文章编号: 1000−8152(2008)05−0815−04

串联弦系统的控制器和补偿器的设计及其Riesz基

刘东毅[1,2], 尚英锋[1,2], 许跟起[1]

(1. 天津大学 理学院 数学系, 天津 300072; 2. 天津大学 电气与自动化工程学院 自动化系, 天津 300072)

摘要: 针对一类串联弦系统, 在两端自由, 内部连接点处力连续而位移不连续的条件下, 论文先在内部连接点处构造补偿器对位移进行补偿, 然后在两端设计控制器对系统进行控制. 于是得到一个闭环控制系统. 利用半群理论证明了这一系统的适定性. 通过算子的谱分析, 推出了该系统的谱由重数有限的孤立本征值构成并且谱分布在左半复平面, 平行于虚轴的一个带域内. 因此该系统存在Riesz基, 满足谱确定增长条件并且是渐近稳定的.

关键词: 闭环控制系统; 弦系统; 反馈; 控制设备; 谱分析; Riesz基; 渐近稳定性

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Design of controllers and compensators for a serially connected string system and its Riesz basis

LIU Dong-yi[1,2], SHANG Ying-feng[1,2], XU Gen-qi [1]

(1. Department of Mathematics, Science School, Tianjin University, Tianjin 300072, China;
2. Department of Automation, Electrical Engineering & Automation School, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: Under free boundary conditions, for a serially connected string system with continuity of vertical force and discontinuity of displacement at the interior nodes, compensators are designed at the interior nodes to compensate the displacement, and controllers are placed on both endpoints to control the system. Thus, a closed loop control system is established. Its well-posedness is then shown via the semigroup theory. From spectrum analysis of operators, it is known that the spectrum of the system is composed of isolated eigenvalues with finite multiplicity, and its spectrum is located in a strip parallel to the imaginary axis in the left half complex plane. Hence, the existence of the Riesz basis is derived and the spectrum-determined growth condition is concluded. The asymptotic stability of the system is thus proved.

Key words: closed loop control systems; string system; feedback; control equipment; spectrum analysis; Riesz basis; asymptotic stability

1　引言(Introduction)

许多民用建筑(如桥梁)、大型空间结构(如空间站, 机器人臂)都是由众多的弹性部件组成. 这些结构在线性建模下, 可描述成一系列首尾相连的弦或梁系统. 由于这些结构会产生振动, 基于操作性和安全性等方面的考虑, 工程上采用各种连接方式, 设计各种稳定器或调节器来抑制系统的振动. 对于弦系统, 早在1987年G.Chen等人在文[1]中研究了两根弦的镇定问题. 同时该文还给出了n根弦串联系统的一般模型:

$$m_i\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}-T_i\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}=0,\ t>0,\qquad (1)$$
$$x\in(i-1,\,i),\ i=1,2,\cdots,n.$$

1989年, Liu等人在文[2]中, 对满足Dirichlet-Dirichlet (D-D)边界条件的系统(1), 在节点处位移连续的条件下, 采用耗散线性速度反馈, 利用乘子法得到闭环系统的指数稳定性. 其后多位学者研究各种弦系统及其应用[3~5]. 但直到最近才对弦系统(1), 分别在D-D和Dirichlet-Neumann (D-N)边界条件下, 证明了系统的Riesz基性质[6,7]. 由于Riesz基性质比谱确定增长条件有更深刻的振动系统特征, 同时它也是数值计算的基础. 因此在给定的连接方式下, 设计控制方案使闭环系统具有Riesz基性质就具有重大的实际意义.

本文研究在两端点处满足自由的Neumann-Neumann(N-N)边界条件的系统(1). 设$y(x,t)$为系统在t时刻在x点处的横向位移, 它在区间$[0,\,n]$满足方程(1), 则$y(0,\,t)$和$y(n,\,t)$不受限制, 但满足

收稿日期: 2007−04−18; 收修改稿日期: 2008−01−01.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(NSFC-60474017); 国家自然科学青年基金资助项目(NSFC-60704015).

$$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial y(n,t)}{\partial x}=0.$$

