文章编号: 1000−8152(2008)05−0917−03

不确定系统D稳定与方差约束的鲁棒H_∞可靠控制

费为银[1,2], 丁德锐[1], 夏登峰[1]

(1. 安徽工程科技学院 应用数理系, 安徽 芜湖 241000; 2. 东华大学 信息科学与技术学院, 上海 200051)

摘要: 研究了一类不确定系统区域稳定和方差约束的鲁棒H_∞可靠控制器的设计方法, 其目的是通过设计状态反馈控制器, 使闭环系统的极点被配置在给定的圆盘中, 同时, 当有外生扰动, 以及所有可能的不确定及其敏感执行器失效的时候, 依然能满足闭环传递函数H_∞ 范数有界和稳态方差的约束. 借助于LMI和凸优化技术, 给出了控制器存在的充分条件及其解析式. 最后, 通过一个仿真例子, 说明该方法的可行性.

关键词: 不确定系统; D-稳定; 可靠性控制; 状态反馈; 方差约束

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

H-infinity control of uncertain systems with D-stability and variance constraints

FEI Wei-yin[1,2], DING De-rui[1], XIA Deng-feng[1]

(1. Department of Applied Mathematics & Physics, Anhui University of Technology and Science, Wuhu Anhui 241000, China;
2. College of Information Science and Technology, Donghua University, Shanghai 200051, China)

Abstract: We design an H-infinity controller with state feedback for a class of uncertain systems. It places the closed-loop poles within a specified disk, and meets the requirements of the H-infinity-norm bound and variance constraints, for all external disturbances and admissible uncertainties including actuator failures. By using the convex optimization technique, the sufficient conditions for the existence and the analytical expression of the controller are obtained in terms of the linear matrix inequality. An illustrative example is provided to demonstrate the feasibility of the proposed method.

Key words: uncertain systems; D-stability; reliable control; state feedback; variance constraints

1 引言(Introduction)

在常规的设计控制系统时, 通常基于一个基本假定, 即系统的传感器与执行器均处于良好的工作状态, 不出现任何故障. 然而, 系统在实际运行中, 由于元器件质量、环境变化等各种因素的影响, 执行器失效是实际工程系统经常遇到的问题. 因此可靠控制引起了很多学者的兴趣, 一些可靠控制器设计方法也相继提出[1~9]. Leland et al. [1]利用冗余传感器的方法设计可靠控制器; Liao et al. [2]考虑具有凸组合形式的参数不确定系统, 用线性矩阵不等式方法研究了可靠飞行跟踪控制问题; Wang and Qiao [4] 研究了一类状态延时的不确定系统的可靠控制器的设计问题; 王福忠等[5]针对线性系统, 提出了抵御系统执行器故障和不确定性的状态反馈区域稳定可靠控制设计问题等.

设计出的鲁棒可靠控制器, 能否在敏感执行器出现故障的情况下, 依然保证系统极点在指定的圆盘区域内、稳态协方差及其H_∞ 性能指标满足给定约束, 正是本文所要考虑的问题.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下一类不确定线性系统:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t) + Dw(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (2)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$是状态向量, $y(t) \in \mathbb{R}^l$为输出向量, $u(t) \in \mathbb{R}^m$是控制输入, $w(t) \in \mathbb{R}^p$是均方可积的外生扰动, A, B, C, D 是相应维数的已知定常矩阵; ΔA 反映系统模型中变量参数不确定性的不确定实值矩阵, 并假设满足$\Delta A = MFN$, 在此, M和N是已知定常矩阵, F是时变矩阵, 且满足$FF^{\mathrm{T}} \leqslant I$, I是相应维数的单位矩阵.

设计如下形式的状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t), \quad (3)$$

收稿日期: 2006−12−07; 收修改稿日期: 2007−12−07.
基金项目: 教育部科学技术重点研究资助项目(205073); 国家973计划资助项目(2007CB814901); 教育部博士点基金资助项目(20060255006); 安徽省高校自然科学基金资助项目(KJ2008B143).

使闭环系统即使在执行器出现故障的情形下, 仍然满足D稳定、稳态方差约束以及H_∞性能指标要求.

