文章编号: 1000−8152(2008)04−0693−06

# 一类切换线性奇异系统的$H_\infty$控制

付主木[1,2], 费树岷[2]

(1. 河南科技大学 电子信息工程学院, 河南 洛阳 210096; 2. 东南大学 自动化学院, 江苏 南京 210096)

**摘要**: 研究一类由任意有限多个奇异子系统组成的切换奇异系统的状态反馈和动态输出反馈$H_\infty$控制问题. 利用共同Lyapunov函数方法和凸组合技术, 给出由矩阵不等式表示的控制器存在的充分条件, 并设计了相应的子控制器和切换策略. 分别采用矩阵变换和消元法, 将矩阵不等式分别转化为一组线性矩阵不等式(LMIs). 数值算例说明了所提方法的有效性和可行性.

**关键词**: 切换系统; 奇异系统; $H_\infty$控制; 状态反馈; 动态输出反馈; 线性矩阵不等式

**中图分类号**: TP273　　**文献标识码**: A

# H-infinity control for a class of switched linear singular systems

FU Zhu-mu[1,2], FEI Shu-min[2]

(1. Electronic and Information Engineering College, Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan 471003, China;
2. School of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China)

**Abstract:** The H-infinity control problem of state feedback and dynamic output feedback for a class of switched linear singular systems is addressed in this paper. Based on common Lyapunov function approaches and convex combinations techniques, a sufficient condition for the existence of sub-controllers is presented, which is in the form of matrix inequalities. Both sub-controllers and switching strategies are designed correspondingly. Then, using the matrix transformation and the elimination of elements, the matrix inequalities are converted to linear matrix inequalities (LMIs). Finally, a numerical example is given to show the effectiveness and feasibility of the presented method.

**Key words:** switched systems; singular systems; H-infinity control; state feedback; dynamic output feedback; LMIs

## 1 引言(Introduction)

奇异系统的研究始于20世纪70年代, 是一类更一般化、有着较强应用背景的动力系统, 它广泛存在于许多实际系统模型中, 如电力电子系统、能源系统、航天工程、化学反应过程、经济系统、社会系统和生物系统等[1]. 随着$H_\infty$控制理论的日趋成熟和完善[2], 奇异系统的$H_\infty$控制理论也相应地得到了发展, 并取得了许多重要成果[3].

与奇异系统及其$H_\infty$控制理论的蓬勃发展情况相类似的是切换系统的研究. 切换系统本质上是一种复杂的时变非线性系统, 利用切换可以获得较好的系统性能. 例如, 两个不稳定的子系统可以通过适当的切换使系统渐近稳定. 由于切换系统在改善系统性能方面的作用, 切换系统在稳定性分析与综合、可控可达性条件以及$H_\infty$控制等方面取得了一系列研究成果[4~9].

但目前研究的切换系统, 其子系统都是正常的线性或非线性系统, 而关于切换奇异系统的研究尚不多见. 文献[7]给出了一类由任意有限个子系统组成的切换线性奇异系统容许控制器的设计方法; 最近文献[8,9]利用共同Lyapunov 函数方法, 分别研究了一类离散和连续切换线性奇异系统在任意切换律下的稳定性. 在此, 本文研究一类切换线性奇异系统的状态反馈和动态输出反馈$H_\infty$控制问题, 给出闭环系统渐近稳定且满足$H_\infty$性能的控制器存在的一个充分条件, 设计状态反馈和动态输出反馈控制器以及相应的切换策略. 最后, 数值算例为所提方法进行了有效验证.

## 2 问题描述(Problem formulation)

将子系统均为奇异系统的切换系统称为切换奇异系统, 切换线性奇异系统可表示为

$$\begin{cases} E\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + B_{1\sigma(t)}\omega + B_{2\sigma(t)}u, \\ z = C_{1\sigma(t)}x + D_{\sigma(t)}u, \\ y = C_{2\sigma(t)}x. \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期: 2006−09−11; 收修改稿日期: 2007−04−20.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60574006), 河南省教育厅自然科学基金资助项目(2008B510003), 河南科技大学博士科研启动基金资助项目(09001237).

其中: $x \in \mathbb{R}^{n_x}$为系统的状态, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$为控制输入, $\omega \in \mathbb{R}^{n_\omega}$且$\omega \in \mathrm{L}_2[0,\infty)$为外部扰动, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$为受控输出, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$是量测输出; $\sigma: [0,\infty) \to \bar{\mathbb{N}} = \{1,2,\cdots,N\}$为分段常值切换信号, $\sigma(t) = i$表示第$i$个子系统被激活. $E \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$且$\operatorname{rank} E = r_p < n_x$ ;$A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_{1i}, C_{2i}, D_i, \forall i \in \bar{\mathbb{N}}$为系统相应维数定常矩阵.

**注 1** 由文献[7,8]中的定义, 假定本文所讨论的切换奇异系统(1)均是正则、无脉冲的.

**定义 1** 如果$\sigma(t_k^-) \neq \sigma(t_k^+)$且$\sigma(t) = \sigma(t_k^+) = i_k, t \in [t_k, t_{k+1})$, 则称序列$\{(t_k, i_k)\}, k \in \{0,1,\cdots\}$是由切换信号$\sigma(t)$生成的切换序列. 时间区间$[t_k, t_{k+1})$被称为第$i_k$个子系统的驻留时间.