同时假设系统在内部连接点$x=i$处位移不连续而力连续, 即

$$y(i^-,t)-y(i^+,t)=v_i(t),\ i=1,\cdots,n-1,\tag{2}$$

$$T_i\frac{\partial y(i^-,t)}{\partial x}=T_{i+1}\frac{\partial y(i^+,t)}{\partial x},\ i=1,\cdots,n-1.\tag{3}$$

为了镇定该系统, 首先在内连接点处对位移进行补偿, 即在内部连接点处设置如下补偿器:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v_1(t)}{\mathrm{d}t}=-\gamma_1[v_1(t)+T_2\dfrac{\partial y(1^+,t)}{\partial x}],\\ \quad\vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}v_{n-1}(t)}{\mathrm{d}t}=\\ -\gamma_{n-1}[v_{n-1}(t)+T_n\dfrac{\partial y((n-1)^+,t)}{\partial x}].\end{cases}\tag{4}$$

然后在弦系统的两端设置如下控制器:

$$T_1\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=\alpha_1\frac{\partial y(0,t)}{\partial t}+y(0,t),\ t>0,\tag{5}$$

$$T_n\frac{\partial y(n,t)}{\partial x}=-\alpha_n\frac{\partial y(n,t)}{\partial t},\ t>0,\tag{6}$$

其中$\alpha_1,\ \alpha_n>0$. 利用补偿(4)和反馈(5)(6), 得到闭环控制系统(1)~(6).

2 系统的适定性(System well-posedness)

为了分析闭环系统(1)~(6)的适定性和渐近稳定性, 先将系统写成抽象形式. 为此, 令

$$y_i(x,t)=y(i-1+x,t),\ x\in(0,1),\tag{7}$$

$$Y(x,t)=[y_1(x,t),y_2(x,t),\cdots,y_n(x,t)]^{\mathrm{T}},$$

上标T代表向量或矩阵的转置(下同). 并记

$$M=\mathrm{diag}\{m_1,\cdots,m_n\},$$
$$T=\mathrm{diag}\{T_1,\cdots,T_n\},$$
$$\varGamma=\mathrm{diag}\{\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-1}\}$$

和

$$V(t)=[v_1(t),\cdots,v_{n-1}(t)]^{\mathrm{T}}.$$

再规定算子: $P_{n-1}:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^{n-1}$,

$$P_{n-1}[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{\mathrm{T}}=[y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}]^{\mathrm{T}}$$

和 $\hat{P}_{n-1}:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^{n-1}$,

$$\hat{P}_{n-1}[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{\mathrm{T}}=[y_2,y_3,\cdots,y_n]^{\mathrm{T}}.$$

于是这闭环反馈系统(1)~(6)可写成

$$\begin{cases}M\dfrac{\partial^2Y(x,t)}{\partial t^2}=T\dfrac{\partial^2Y(x,t)}{\partial x^2},\ x\in(0,1),\\ \dfrac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=-\varGamma(V(t)+\hat{P}_{n-1}TY_x(0,t)),\\ P_{n-1}Y(1,t)-\hat{P}_{n-1}Y(0,t)=V(t),\\ P^{\mathrm{T}}T\dfrac{\partial Y(0,t)}{\partial x}-T\dfrac{\partial Y(1,t)}{\partial x}=\begin{pmatrix}0\\ \alpha_n\dfrac{\partial y_n(1,t)}{\partial t}\end{pmatrix},\\ T_1\dfrac{\partial y_1(0,t)}{\partial x}=\alpha_1\dfrac{\partial y_1(0,t)}{\partial t}+y_1(0,t),\ t>0,\\ Y(x,0)=Y_0(x),\ \dfrac{\partial Y(x,0)}{\partial t}=Y_1(x),\\ V(t)|_{t=0}=V_0\stackrel{\mathrm{def}}{=}P_{n-1}Y_0(1)-\hat{P}_{n-1}Y_0(0).\end{cases}\tag{8}$$

这里$y_1(0,t)$是任意的,

$$P=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\ddots&\vdots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&0&0\\0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}_{n\times n}.\tag{9}$$