在控制系统中, 执行器可分为两类: 一类容易发生故障, 在本文中称之敏感执行器, 记为$\Omega\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$, 这类执行器对于系统稳定性是冗余的, 但可能改善系统性能; 另一类则比较稳定、可靠, 不易发生故障, 记为$\overline{\Omega}\subseteq\{1,2,\cdots,m\}-\Omega$, 这类执行器的目的是用以镇定被控系统. 众多学者研究表明, 敏感执行器失效时, 在系统状态方程中主要体现在控制矩阵上, 并提出如下分解

$$B=B_\Omega+B_{\overline{\Omega}}. \tag{4}$$

其中B_Ω和$B_{\overline{\Omega}}$是取B中集合$\overline{\Omega}$和Ω相应列为零而产生的.

3 主要结论(Main results)

定理 1 设给定H_∞范数$\gamma>0$和$\sigma(A_C+\Delta A)\subset D(q,r)$的约束. 如果存在一正定矩阵$P>0$, 使下述矩阵不等式成立

$$\begin{aligned}&(A_C+\Delta A)P(A_C+\Delta A)^{\mathrm T}+(q^2-r^2)P+\\&q[(A_C+\Delta A)P+P(A_C+\Delta A)^{\mathrm T}+\\&DD^{\mathrm T}+\gamma^{-2}PC^{\mathrm T}CP]\leqslant 0.\end{aligned} \tag{5}$$

则闭环系统满足

i) $\sigma(A_C+\Delta A)\subset D(q,r)$;

ii) $\|T_{yw}(s)\|_\infty\leqslant\gamma$;

iii) 稳态协方差$X:=\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{E}[x(t)x(t)^{\mathrm T}]$存在, 并且满足$X\leqslant P$.

其中: σ表示矩阵特征值; $A_C=A+BK$; $D(q,r)$表示中心坐标为$(-q,0)$半径为r的圆盘; $T_{yw}(s)$表示从干扰输入$w(t)$到控制输出$y(t)$的传递函数.

证 类似文献[10], 可得定理成立. 证毕.

定理 2 给定H_∞范数$\gamma>0$, $\sigma(A_C+\Delta A)\subset D(q,r)$以及系统状态方差约束$[X]_{ii}\leqslant\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$. 如果存在一组适当的正定矩阵和正数$P,G,S,\varepsilon_1,\varepsilon_2$使得下列凸优化问题有解, 且解同时满足

$$(q\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2)MM^{\mathrm T}\leqslant S,$$
$$(P\varepsilon_2^{-1}+PN^{\mathrm T}NP)^{-1}\leqslant G^{-1},$$

那么, 对于所有可能的不确定性ΔA和相应的敏感执行器失效(失效的为敏感执行器的一子集, 记为$\omega\subseteq\Omega$), 所设计的控制器$K=-0.5B^{\mathrm T}P$都能够满足系统要求.

$$\min_{P,G,S,\varepsilon_1}\ \mathrm{tr}\,P-\mathrm{tr}\,G-\mathrm{tr}\,S$$

s.t.

$$\begin{bmatrix}Y & PN^{\mathrm T} & PB_{\overline{\Omega}} & PC^{\mathrm T} & (A-0.5BB^{\mathrm T})P\\ * & -(\varepsilon_1 q)^{-1}I & 0 & 0 & 0\\ * & * & q^{-1}I & 0 & 0\\ * & * & * & -\gamma^2q^{-1}I & 0\\ * & * & * & * & -G\end{bmatrix}<0, \tag{6}$$

$$[P]_{ii}\leqslant\sigma_i^2, i=1,2,\cdots,n, \tag{7}$$

其中: $[X]_{ii}$代表了第i个状态的方差, σ_i^2描述了第i个状态的稳态方差约束, 其值由实际系统的性能指标所决定; 式中

$$Y:=qAP+qPA^{\mathrm T}+(q^2-r^2)P+q(DD^{\mathrm T}+B_\Omega B_\Omega^{\mathrm T})+S.$$

证 定义

$$\Theta:=\varepsilon_1NN^{\mathrm T}-B_{\overline{\Omega}}B_{\overline{\Omega}}^{\mathrm T}+\gamma^{-2}C^{\mathrm T}C,$$
$$\begin{aligned}\Psi:=&(AP-0.5BB^{\mathrm T}P)(P-\varepsilon_2^{-1}PN^{\mathrm T}NP)^{-1}\cdot\\&(AP-0.5BB^{\mathrm T}P)^{\mathrm T}.\end{aligned}$$