**定义 2** 对于给定的正实数$\gamma$, 分别设计线性状态反馈控制器

$$u(t) = K_i x(t),\ i \in \bar{\mathbb{N}} \tag{2}$$

和动态输出反馈控制器$u = \bar{K}_{\sigma(t)}(s)y$, 其状态空间实现有如下形式:

$$\begin{cases} E_K \dot{\tilde{x}}(t) = A_{K_i}\tilde{x}(t) + B_{K_i}y(t), \\ u(t) = C_{K_i}\tilde{x}(t) + D_{K_i}y(t),\ i \in \bar{\mathbb{N}}. \end{cases} \tag{3}$$

以及对应的切换策略$\sigma: [0,\infty) \to \bar{\mathbb{N}}$. 使得系统(1)相应的闭环系统满足如下$\mathrm{H}_\infty$性能指标:

1) 当外部干扰$\omega = 0$时, 闭环系统是渐近稳定的;

2) 当初态$x(0) = 0$时, 对于$\forall T > 0$成立:

$$\int_0^T z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t < \gamma^2 \int_0^T \omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\mathrm{d}t,$$
$$\forall \omega(t) \in \mathrm{L}_2[0,T].$$

其中: $\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\tilde{x}}}$是控制器状态; $\operatorname{rank} E_K = r_k < n_{\tilde{x}}$, $K_i$和$A_{K_i}, B_{K_i}, C_{K_i}, D_{K_i}$ 分别是待确定的状态反馈控制器和动态输出反馈控制器的参数矩阵.

## 3 主要结果(Main results)

本节将分别设计切换奇异系统的状态反馈和动态输出反馈控制器以及对应的切换策略, 使得相应的闭环系统满足定义2中的$\mathrm{H}_\infty$性能指标1)和2).

### 3.1 状态反馈$\mathrm{H}_\infty$控制(State feedback $\mathrm{H}_\infty$ control)

系统(1)在设计的状态反馈控制器(2)作用下相应的闭环系统为

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A_{c\sigma(t)}x(t) + B_{1\sigma(t)}\omega(t), \\ z(t) = C_{c\sigma(t)}x(t). \end{cases} \tag{4}$$

其中:

$$A_{ci} = A_i + B_{2i}K_i,\ C_{ci} = C_i + D_iK_i,\ i \in \bar{\mathbb{N}}.$$

**引理 1**[10] 对任意同维向量或矩阵$X$和$Y$,有

$$X^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}X \leqslant X^{\mathrm{T}}PX + Y^{\mathrm{T}}P^{-1}Y,\ \forall P > 0$$

成立.

对如式(1)所描述的切换奇异系统的状态反馈$\mathrm{H}_\infty$控制问题, 有如下结果:

**定理 1** 若存在非奇异阵$P$, 正实数$\gamma$和实数$\alpha_i \geqslant 0,\ \forall i \in \bar{\mathbb{N}}(\sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_i = 1)$, 满足下列矩阵不等式:

$$E^{\mathrm{T}}P = P^{\mathrm{T}}E \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} A_c^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A_c & P^{\mathrm{T}}B_1 & C_c^{\mathrm{T}} \\ B_1^{\mathrm{T}}P & -\gamma^2 I & 0 \\ C_c & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{6}$$

其中:

$$A_c = A + B_2K,\ C_c = C + DK,$$
$$A = \sum_{i=1}^{N}\alpha_iA_i,\ B_1 = \left[\sqrt{\alpha_1}B_{11},\cdots,\sqrt{\alpha_N}B_{1N}\right],$$
$$B_2 = \left[\alpha_1B_{21},\cdots,\alpha_NB_{2N}\right],$$
$$C = \left[\sqrt{\alpha_1}C_1^{\mathrm{T}},\cdots,\sqrt{\alpha_N}C_N^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}},$$
$$K = \left[K_1^{\mathrm{T}},\cdots,K_N^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}},$$
$$D = \operatorname{diag}\left\{\sqrt{\alpha_1}D_1,\cdots,\sqrt{\alpha_N}D_N\right\}.$$

则存在子控制器$K_i$(下面定理2具体给出其形式)和切换策略使系统(4)满足性能1)和2). 相应的子控制器和切换策略可选为

$$u(t) = K_ix(t), \tag{7}$$

$$\sigma(t) = \arg\min_{i\in\bar{\mathbb{N}}}\{x^{\mathrm{T}}(A_{ci}^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A_{ci} + \gamma^{-2}P^{\mathrm{T}}B_{1i}B_{1i}^{\mathrm{T}}P + C_{ci}^{\mathrm{T}}C_{ci})x\}. \tag{8}$$

**注 2** 1) 定理1中的条件表明, 通过控制器$K_i$和切换策略$\sigma(t)$, 可使闭环系统满足$\mathrm{H}_\infty$性能指标, 而并不要求每个子系统在整个状态空间上都满足$\mathrm{H}_\infty$性能指标, 甚至不要求各子系统渐近稳定;

2) 系统(1)从控制输入到受控输出的增益矩阵并不受是否列满秩的约束;

3) 所获条件只是充分条件, 而非必要的.