引入如下空间:

$$H^k(0,1)=\left\{f\in C^{k-1}[0,1]\,|\,f^{(k)}\in L^2[0,1]\right\},$$

$$H^k((0,1),\mathbb{R}^n)=\{x=[x_1(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n\ |\ t\in[0,1],\ x_i(\cdot)\in H^k(0,1)\},$$

$$\boldsymbol{X}=\{[f,g,h]^{\mathrm{T}}\in H^1((0,1),\mathbb{R}^n)\times L^2([0,1],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^{n-1}|P_{n-1}f(1)-\hat{P}_{n-1}f(0)=h\}.$$

记e_1和e_n分别为n阶单位矩阵的第1个和第n个列向量. 在空间$\boldsymbol{X}$中分别引入内积和范数如下:

$$\forall\,[f,g,h]^{\mathrm{T}},[\hat{f},\hat{g},\hat{h}]^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{X},$$

$$([f,g,h]^{\mathrm{T}},[\hat{f},\hat{g},\hat{h}]^{\mathrm{T}})_{\boldsymbol{X}}=\int_0^1(Tf'(x),\,\hat{f}'(x))\,\mathrm{d}x+\int_0^1(Mg(x),\,\hat{g}(x))\,\mathrm{d}x+(h,\,\hat{h})_{\mathbb{R}^{n-1}}+(e_1^{\mathrm{T}}f(0),\,e_1^{\mathrm{T}}\hat{f}(0)),$$

$$\left\|[f,g,h]^{\mathrm{T}}\right\|_{\boldsymbol{X}}=(\,[f,g,h]^{\mathrm{T}},\ [f,g,h]^{\mathrm{T}}\,)_{\boldsymbol{X}}^{\frac{1}{2}}.$$

按上述的内积与范数的定义, $\boldsymbol{X}$ 是一个Hilbert空间.

定义算子$A:D(A)\subset\boldsymbol{X}\mapsto\boldsymbol{X}$,

$$A\begin{pmatrix}f\\g\\h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g(x)\\M^{-1}Tf''(x)\\-\varGamma\left[h+\hat{P}_{n-1}Tf'(0)\right]\end{pmatrix},\tag{10}$$

其中$[f,g,h]^{\mathrm{T}} \in D(A)$,

$$D(A)=\left\{\begin{pmatrix} f\\ g\\ h\end{pmatrix}\in \boldsymbol{X}\ \middle|\ \begin{array}{c} f\in H^2\left((0,1)\times\mathbb{R}^n\right),\\ g\in H^1\left((0,1)\times\mathbb{R}^n\right),\\ P^{\mathrm{T}}Tf'(0)-Tf'(1)=\alpha_n g_n(1)e_n,\\ T_1 f_1'(0)=\alpha_1 g_1(0)+f_1(0).\end{array}\right\}.$$

于是闭环反馈系统(8)可写成发展方程的形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}=AZ,\\ Z(t_0)=Z_0.\end{cases}\tag{11}$$

这里$Z=[Y,Y_t,V,]^{\mathrm{T}}$, $Z_0=[Y_0(x),Y_1(x),V_0]^{\mathrm{T}}$. 算子$A$称为闭环系统(1)~(6)(或(8)或(11))的系统算子. 很容易得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(A[f,g,h]^{\mathrm{T}},\,[f,g,h]^{\mathrm{T}})=\\ &-(\varGamma(h+\hat{P}_{n-1}Tf'(0)),h+\hat{P}_{n-1}Tf'(0))-\\ &\alpha_n(g_n(1))^2-\alpha_1(g_1(0))^2.\end{aligned}\tag{12}$$

于是得到下面的定理.

定理 1　A是耗散算子, A^{-1}存在且是紧的, 因此A生成$\boldsymbol{X}$上的一个C_0压缩半群.

进一步可得到下面的结论, 该定理表明闭环系统(8)(或(1)~(6)) 是适定的.

定理 2　设$S(t)$是由A生成的C_0 压缩半群. 那么A的谱$\sigma(A)$是由孤立的本征值组成, 本征值的重数至多是有限的, 并且$\sigma(A)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}|\,\mathrm{Re}\,\lambda<0\}$. 因此$S(t)$是渐近稳定的.

