\sigma_i (i = 1, 2, \cdots)$为$\partial A$ 的临界元, 由文献[4]知, 若系统$\varSigma$满足:

C1) ∂A的临界元是双曲的且数量有限;

C2) ∂A临界元稳定和不稳定流形满足横截性条件;

C3) 当$t \to \infty$时, ∂A上的每条轨线都趋近其中一个临界元.

则

$$\partial A(x_s) = \bigcup_{\sigma_i \in \partial A} W^s(\sigma_i). \tag{6}$$

实际上, C1)和C2)都是通有的, C3)不是通有的, 但对如电力系统等大量的实际非线性机电耦合系统来说C3)是满足的[13].

定理 1 在假设A1)~A3)下, 非线性奇异摄动系统(1)可以被降阶为式(3), 且式(4)为式(3)的简化模型. 令x_s为式(3)和式(4)的一个渐近稳定平衡点, $A_\varepsilon(x_s), A_0(x_s)$分别表示式(3)和式(4)的稳定域, 即分别为原模型(1)在x张成空间的稳定域和其简化模型(2)的稳定域. 设$\hat{x}$为系统(3)(4)的双曲临界元, $\varphi^\varepsilon_{-t}(\hat{x}) \in \partial A_\varepsilon(x_s)$, $\varphi^0_{-t}(\hat{x}) \in \partial A_0(x_s)$表示式(3)和式(4)稳定域边界上的轨线, $t \in [0, \infty)$. 系统(3)和(4)满足假设B1)~B3), C1)~C3), 则

$$\varphi^\varepsilon_{-t}(\hat{x}) = \varphi^0_{-t}(\hat{x}) + \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_{-t,k}(\hat{x}) \varepsilon^k + \mathrm{O}(\varepsilon^N). \tag{7}$$

令
$$x_1 = \varphi^\varepsilon_{-t_1}(\hat{x}) \in \partial A_\varepsilon(x_s),$$
$$x_2 = \varphi^0_{-t_1}(\hat{x}) \in \partial A_\varepsilon(x_s),$$

则系统(3)(4)稳定域边界对应点x_1, x_2满足

$$\| x_1 - x_2 \| = \mathrm{O}(\varepsilon). \tag{8}$$

证 由前面的结论可直接证明定理1.

5 结论(Conclusions)

本文分析了一类多时间尺度机电耦合系统在平衡点稳定性和稳定域分析时系统降阶及简化的条件. 给出了多时间尺度系统稳定域边界与其相应的简化降阶系统稳定域边界靠近, 且稳定域边界连续依赖摄动参数ε的条件. 本文所得到的结论为多时间尺度系统的降阶及稳定分析奠定了数学基础.

参考文献(References):

[1] GHORBEL F, SPONG M W. Integral manifolds of singularly perturbed systems with application to Rrigid-link flexible-joint multibody systems[J]. *Int J of Non-linear Mechanics*, 2000, 35: 133 – 155.

[2] SOBLEV V A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1984, 5: 169 – 179.

[3] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*[M]. New York: Macmillan Publishing Company, 1991.

[4] CHIANG Hsiao-Dong, FELIX M W, WU F. Stability region of nonlinear autonomous dynamical systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1988, 33(1): 16 – 26.