**证** 1) 假设外部干扰$\omega(t) = 0, P, \alpha_i$和$\gamma$满足定理1条件. 由Schur补引理, 式(6)可化为

$$A_c^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A_c + \gamma^{-2}P^{\mathrm{T}}B_1B_1^{\mathrm{T}}P + C_c^{\mathrm{T}}C_c < 0.$$

由各矩阵的定义, 对$\forall x \in \mathbb{R}^{n_x}\backslash\{0\}$, 有

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(x^{\mathrm{T}}(A_{ci}^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A_{ci} + \gamma^{-2}P^{\mathrm{T}}B_{1i}B_{1i}^{\mathrm{T}}P + C_{ci}^{\mathrm{T}}C_{ci})x) < 0.$$

由切换策略(8), 对$\forall t \geqslant 0$, 有

$$x^{\mathrm{T}}(A_{c\sigma(t)}^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A_{c\sigma(t)} + \gamma^{-2}P^{\mathrm{T}}B_{1\sigma(t)}B_{1\sigma(t)}^{\mathrm{T}}P + C_{c\sigma(t)}^{\mathrm{T}}C_{c\sigma(t)})x < 0. \tag{9}$$

令$\{(t_k, i_k) | i_k \in \bar{\mathbb{N}}; k = 0,1,\cdots; 0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant$

$\cdots\}$是由切换策略(8)在时间间隔$[0,\infty)$上生成的切换序列. 在该切换序列作用下, 取Lyapunov函数为$V(x)=x^{\mathrm T}E^{\mathrm T}Px$, 沿着切换系统(4)轨迹的导数为

$$\begin{aligned}&\dot V(x)=\\&x^{\mathrm T}(A_{ci_k}^{\mathrm T}P+P^{\mathrm T}A_{ci_k})x+x^{\mathrm T}P^{\mathrm T}B_{1i_k}\omega+\\&\omega^{\mathrm T}B_{1i_k}^{\mathrm T}Px,\ t\in[t_k,t_{k+1}),\ k=0,1,\cdots.\end{aligned}\tag{10}$$

由引理1有

$$\begin{aligned}&\dot V(x)\leqslant\\&x^{\mathrm T}(A_{ci_k}^{\mathrm T}P+P^{\mathrm T}A_{ci_k}+\gamma^{-2}P^{\mathrm T}B_{1i_k}B_{1i_k}^{\mathrm T}P)x+\\&\gamma^2\omega^{\mathrm T}\omega,\ t\in[t_k,t_{k+1}),\ k=0,1,\cdots,s.\end{aligned}\tag{11}$$

则当$\omega=0$时, 在切换策略(8)的作用下, 根据式(5)和式(9), $V(x)\geqslant0,\dot V(x)<0$对所有$t\geqslant0$ 都成立. 从而, 当外部扰动输入$\omega=0$ 时, 闭环系统(4)在切换策略(8)的作用之下是渐近稳定的.

2) 假设$x(0)=0$, 对任意给定的$T>0$, 引入如下性能指标:

$$J_T=\int_0^T(z^{\mathrm T}(t)z(t)-\gamma^2\omega^{\mathrm T}(t)\omega(t))\mathrm dt.$$

令$\{(t_k,i_k)|i_k\in\bar{\mathbb N};\ k=0,1,\cdots,s;\ 0=t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_s=T\}$是由切换策略(8)在区间$[0,T]$ 上生成的切换序列.在该切换序列作用下, 仍取Lyapunov函数为$V(x)=x^{\mathrm T}E^{\mathrm T}Px$, 注意到 $x(t_0)=x(0)=0$, 对$\forall\omega\in L_2[0,T]$, 利用式(11)和系统(4):

$$\begin{aligned}J_T=&\sum_{k=0}^{s-1}(\int_{t_k}^{t_{k+1}}(z^{\mathrm T}z-\gamma^2\omega^{\mathrm T}\omega+\dot V(x))\mathrm dt-\\&(V(x(t_{k+1}))-V(x(t_k))))\leqslant\\&\sum_{k=0}^{s-1}(\int_{t_k}^{t_{k+1}}x^{\mathrm T}(A_{ci_k}^{\mathrm T}P+P^{\mathrm T}A_{ci_k}+\\&\gamma^{-2}P^{\mathrm T}B_{1i_k}B_{1i_k}^{\mathrm T}P+C_{ci_k}^{\mathrm T}C_{ci_k})x\mathrm dt).\end{aligned}$$

由矩阵不等式(9)可从上式得到$J_T<0$. 故对于$\forall T>0$, $\forall\omega\in \mathrm L_2[0,T]$, 有$\int_0^T z^{\mathrm T}z\mathrm dt<\gamma^2\int_0^T\omega^{\mathrm T}\omega\mathrm dt$.

证毕.

显然在矩阵不等式(6)中, 关于矩阵$P$和参数矩阵$K$是非线性的, 难以直接求解, 定理2给出其LMI的求解方式:

**定理 2** 满足定理1条件(5)(6)的充要条件为: 存在矩阵$X$和$W$, 使下列线性矩阵不等式成立:

$$E^{\mathrm T}X^{-1}=(X^{-1})^{\mathrm T}E\geqslant0,\tag{12}$$

$$\begin{bmatrix}AX+B_2W+(AX+B_2W)^{\mathrm T}&*&*\\B_1^{\mathrm T}&-\gamma I&*\\(CX+DW)&0&-\gamma I\end{bmatrix}<0.\tag{13}$$

其中:

$$W=\left[W_1^{\mathrm T},W_2^{\mathrm T},\cdots,W_N^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T},$$

$$K_i=W_iX^{-1},\ P=\gamma X^{-1}.$$

“$*$”表示对称位置上的转置矩阵, 下文同. 则相应的控制器和切换控制策略仍为式(7)和(8).

当解$X,W$存在时, 所求状态反馈控制增益矩阵集可表示如下:

$$K=WX^{-1}.\tag{14}$$

**证** 将式(6)分别左乘和右乘 $\mathrm{diag}\{\gamma^{-1/2}I,\gamma^{-1/2}I,\gamma^{1/2}I\}$, 令$Y=\gamma^{-1}P$. 然后将所得式左乘$\mathrm{diag}\{X^{\mathrm T},I,I\}$, 右乘$\mathrm{diag}\{X,I,I\}$, 令$X=Y^{-1}$, $W=KX$, 整理即可得到式(13). 另外由变换关系$P=\gamma X^{-1}(\gamma>0)$, 式(5)~(12)显然成立.