证　由定理1知, 只需证明$\forall\,\lambda\in\sigma(A), \mathrm{Re}\,\lambda<0$. 假设存在一个非零的复数$\lambda\in\sigma(A)$, 其实部为0, 即$\mathrm{Re}\,\lambda=0$,不妨设$\lambda=\mathrm{i}\theta$. 再设$[f,g,h]^{\mathrm{T}}\in D(A)$是相应的本征向量, 则根据(10), 有

$$\begin{cases}g(x)=\lambda f(x),\\ M^{-1}Tf''(x)=\lambda g(x),\ x\in(0,\ 1),\\ -\varGamma\left(\hat{P}_{n-1}Tf'(0)+h\right)=\lambda h.\end{cases}\tag{13}$$

根据式(12)和常微分方程理论, 得到$f(x)=0$, $g(x)=0$, $h=0$, 这与$[f,g,h]^{\mathrm{T}}$是本征向量矛盾, 因此得到$\forall\ \lambda\in\sigma(A)$, $\mathrm{Re}\lambda<0$. 再根据Lyubich-Phóng定理[8], 可推出$S(t)$的渐近稳定性.

证毕.

3　$\boldsymbol{A}$的谱分析(Spectrum analysis of A)

在这一节, 讨论系统算子A的谱$\sigma(A)$的分布问题. 设λ为A的一个本征值, $[f,g,h]^{\mathrm{T}}\in D(A)$是相应的本征向量, 考虑方程(13). 令$\tilde{f}(x)=T^{1/2}f(x)$, $\tilde{g}(x)=T^{1/2}g(x)$ 则$\tilde{f}(x)$满足下述方程组:

$$\begin{cases}\tilde{f}''(x)=\lambda^2B\tilde{f}(x),\\ P_{n-1}T^{-1/2}\tilde{f}(1)-\hat{P}_{n-1}T^{-1/2}\tilde{f}(0)=h,\\ T_1^{1/2}\tilde{f}_1'(0)=\alpha_1T_1^{-1/2}\tilde{g}(0)+T^{-1/2}\tilde{f}_1(0),\\ Q^{\mathrm{T}}\tilde{f}'(0)-\tilde{f}'(1)=\alpha_nT^{-1/2}e_ne_n^{\mathrm{T}}T^{-1/2}\tilde{g}(1),\end{cases}\tag{14}$$

其中: $B^2=T^{-1/2}MT^{-1/2}$, $Q=T^{1/2}PT^{-1/2}$. 于是式(14)的通解为: $\tilde{f}(x)=\mathrm{e}^{\lambda Bx}a+\mathrm{e}^{-\lambda Bx}b$.

由边界条件, 可得到常系数a和b满足下面线性方程组:

$$\begin{pmatrix}G_{1,1}\,G_{1,2}\\ G_{2,1}\,G_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0,\tag{15}$$

其中:

$$\begin{aligned}&G_{1,1}=\tilde{G}_{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda B}+G_{-\lambda}+G_{-\infty},\\ &G_{1,2}=\tilde{G}_{-\infty}\mathrm{e}^{-\lambda B}+G_{+\lambda}+G_{+\infty},\\ &G_{2,1}=B_\alpha\mathrm{e}^{\lambda B}-Q^{\mathrm{T}}B,\ G_{2,2}=Q^{\mathrm{T}}B-B_{-\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda B},\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&\tilde{G}_{\pm\infty}\overset{\mathrm{def}}{=}[\,0^{\mathrm{T}},(P_{n-1}T^{-1/2})^{\mathrm{T}}\,]^{\mathrm{T}},\\ &G_{\pm\lambda}\overset{\mathrm{def}}{=}\begin{pmatrix}\lambda^{-1}\mathrm{e}_1^{\mathrm{T}}T^{-1/2}\\ \pm(\lambda I+\varGamma)^{-1}\varGamma^2\hat{P}_{n-1}T^{1/2}B\end{pmatrix},\\ &G_{\pm\infty}\overset{\mathrm{def}}{=}\begin{pmatrix}\mathrm{e}_1^{\mathrm{T}}T^{-1/2}\,(\alpha_1I\pm T_1B)\\ \mp\varGamma\hat{P}_{n-1}T^{1/2}B-\hat{P}_{n-1}T^{-1/2}\end{pmatrix},\\ &B_{\pm\alpha}\overset{\mathrm{def}}{=}B\pm\alpha_nT^{-1/2}\mathrm{e}_n\mathrm{e}_n^{\mathrm{T}}T^{-1/2},\end{aligned}$$

所以当且仅当本征值λ满足

$$\Delta(\lambda)\overset{\mathrm{def}}{=}\det\begin{pmatrix}G_{1,1}\,G_{1,2}\\ G_{2,1}\,G_{2,2}\end{pmatrix}=0$$

时, a, b有非零解, 此时

$$f(x)=T^{-1/2}(\mathrm{e}^{\lambda Bx}a+\mathrm{e}^{-\lambda Bx}b).\tag{16}$$

从而根据式(13), 可计算出A本征向量$[f,g,h]^{\mathrm{T}}$.