根据文献[11]相关结论有

$$\begin{aligned}&(A_C+\Delta A)P(A_C+\Delta A)^{\mathrm T}=\\&(A+BK+MFN)P(A+BK+MFN)^{\mathrm T}\leqslant\\&\varepsilon_2MM^{\mathrm T}+\Psi.\end{aligned}$$

又凸优化问题有解, 且满足相应的约束条件, 依据Schur补引理, 可得

$$\begin{aligned}0\geqslant\ &q\{AP+PA^{\mathrm T}+P[\varepsilon_1N^{\mathrm T}N-B_{\overline{\Omega}}B_{\overline{\Omega}}^{\mathrm T}+\\&\gamma^{-2}C^{\mathrm T}C]P+DD^{\mathrm T}+B_\Omega B_\Omega^{\mathrm T}+q^{-1}S\}+\\&\{(AP-0.5BB^{\mathrm T}P)G^{-1}(AP-0.5BB^{\mathrm T}P)^{\mathrm T}+\\&(q^2-r^2)P\}\geqslant\\&q\{AP+PA^{\mathrm T}+P\Theta P+\varepsilon_1^{-1}MM^{\mathrm T}+DD^{\mathrm T}+\\&B_\Omega B_\Omega^{\mathrm T}\}+\{\varepsilon_2MM^{\mathrm T}+\Psi+(q^2-r^2)P\}.\end{aligned}$$

接下来, 与Wang[4]类似, 可得该定理成立. 证毕.

4 仿真例子(Simulation example)

考虑一线性不确定随机控制系统, 其可由式(1)和(2)描述, 系统模型参数如下:

$$A=\begin{pmatrix}-1.5 & -0.2\\ -0.2 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0.5 & -0.4\\ 0 & 0.5\end{pmatrix},$$
$$C^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}0.5\\ 0.2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.8\end{pmatrix},$$
$$M=\begin{pmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.2\end{pmatrix}.$$

希望通过状态反馈, 使满足闭环系统D稳定、扰动传递函数H_∞范数有界稳态方差满足给定约束, 其相应的值

$$\sigma(A_C+\Delta A)\subset D(q,r)=D(2,1.95);$$
$$\gamma=0.95;\sigma_1=3.3;\sigma_2=3.5.$$

现在假定$\Omega=\{2\}$, 有

$$B_\Omega=\begin{pmatrix}0 & -0.4\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}, B_{\overline{\Omega}}=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

解得

$$S=\begin{pmatrix}2 & 0.101\\ 0.2045 & 2\end{pmatrix},$$
$$G=\begin{pmatrix}0.8 & 0.0145\\ 0.1546 & 0.8\end{pmatrix},$$
$$P=\begin{pmatrix}3.2 & -0.1453\\ 0.2107 & 3.2\end{pmatrix},$$
$$K=\begin{pmatrix}-0.8 & 0.0363\\ 0.5873 & -0.8291\end{pmatrix},$$
$$\varepsilon_1=3.5,\varepsilon_2=1.7.$$

当$F=\begin{pmatrix}\sin t & 0\\ 0 & \cos t\end{pmatrix}$, 系统状态初始值$X_0^{\mathrm{T}}=[-1\quad -0.95]$时, 通过MATLAB仿真可以看出, 闭环系统即使在有较大的不确定性和白噪声干扰下, 依然能快速衰减、达到稳定, 具有很强的抗干扰能力(图1); 当传感器失效时, 相对于正常情况, 系统的输出略有劣化, 但同样的表现出优异的抗扰性能(图2), 系统的闭环极点依然落在给定的圆盘内, 充分验证了本文方法的可行性.