证毕.

### 3.2 动态输出反馈$\mathbf{H}_\infty$控制(Dynamic output feedback $\mathrm H_\infty$ control)

若采用设计的动态输出反馈控制器(3), 系统(1)的闭环形式为

$$\begin{cases}\bar E_c\dot\xi=\bar A_{c\sigma(t)}\xi+\bar B_{c\sigma(t)}\omega,\\z=\bar C_{c\sigma(t)}\xi.\end{cases}\tag{15}$$

其中:

$$\bar A_{ci}=A_i^{\mathrm o}+B_{2i}^{\mathrm o}\bar K_iC_{2i}^{\mathrm o},\bar B_{ci}=B_{1i}^{\mathrm o},C_{1i}^{\mathrm o}=[C_{1i}\ \ 0],$$

$$\xi=[x^{\mathrm T}\ \ \tilde x^{\mathrm T}]^{\mathrm T},\ D_i^{\mathrm o}=[0\ \ D_i],\ \bar C_{ci}=C_{1i}^{\mathrm o}+D_i^{\mathrm o}\bar K_iC_{2i}^{\mathrm o},$$

$$\bar E_c=\begin{bmatrix}E&0\\0&E_K\end{bmatrix},A_i^{\mathrm o}=\begin{bmatrix}A_i&0\\0&0\end{bmatrix},B_{1i}^{\mathrm o}=\begin{bmatrix}B_{1i}\\0\end{bmatrix},$$

$$B_{2i}^{\mathrm o}=\begin{bmatrix}0&B_{2i}\\I&0\end{bmatrix},C_{2i}^{\mathrm o}=\begin{bmatrix}0&I\\C_{2i}&0\end{bmatrix},\bar K_i=\begin{bmatrix}A_{K_i}&B_{K_i}\\C_{K_i}&D_{K_i}\end{bmatrix}.$$

对系统(1)所描述的切换奇异系统的动态输出反馈$\mathrm H_\infty$控制问题, 有如下结果:

**定理 3** 若存在非奇异阵$X_c$、正实数$\gamma$, 以及实数$\alpha_i\geqslant0,\forall i\in\bar{\mathbb N}(\sum\limits_{i=1}^N\alpha_i=1)$, 满足下列矩阵不等式:

$$\bar E_c^{\mathrm T}X_c=X_c^{\mathrm T}\bar E_c\geqslant0,\tag{16}$$

$$\begin{bmatrix}X_c^{\mathrm T}\bar A_c+\bar A_c^{\mathrm T}X_c&*&*\\\bar B_c^{\mathrm T}X_c&-\gamma I&*\\\bar C_c&0&-\gamma I\end{bmatrix}<0.\tag{17}$$

其中:

$$\bar A_c=A^{\mathrm o}+B_2^{\mathrm o}\bar KC_2^{\mathrm o},$$

$$\bar B_c=B_1^{\mathrm o},\ \bar C_c=C_1^{\mathrm o}+D^{\mathrm o}\bar KC_2^{\mathrm o},$$

$$A^{\mathrm o}=\sum_{i=1}^N\alpha_iA_i^{\mathrm o},\ B_1^{\mathrm o}=\left[\sqrt{\alpha_1}B_{11}^{\mathrm o},\cdots,\sqrt{\alpha_N}B_{1N}^{\mathrm o}\right],$$

$$B_2^{\mathrm o}=\left[\alpha_1B_{21}^{\mathrm o},\cdots,\alpha_NB_{2N}^{\mathrm o}\right],$$

$$C_1^{\mathrm o}=\left[\sqrt{\alpha_1}(C_{11}^{\mathrm o})^{\mathrm T},\cdots,\sqrt{\alpha_N}(C_{1N}^{\mathrm o})^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T},$$

$$C_2^{\mathrm{o}}=\left[(C_{21}^{\mathrm{o}})^{\mathrm{T}},\cdots,(C_{2N}^{\mathrm{o}})^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}},$$
$$D^{\mathrm{o}}=\mathrm{diag}\left\{\sqrt{\alpha_1}D_1^{\mathrm{o}},\cdots,\sqrt{\alpha_N}D_N^{\mathrm{o}}\right\},$$
$$\bar{K}=\mathrm{diag}\left\{\bar{K}_1,\cdots,\bar{K}_N\right\}.$$

则存在子控制器和切换策略使系统(1)满足$\mathrm{H}_\infty$性能1)和2). 相应的子控制器和切换策略可取为

$$u=\bar{K}_i(s)y, \tag{18}$$
$$\sigma(t)=\arg\min_{i\in\bar{\mathbb{N}}}\{\xi^{\mathrm{T}}(\bar{A}_{ci}^{\mathrm{T}}X_c+X_c^{\mathrm{T}}\bar{A}_{ci}+\gamma^{-2}X_c^{\mathrm{T}}\bar{B}_{ci}\bar{B}_{ci}^{\mathrm{T}}X_c+\bar{C}_{ci}^{\mathrm{T}}\bar{C}_{ci})\xi\}. \tag{19}$$

证明过程类似定理1, 限于篇幅, 在此省略.