经由复杂的矩阵和行列式的运算, 得到

$$\begin{aligned}&\Delta_-\overset{\mathrm{def}}{=}\lim_{\mathrm{Re}(\lambda)\to-\infty}\frac{\Delta(\lambda)}{\det(\mathrm{e}^{-\lambda B})}=\\ &(-1)^n\Big(\frac{\alpha_1}{T_1^{1/2}}-\sqrt{m_1}\Big)\Big(\sqrt{\frac{m_n}{T_n}}-\frac{\alpha_n}{T_n}\Big)\cdot\\ &\prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{m_km_{k+1}}{T_k}}\Big(\gamma_k-\frac{1}{\sqrt{m_{k+1}T_{k+1}}}-\frac{1}{\sqrt{m_kT_k}}\Big),\end{aligned}\tag{17}$$

故当$\alpha_1=\sqrt{m_1T_1}$或$\alpha_n=\sqrt{m_nT_n}$或$\gamma_k=\dfrac{1}{\sqrt{m_{k+1}T_{k+1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{m_kT_k}}$, $k=1,\cdots,n-1$时, $\Delta_-=0$.

综上所述, 可以得到如下定理:

定理 3 设算子A由式(10)所定义, 则

$$\sigma(A)=\{\,\lambda\in\mathbb{C}\,|\Delta(\lambda)=0\,\}. \tag{18}$$

当$\Delta_-\neq 0$时, 存在一个正数$\delta>0$, 满足

$$\sigma(A)\subset\{\,\lambda\in\mathbb{C}|\,-\delta\leqslant\mathrm{Re}(\lambda)<0\,\}, \tag{19}$$

此时, 谱$\sigma(A)$是有限多个可分离集合的并集.

这个定理揭示了算子A的谱$\sigma(A)$分布在左半复平面且平行于虚轴的一个带域内. 在此基础之上就可以分析A的(广义)本征向量的完整性和半群$S(t)$的性质.

4 完整性, Riesz基性质与系统的稳定性(Completeness, Riesz basis property and system stability)

通过上一节的讨论, 可以得到如下完整性定理:

定理 4 设空间$\boldsymbol{X}$和算子A如前所定义, 若$\Delta_-\neq 0$, 则A的本征向量和广义本征向量系统在$\boldsymbol{X}$中是完整的.

结合定理3, 定理4和参考文献 [9]中的定理6可得到如下定理:

定理 5 设空间$\boldsymbol{X}$和算子A如前所定义, 如果$\Delta_-\neq 0$, 那么存在一个由A的本征向量和广义本征向量构成序列, 它形成$\boldsymbol{X}$的一组加括号的Riesz基. 特别的, 在这种情况下, A生成的$\boldsymbol{X}$上的C_0半群满足谱确定增长假定.

证 设$\sigma_1(A)=\{-\infty\}, \sigma_2(A)=\sigma(A)$, 定理3表明参考文献[9]中的定理6的条件均满足, 那么A的本征向量和广义本征向量序列构成$\boldsymbol{X}_2$的一组加括号的Riesz基. 定理4告诉它是在$\boldsymbol{X}$中完整的, 所以有$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_2$, 因此它同样是$\boldsymbol{X}$基. 再根据$A$的谱分布以及本征向量和广义本征向量的性质, 可知$A$生成的$C_0$半群满足谱确定增长假定. 证毕.

于是, 可得到下面稳定性定理:

定理 6 设空间$\boldsymbol{X}$和算子A如前所定义, 且$\Delta_-\neq 0$. 则下面的结论成立:

1) 若$\inf\limits_{\lambda\in i\mathbb{R}}|\Delta(\lambda)|\neq 0$, 则系统(8)是指数稳定的.