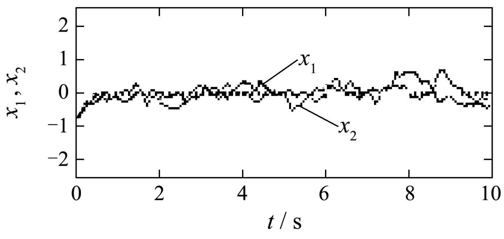

图 1　系统状态响应(执行器正常)

Fig. 1　System state response (actuator normal)

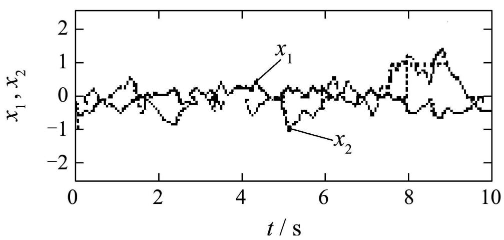

图 2　系统状态响应(执行器失效)

Fig. 2　System state response (actuator failures)

5　结论(Conclusion)

本文针对一类线性不确定系统, 通过求解一凸优化问题, 且解满足相应的约束, 由此获得要求的反馈控制律. 该控制器不仅满足闭环系统可靠性的要求, 而且还满足D稳定、方差和H_∞范数约束的要求.

参考文献(References):

[1] LELAND P M, MEDANIC J V, PERKINS W R. Reliable H_∞ norm bounding controllers with redundant control elements[C] //*Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. Lake Buena Vista, Florida, USA: 1994, 1536 – 1541.

[2] LIAO F, WANG J L, YANG G H. Reliable robust flight tracking control: an LMI approach[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, 10(1): 76 – 89.

[3] YANG G H, WANG J L, SOH Y C. Reliable H_∞ controller design for linear systems[J]. *Automatica*, 2001, 37 (5): 717 – 725.

[4] WANG Z D, QIAO H. H_∞ reliable control of uncertain linear state delayed systems[J]. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2004, 10(1): 55 – 75.

[5] 王福忠, 姚波, 张嗣瀛. 线性系统区域稳定的可靠控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(5): 835 – 839.
(WANG F Z, YAO B, ZHANG S Y. Reliable control of regional stabilizability for linear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(5): 835 – 839.)

[6] 王福忠, 姚波, 井元伟, 等. 线性不确定系统具有方差约束的可靠控制[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2004, 25(7): 613 – 616.
(WANG Fuzhong, YAO Bo, JING Yuanwei, et al. Reliable control with variance constraints for linear uncertain systems[J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2004, 25(7): 613 – 616.)

[7] 张榆平, 朱宏. 具有传感器故障的不确定系统的区域稳定可靠控制[J]. 信息与控制, 2006, 35(6): 679 – 683.
(ZHANG Yuping, ZHU Hong. Reliable control of regional stabilizability for uncertain system with sensor failures[J]. *Information and Control*, 2006, 35(6): 679 – 683.)

[8] 桂卫华, 陈宁, 吴敏. 不确定关联大系统鲁棒分散可靠H_∞控制[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(6): 923 – 926.
(GUI Weihua, CHEN Ning, WU Min. Robust decentralized reliable H_∞ control for uncertain large-scale systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(6): 923 – 926.)

[9] 陈兵, 张嗣瀛. 基于传感器与执行器同时失误的鲁棒可靠H_∞控制[J]. 控制与决策, 2003, 18(2): 145 – 149.
(CHEN Bing, ZHANG Siying. Robust H_∞ reliable control against simultaneous failures of sensor and actuator[J]. *Control and Decision*, 2003, 18(2): 145 – 149.)

[10] 费为银, 丁德锐, 夏登峰. 不确定系统D稳定的鲁棒H_∞可靠性控制[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(8): 1772 – 1775.
(FEI Weiyin, DING Derui, XIA Ddengfeng. H_∞ reliable control of uncertain systems with D-stability constraints[J]. *Journal of System Simulation*, 2007, 19(8): 1772 – 1775.)

[11] XU S, YANG C, ZHOU S. Robust control for uncertain discrete-time systems with circular pole constraints[J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 39: 13 – 18.

作者简介:

费为银　(1963—), 男, 教授, 博士, 研究生导师, 安徽省中青年学术与技术带头人, 目前研究方向为随机控制理论及其应用、模糊系统理论及应用等, E-mail: wyfei@dhu.edu.cn;

丁德锐　(1981—), 男, 硕士, 目前研究方向为自动化装置与智能控制, E-mail: dingderui@163.com;

夏登峰　(1979—), 男, 硕士, 目前研究方向为现代鲁棒控制理论及其应用, E-mail: dfxia@auts.edu.cn.