然而在矩阵不等式(17)中, 关于矩阵变量$X_c$和控制器参数矩阵$A_{K_i},B_{K_i},C_{K_i},D_{K_i}$是非线性的, 不能直接求解. 下面采用消元法将问题的求解变为LMIs的形式, 以方便求解. 为论述方便, 不失一般性, 假设

$$E=\begin{bmatrix}I_{r_p}&0\\0&0\end{bmatrix},\ E_K=\begin{bmatrix}I_{r_k}&0\\0&0\end{bmatrix}. \tag{20}$$

**注 3** 对于一般形式的$E$, 可以通过非奇异变换化为式(20)形式.

显然, 若定义$H_{X_c},T_{X_c}$如下:

$$\begin{cases}H_{X_c}=\begin{bmatrix}X_c^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{o}}+(A^{\mathrm{o}})^{\mathrm{T}}X_c&*&*\\(B_1^{\mathrm{o}})^{\mathrm{T}}X_c&-\gamma I&*\\C_1^{\mathrm{o}}&0&-\gamma I\end{bmatrix},\\T_{X_c}=\begin{bmatrix}A^{\mathrm{o}}X_c^{-1}+X_c^{-\mathrm{T}}(A^{\mathrm{o}})^{\mathrm{T}}&*&*\\(B_1^{\mathrm{o}})^{\mathrm{T}}&-\gamma I&*\\C_1^{\mathrm{o}}X_c^{-1}&0&-\gamma I\end{bmatrix},\end{cases} \tag{21}$$

则矩阵不等式(17)可表示为

$$H_{X_c}+P_{X_c}^{\mathrm{T}}\bar{K}Q+Q^{\mathrm{T}}\bar{K}^{\mathrm{T}}P_{X_c}<0. \tag{22}$$

式中:

$$P_{X_c}=\left[(B_2^{\mathrm{o}})^{\mathrm{T}}X_c\ \ 0\ \ (D^{\mathrm{o}})^{\mathrm{T}}\right],\ Q=\left[C_2^{\mathrm{o}}\ \ 0\ \ 0\right].$$

为得到需要的LMIs形式, 需要如下引理:

**引理 2**[11] 设$P,Q$和$H$是给定的适当维数矩阵, 且$H$是对称的, $P^{\perp}$和$Q^{\perp}$分别表示$P$和$Q$的核空间, 即$PP^{\perp}=0,QQ^{\perp}=0$则存在矩阵$X$, 使得

$$H+P^{\mathrm{T}}XQ+Q^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}P<0,$$

当且仅当

$$P^{\perp\mathrm{T}}HP^{\perp}<0,\ Q^{\perp\mathrm{T}}HQ^{\perp}<0.$$

**引理 3** 假定$X_c$非奇异, 矩阵$P=[(B_2^{\mathrm{o}})^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ (D^{\mathrm{o}})^{\mathrm{T}}]$, $H_{X_c},T_{X_c}$如式(21), 则

$$(P_{X_c}^{\perp})^{\mathrm{T}}H_{X_c}P_{X_c}^{\perp}<0\Longleftrightarrow P^{\perp\mathrm{T}}T_{X_c}P^{\perp}<0.$$

**证** 注意到$P_{X_c}=PS,S=\mathrm{diag}\{X_c,I,I\}$, 并结合$P_{X_c}$和$P^{\perp}$的定义得$P_{X_c}^{\perp}=S^{-1}P^{\perp}$. 又由$S^{-\mathrm{T}}H_{X_c}S^{-1}=T_{X_c}$, 得

$$(P_{X_c}^{\perp})^{\mathrm{T}}H_{X_c}P_{X_c}^{\perp}<0\Longleftrightarrow$$
$$P^{\perp\mathrm{T}}S^{-\mathrm{T}}H_{X_c}S^{-1}P^{\perp}<0\Longleftrightarrow P^{\perp\mathrm{T}}T_{X_c}P^{\perp}<0,$$

即引理结论成立.

**引理 4** 对系统(1), 若采用动态输出反馈$\mathrm{H}_\infty$控制器(3)的形式, 则条件(16)(17)成立的充要条件为存在非奇异阵$X_c$, 使得下列不等式成立:

$$\begin{cases}\bar{E}_c^{\mathrm{T}}X_c=X_c^{\mathrm{T}}\bar{E}_c\geqslant 0,\\Q^{\perp\mathrm{T}}H_{X_c}Q^{\perp}<0,P^{\perp\mathrm{T}}T_{X_c}P^{\perp}<0.\end{cases} \tag{23}$$

**证** 由引理2,3可直接得到式(23).

为简化条件(23), 由$\bar{E}_c^{\mathrm{T}}X_c=X_c^{\mathrm{T}}\bar{E}_c\geqslant 0$, 可将矩阵$X_c$和$X_c^{-1}$写成如下形式:

$$\begin{cases}X_c=\left[\begin{array}{cc|cc}X_1&0&N_1&0\\X_3&X_4&N_3&N_4\\\hline N_1^{\mathrm{T}}&0&L_1&0\\N_7&N_8&L_3&L_4,\end{array}\right],\ X_c^{-1}=\left[\begin{array}{cc|cc}Y_1&0&M_1&0\\Y_3&Y_4&M_3&M_4\\\hline M_1^{\mathrm{T}}&0&S_1&0\\M_7&M_8&S_3&S_4,\end{array}\right],\\X_1=X_1^{\mathrm{T}},\ L_1=L_1^{\mathrm{T}},\ Y_1=Y_1^{\mathrm{T}},\ S_1=S_1^{\mathrm{T}}.\end{cases} \tag{24}$$

其中: $X_1,Y_1\in\mathbb{R}^{r_p\times r_p}$; $X_4,Y_4\in\mathbb{R}^{(n_x-r_p)\times(n_x-r_p)}$, $L_1,S_1\in\mathbb{R}^{r_k\times r_k}$; $X_4,Y_4\in\mathbb{R}^{(n_{\tilde{x}}-r_k)\times(n_{\tilde{x}}-r_k)}$, 其他子矩阵具有相应维数. 根据上述$X_c$和$X_c^{-1}$的形式, 有如下引理:

**引理 5** 假定存在如式(24)的$X_c$和$X_c^{-1}$使得式(23)成立, 对系统矩阵进行如下分解:

$$A_i=\begin{bmatrix}A_{i11}&A_{i12}\\A_{i21}&A_{i22}\end{bmatrix},\ B_{1i}=\begin{bmatrix}B_{i11}\\B_{i12}\end{bmatrix},$$
$$C_{1i}=\begin{bmatrix}C_{i11}&C_{i12}\end{bmatrix},\ A_{i11}\in\mathbb{R}^{r_p\times r_p},$$
$$B_{i11}\in\mathbb{R}^{r_p\times n_\omega},\ C_{i11}\in\mathbb{R}^{n_z\times r_p},$$

则$Q^{\perp\mathrm{T}}H_{X_c}Q^{\perp}<0,\ P^{\perp\mathrm{T}}T_{X_c}P^{\perp}<0$可等价于下列矩阵不等式:

$$\left[\begin{array}{c|c}\bar{A}_{21}&C_2\\\bar{A}_{22}&\\\hline\bar{B}_{12}&0\\0&0\end{array}\right]^{\perp\mathrm{T}}\underbrace{\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}X_0+X_0^{\mathrm{T}}A&*&*\\B_1^{\mathrm{T}}X_0&-\gamma I&*\\C_1&0&-\gamma I\end{bmatrix}}_{H_0}\left[\begin{array}{c|c}\bar{A}_{21}&C_2\\\bar{A}_{22}&\\\hline\bar{B}_{12}&0\\0&0\end{array}\right]^{\perp}<0, \tag{25}$$

$$X_0=\begin{bmatrix}X_1&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{c|c}\bar{A}_{12}^{\mathrm{T}}&B_2^{\mathrm{T}}\\\bar{A}_{22}^{\mathrm{T}}&\\\hline\bar{C}_{12}^{\mathrm{T}}&D^{\mathrm{T}}\\0&0\end{array}\right]\underbrace{\begin{bmatrix}AY_0+Y_0^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}&*&*\\C_1Y_0&-\gamma I&*\\B_1^{\mathrm{T}}&0&-\gamma I\end{bmatrix}}_{T_0}\left[\begin{array}{c|c}\bar{A}_{12}^{\mathrm{T}}&B_2^{\mathrm{T}}\\\bar{A}_{22}^{\mathrm{T}}&\\\hline\bar{C}_{12}^{\mathrm{T}}&D^{\mathrm{T}}\\0&0\end{array}\right]^{\perp}<0, \tag{26}$$

$$Y_0=\begin{bmatrix}Y_1&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

其中:

$$\bar{A}_{12}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_iA_{i12},\ \bar{A}_{21}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_iA_{i21},$$
$$\bar{A}_{22}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_iA_{i22},$$
$$\bar{B}_{12}=\left[\sqrt{\alpha_1}B_{112},\cdots,\sqrt{\alpha_N}B_{N12}\right],$$
$$C_1=\left[\sqrt{\alpha_1}C_{11}^{\mathrm{T}},\cdots,\sqrt{\alpha_N}\,C_{1N}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}},$$
$$C_2=\left[C_{21}^{\mathrm{T}},\cdots,C_{2N}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}},$$
$$\bar{C}_{12}=\left[\sqrt{\alpha_1}C_{112}^{\mathrm{T}},\cdots,\sqrt{\alpha_N}\,C_{N12}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}.$$

**证**　引入如下简写矩阵:

$$X_l=\left[X_3,X_4\right],\ Y_l=\left[Y_3,Y_4\right],$$
$$X_c=\begin{bmatrix}X & N_u\\ N_l & L\end{bmatrix},\ X_c^{-1}=\begin{bmatrix}Y & M_u\\ M_l & S\end{bmatrix}.$$

根据各矩阵的定义, 可以得到

$$\begin{cases}H_{X_c}=\\ \begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}A & A^{\mathrm{T}}N_u & X^{\mathrm{T}}B_1 & C_1^{\mathrm{T}}\\ N_u^{\mathrm{T}}A & 0 & N_u^{\mathrm{T}}B_1 & 0\\ B_1^{\mathrm{T}}X & B_1^{\mathrm{T}}N_u & -\gamma I & 0\\ C_1 & 0 & 0 & -\gamma I\end{bmatrix},\\ T_{X_c}=\\ \begin{bmatrix}AY+Y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} & AM_u & B_1 & Y^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}}\\ M_u^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & M_u^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}}\\ B_1^{\mathrm{T}} & 0 & -\gamma I & 0\\ C_1Y & C_1M_u & 0 & -\gamma I\end{bmatrix}.\end{cases}\tag{27}$$

$Q^{\perp}$和$P^{\perp}$可以表示如下:

$$Q^{\perp}=\begin{bmatrix}C_2^{\perp} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & I\\ 0 & I\end{bmatrix},\ P^{\perp}=\begin{bmatrix}B_2^{\mathrm{T}\perp} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & I\\ D^{\mathrm{T}\perp} & 0\end{bmatrix}.$$