2) 若$\inf\limits_{\lambda\in i\mathbb{R}}|\Delta(\lambda)|=0$, 则系统(8)是渐近稳定的, 但不指数稳定的.

证 在定理的假设下, 由定理5知, 系统(8)是个Riesz系统, 并且满足谱确定增长条件. 由于$\sigma(A)=\{\,\lambda\in\mathbb{C}|\Delta(\lambda)=0\,\}$, 若$\inf\limits_{\lambda\in i\mathbb{R}}|\Delta(\lambda)|\neq 0$, 则虚轴不是谱$\sigma(A)$的渐近线, 这蕴含着系统(8)是指数稳定的. 若$\inf\limits_{\lambda\in i\mathbb{R}}|\Delta(\lambda)|=0$, 则虚轴是谱$\sigma(A)$的渐近线, 因此系统(8)是渐近稳定的, 但不指数稳定.

证毕.

根据此定理, 闭环系统(1)~6)(或(8))至少是渐近稳定的.

5 总结(Conclusion)

在工程上, 弦的连接方式都是预先设计好的, 关键是在给定连接方式下如何设计反馈控制使系统达到稳定. 本文引入适当的补偿器(4)和控制器(5)~(6), 当它们满足: $\gamma_k\neq\dfrac{1}{\sqrt{m_kT_k}}+\dfrac{1}{\sqrt{m_{k+1}T_{k+1}}}$,$(k=1,\cdots,n-1)$及$\alpha_1\neq\sqrt{m_1T_1}$和$\alpha_n\neq\sqrt{m_nT_n}$时, 闭环系统(8)是渐近稳定的, 并且具有Riesz基性质. 对于系统(8)的指数稳定性分析, 关键是要计算行列式$\Delta(\lambda)$. 由于其计算的复杂性以及篇幅所限, 将另文讨论该系统是否指数稳定.

参考文献(References):

[1] CHEN G, COLEMAN M, WEST H H. Pointwise stabilization in the middle of the span for second order systems, nouniform and uniform exponential decay of solutions[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1987, 47(4): 751 – 780.

[2] LIU K S, HUANG F L, CHEN G. Exponential stability analysis of a long chain of coupled vibrating strings with dissipative linkage[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1989, 49(6): 1694 – 1707.

[3] COX S, ZUAZUA E. The rate at which energy decays in a Damped string[J]. *Communications in Partial Differential Eqnarrays*, 1994, 19(1): 213 – 244.

[4] DAGER R. Observation and control of vibrations in tree–shaped networks of strings[J]. *SIAM Journal of Control Optimization*, 2004, 43(2): 590–623.

[5] LEUGERING G. Dynamic domain decomposition of optimal control problems for networks of strings and timoshenko beams[J]. *SIAM Journal of Control Optimization*, 1999, 37(6): 1649 – 1675.

[6] GUO B Z, XIE Y. A sufficient condition on Riesz basis with parentheses of non-self-adjoint operator and application to a serially connected string system under joint feedbacks[J]. *SIAM Journal of Control Optimization*, 2004, 43(4): 1234 – 1252,

[7] XU G Q, GUO B Z. Riesz basis property of evolution eqnarrays in Hilbert spaces and application to a coupled string eqnarray[J]. *SIAM Journal of Control Optimization*, 2003, 42(3): 966 – 984.

[8] LYUBICH Y I, PHÓNG V Q. Asymptotic stability of linear differential eqnarrays in Banach spaces[J]. *Studia Mathematics*, 1988, 88: 37 – 42.

[9] XU G Q, HAN Z J, YUNG S P. Riesz basis property of serially connected Timoshenko beams[J]. *International Journal of Control*, 2007, 80(3): 470 – 485.

作者简介:

刘东毅 (1969—), 男, 讲师, 博士研究生, 主要研究方向为分布参数系统、最优控制理论与算法及其应用等, E-mail: dyliu@tju.edu.cn;

尚英锋 (1980—), 男, 助教, 博士研究生, 主要研究方向为分布参数系统、系统辨识与建模等, E-mail: yfshang@eyou.com;

许跟起 (1959—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为分布参数系统、线性算子谱理论、系统辨识与建模等, E-mail: gqxu@tju.edu.cn.