由于$Q^{\perp}$和$P^{\perp}$中有全零行, 则不等式(23)等价于

$$\begin{bmatrix}C_2^{\perp} & 0\\ 0 & I\\ 0 & I\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\underbrace{\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}A & * & *\\ B_1^{\mathrm{T}}X & -\gamma I & *\\ C_1 & 0 & -\gamma I\end{bmatrix}}_{H'}\begin{bmatrix}C_2^{\perp} & 0\\ 0 & I\\ 0 & I\end{bmatrix}<0,\tag{28}$$

$$\begin{bmatrix}B_2^{\mathrm{T}\perp} & 0\\ D^{\mathrm{T}\perp} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\underbrace{\begin{bmatrix}AY+Y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} & * & *\\ C_1Y & -\gamma I & *\\ B_1^{\mathrm{T}} & 0 & -\gamma I\end{bmatrix}}_{T'}\begin{bmatrix}B_2^{\mathrm{T}\perp} & 0\\ D^{\mathrm{T}\perp} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}<0.\tag{29}$$

令$P_H=\left[C_2\ 0\ 0\right]$,$P_T=\left[B_2^{\mathrm{T}}\ D^{\mathrm{T}}\ 0\right]$,则不等式(28)(29)可写为

$$P_H^{\perp\mathrm{T}}H'P_H^{\perp}<0,\ P_T^{\perp\mathrm{T}}T'P_T^{\perp}<0.\tag{30}$$

引入矩阵$Q_H=\left[I_{n_x}\ 0\ 0\right]$,$Q_T=\left[I_{n_x}\ 0\ 0\right]$, 则

$$Q_H^{\perp\mathrm{T}}H'Q_H^{\perp}<0,\ Q_T^{\perp\mathrm{T}}T'Q_T^{\perp}<0.\tag{31}$$

由引理(2), 存在适当维数矩阵$\beta,\delta$可将式(28)(29)化为

$$\begin{cases}H'+P_H^{\mathrm{T}}\beta Q_H+Q_H^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}P_H<0,\\ T'+P_T^{\mathrm{T}}\delta Q_T+Q_T^{\mathrm{T}}\delta^{\mathrm{T}}P_T<0.\end{cases}\tag{32}$$

将$H_0$从$H'$分离出来(对$T_0$类似):

$$H'=H_0+\left[\bar{A}_{21}\ \bar{A}_{22}\ \bar{B}_{12}\ 0\right]^{\mathrm{T}}X_l\left[I\ 0\ 0\right]+\left[I\ 0\ 0\right]^{\mathrm{T}}X_l^{\mathrm{T}}\left[\bar{A}_{21}\ \bar{A}_{22}\ \bar{B}_{12}\ 0\right].\tag{33}$$

由式(32)和(33), 有

$$H_0+\left[\begin{array}{cc|cc}\bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{B}_{12} & 0\\ \hline \multicolumn{2}{c|}{C_2} & 0 & 0\end{array}\right]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}X_l\\ \beta\end{bmatrix}\left[I\ \ 0\ \ 0\right]+\left[I\ \ 0\ \ 0\right]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}X_l\\ \beta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\left[\begin{array}{cc|cc}\bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{B}_{12} & 0\\ \hline \multicolumn{2}{c|}{C_2} & 0 & 0\end{array}\right]<0.$$

由引理(2)即可得证.

**引理 6**　$X_c$和$X_c^{-1}$的参数如式(24), 则$\bar{E}_c^{\mathrm{T}}X_c=X_c^{\mathrm{T}}\bar{E}_c\geqslant 0$成立, 当且仅当下式成立:

$$\begin{bmatrix}X_1 & I\\ I & Y_1\end{bmatrix}\geqslant 0,\ X_1>0,\ Y_1>0.\tag{34}$$

**证**　由$\bar{E}_c^{\mathrm{T}}X_c=X_c^{\mathrm{T}}\bar{E}_c$可得式(24). 根据$\mathrm{rank}(\bar{E}_c^{\mathrm{T}}X_c)=r_p+r_k$, 故$\bar{E}_c^{\mathrm{T}}X_c\geqslant 0\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}X_1 & N_1\\ N_1^{\mathrm{T}} & L_1\end{bmatrix}>0$, 由式(24)进一步可推出$\begin{bmatrix}X_1 & N_1\\ N_1^{\mathrm{T}} & L_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_1 & M_1\\ M_1^{\mathrm{T}} & S_1\end{bmatrix}=I$, 即$Y_1>0$, 由文献[11]即可得不等式(34).

**定理 4**　对系统(1), 若采用动态输出反馈$\mathrm{H}_\infty$控制器(3)(矩阵$E$和$E_K$如式(20)), 则其闭环系统(15)满足定义2中$\mathrm{H}_\infty$性能指标1)和2)的条件是: 对给定的正实数$\gamma$, 以及实数$\alpha_i\geqslant 0,\forall i\in\bar{\mathbb{N}}(\sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_i=1)$线性矩阵不等式(25)(26)(34)有解$X_1,Y_1$.

**证**　直接应用引理4,5,7即可得证.

对如式(24)的$X_c$进行如下变形:

$$\begin{cases}X_c\lambda_1=\lambda_2,\\ \lambda_1=\left[\begin{array}{cc|cc}Y_1 & 0 & I_{r_p} & 0\\ Y_3 & Y_4 & 0 & I_{(n_x-r_p)}\\ \hline M_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0\\ M_7 & M_8 & 0 & 0\end{array}\right],\\ \lambda_2=\left[\begin{array}{cc|cc}I_{r_p} & 0 & X_1 & 0\\ 0 & I_{(n_x-r_p)} & X_3 & X_4\\ \hline 0 & 0 & N_1^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & 0 & N_7 & N_8\end{array}\right].\end{cases}\tag{35}$$

由于$X_l, Y_l$不影响式(24)或(35)中矩阵$X_c$的存在性, 如果给定矩阵$X_j, Y_j, j \in \{1,3,4\}$, 总能选择$M_k, N_k, k \in \{1,7,8\}$, 使得$\lambda_1, \lambda_2$非奇异, 这样使式(24)成立的$X_c$也为非奇异阵.

求取动态输出反馈$\mathrm{H}_\infty$控制增益矩阵集$\bar{K}$的算法:

**Step 1** 求取满足定理4条件式(25)(26)(34)的矩阵$X_1, Y_1$;

**Step 2** 将Step 1解得的矩阵$X_1, Y_1$代入式(28)(29), 求解$X_l, Y_l$;

**Step 3** 选择使式(35)中$\lambda_1, \lambda_2$为非奇异阵的矩阵$M_k, N_k (k = \{1,7,8\})$, 计算矩阵$X_c = \lambda_2 \lambda_1^{-1}$;

**Step 4** 随机产生满足约束的$\alpha_i$, 将Step 3所得矩阵$X_c$代入到矩阵不等式(22)中, 可得到只包含控制增益矩阵变量集$\bar{K}$的线性矩阵不等式, 从而可以应用求解LMIs的工具求出$\bar{K}$.

## 4 数值算例(Example)

考虑由2个奇异子系统组成的切换系统(1), $i \in \{1,2\}$, 参数如下:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ B_{11} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.1 \\ -1 \end{bmatrix},\ B_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.7 \\ 0.1 \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = 0.2,\ D_2 = 0.1.$$

取$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $\mathrm{H}_\infty$指标$\gamma = 1$. 根据定理2, 由MATLAB中的LMI工具箱, 求得$X, W$的一个可行解为

$$X = \begin{bmatrix} -0.3612 & -0.3800 & 0.5889 \\ -0.2199 & -0.7623 & 2.1038 \\ 0.9488 & 1.0968 & -3.4226 \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} -4.3513 & 0.2390 & -0.9805 \\ -0.0647 & 4.2547 & 1.4094 \end{bmatrix}.$$

由式(14), 求得2个状态反馈子控制器增益矩阵为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 5.0003 & -10.0007 & -5.0004 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -19.9981 & -9.9986 & -9.9986 \end{bmatrix}.$$

## 5 结束语(Conclusion)

本文研究了一类切换线性奇异系统的状态反馈和动态输出反馈$\mathrm{H}_\infty$控制问题, 得到了一组由线性矩阵不等式表示的使相应闭环系统渐近稳定且满足$\mathrm{H}_\infty$性能指标的充分条件. 利用MATLAB中LMI工具箱, 给出了一个数值仿真实例. 所得结果是以二次型作为切换系统的Lyapunov函数, 该结果保守性较强; 另外, 本文所得结果只是针对一类特殊切换奇异系统(各子系统的奇异阵$E_i$均相同), 如何对更一般的切换奇异系统(各子系统的奇异阵$E_i$均不相同)进行分析将是后续工作的重点.

## 参考文献(References):


[1] DAI L Y. *Singular Control Systems:Lecture Notes in Control and Information Sciences* [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[2] 申铁龙. $\mathrm{H}_\infty$控制理论及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.
(SHEN Tielong. $\mathrm{H}_\infty$ *Control Theory and Application*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996.

[3] MASUBUCHI I, KAMITANE Y, OHARA A, et al. $\mathrm{H}_\infty$ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach[J]. *Automatica*, 1997, 33 (4): 669 – 673.

[4] 张红涛, 刘新芝. 关于一类脉冲切换系统的鲁棒$\mathrm{H}_\infty$控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(2): 261 – 266.
(ZHANG Hongtao, LIU Xinzhi. Robust H-infinity control on impulsive switched systems with disturbance[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(2): 261 – 266.)

[5] SUN Z D, GE S S. Analysis and synthesis of switched linear control systems[J]. *Automatica*, 2005, 41(2): 181 – 195.

[6] JI Z J, WANG L. Robust $\mathrm{H}_\infty$ control and quadratic stabilization of uncertain discrete-time switched linear systems[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Portland, United States: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2005: 24 – 29.

[7] MENG B, ZHANG J F. Admissible switched control of singular systems[C] // *Proceedings of the 23rd Chinese Control Conference*. Wuxi. Shanghai: East China University of Science and Technology Press, 2004: 1615 – 1619.

[8] XIE G M, WANG L. Stability and stabilization of switched descriptor systems under arbitrary switching[C] //*IEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. The Hague, Netherlands: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2004, 1: 779 – 783.

[9] 尹玉娟, 刘玉忠, 赵军. 一类切换线性广义系统的稳定性[J]. 控制与决策, 2006, 21(1): 24 – 27.
(YIN Yujuan, LIU Yuzhong, ZHAO Jun. Stability of a class of switched linear singular systems[J]. *Control and Decision*, 2006, 21(1): 24 – 27.)

[10] GAHINET P, APKARIAN P. An LMI-based parametrization of all $\mathrm{H}_\infty$ controllers with applications[C] // *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*. San Antonlo, Texas: IEEE Press, 1993: 656 – 661.

[11] GAHINET P, APKARIAN P. A linear matrix inequality approach to $\mathrm{H}_\infty$ control[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994, 4(4): 421 – 448.



作者简介:

**付主木** (1974—), 男, 博士, 从事切换系统的分析、设计与鲁棒$\mathrm{H}_\infty$控制等研究, E-mail: fzm1974@163.com;

**费树岷** (1961—), 男, 教授, 博士生导师, 从事混杂系统、非线性系统控制等研究, E-mail: smfei@seu.edu.cn.