

文章编号: 1000-8152(2008)05-0925-04

基于T-S模型的非线性系统非脆弱极小极大控制

姜 因, 井元伟

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 研究一类非线性离散系统的鲁棒非脆弱极小极大控制问题. 针对含有不确定项的非线性离散系统, 构造T-S模型, 引入参数不确定项, 使得模糊模型能够更精确逼近原系统. 考虑系统和控制器同时含有不确定性, 利用线性矩阵不等式(LMI)处理方法和Lyapunov稳定性理论, 设计鲁棒且非脆弱的控制器. 考虑不确定性使得性能指标最大的情形, 得到极小极大鲁棒非脆弱控制器存在的充分条件. 引入凸优化算法, 求解使闭环系统渐近稳定且性能指标上界最小的最优极小极大鲁棒控制器的参数. 最后以著名的truck-trailer模型为例的仿真结果表明所设计的控制器具有良好的鲁棒性和非脆弱性.

关键词: 非线性系统; 极小极大控制; 离散系统; 非脆弱; T-S模型

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Non-fragile minimax control of nonlinear systems based on T-S model

JIANG Nan, JING Yuan-wei

(Faculty of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: To deal with the robust and non-fragile minimax control problem for uncertain nonlinear discrete systems, we construct a T-S model including the parametric uncertainty terms of the nonlinear systems to give a better approximation to the original system. The sufficient conditions for the existence of robust and non-fragile minimax control are derived in the sense of Lyapunov asymptotic stability and are formulated in the format of linear matrix inequalities (LMIs). The convex optimization algorithm is used to determine the minimal upper bound of the performance cost and the parameters of optimal minimax controller. The closed-loop system is asymptotically stable under the worst disturbances and the greatest uncertainty. An illustrative example of truck-trailer shows a good robust and non-fragile performance of the designed controller.

Key words: nonlinear systems; minimax control; discrete systems; non-fragile; T-S model

1 引言(Introduction)

近年来, 模糊控制技术已成为研究非线性系统控制问题非常有效的方法, 20世纪80年代, Takagi和Sugeno提出了著名的T-S模型, 其模糊规则的后件部分给出了确切的数学描述, 为模糊控制的理论分析提供了方便, 而且可得到严格的稳定性证明^[1]. 文献[2,4]基于T-S模型研究了不确定非线性系统的鲁棒镇定问题及模糊系统稳定的充分条件. 随着计算机技术的发展, 模糊控制也被推广到非线性离散系统中^[5,6]. 文献[7]针对非线性离散系统研究了模糊镇定问题. 极小极大控制是一类特殊的保性能控制问题, 它是针对干扰和不确定性最坏的情形, 设计鲁棒控制器, 使得在整个时间过程中状态偏差、控制能量的消耗、干扰以及不确定性几方面综合指标最小. 俄罗斯学者Kogan在文献[8,9]中分别针对标称

的线性离散系统和线性随机系统研究了极小极大控制器的存在条件.

在实际系统的运行中, 控制器由于硬件(如AD, DA转换等)、软件(如计算截断误差)等原因, 经常存在参数摄动的情况. 此时传统的鲁棒控制方法表现出高度的脆弱性, 因此, 设计出兼具鲁棒和非脆弱特性的控制器才能保证系统的稳定高性能运行. Yang在文献[10, 11]中分别针对控制器具有加性和乘性干扰的线性系统, 研究了非脆弱 H_∞ 控制问题.

本文针对含有不确定项的非线性离散系统, 在后件部分引入了参数不确定项. 利用线性矩阵不等式方法和Lyapunov稳定性理论, 设计模糊非脆弱极小极大控制器. 引入凸优化算法, 求解性能指标最小上界及最优控制器参数. 最后以Truck-Trailer模型为例的仿真结果表明所设计的控制器具有良好的鲁棒性

收稿日期: 2006-12-26; 收修改稿日期: 2007-09-17.

基金项目: 教育部暨辽宁省流程工业综合自动化重点实验室开放课题项目; 国家高技术研究发展“863”计划项目(2004AA412030).

和非脆弱性.

2 系统与问题的描述(System description and problem statement)

对非线性离散系统,第*i*条模糊规则对应的表达式如下所示:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^i : & \text{if } z_1(k) \text{ is } F_1^i, z_2(k) \text{ is } F_2^i, \dots, z_n(k) \text{ is } F_n^i, \\ & \text{then } x(k+1) = (A_i + \Delta A_i)x(k) + (B_i + \Delta B_i)u(k), \\ & y(k) = C_i x(k), \quad i = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: 集合 F_j^i 是模糊子集($j = 1, \dots, n$), $z(k) = [z_1(k), \dots, z_n(k)]^T$ 是前提变量, $x(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]^T \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是系统矩阵, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 和 $C_i \in \mathbb{R}^{l \times n}$ 分别是系统的输入和输出矩阵. ΔA_i 和 ΔB_i 是具有适当维数的参数不确定项, q 是T-S模糊规则数.

应用标准的模糊推理方法得到系统的全局模糊状态方程

$$\begin{cases} x(k+1) = \sum_{i=1}^q h_i(z(k)) [A_i x(k) + B_i u(k)] + \\ \quad \sum_{i=1}^q h_i(z(k)) [\Delta A_i x(k) + \Delta B_i u(k)], \\ y(k) = \sum_{i=1}^q h_i(z(k)) C_i x(k). \end{cases} \quad (2)$$

考虑性能指标

$$J(u, W) = \sum_0^{\infty} (x^T(k) Q x(k) + u_{i0}^T(k) R u_{i0}(k) - \gamma^2 W^T W), \quad (3)$$

其中: $Q = Q^T > 0$, $R > 0$, W 表示所有容许的不确定性和干扰, 记 $u_{i0}(k) = K_i x(k)$.

考虑如下两种形式的控制器增益变化:

a) 加性控制器增益变化:

$$\Delta K_i = \Delta T_{i1}, \quad F_i^T F_i \leq I, \quad i = 1, \dots, q. \quad (4)$$

b) 乘性控制器增益变化:

$$\Delta K_i = \Delta T_{i2} K_i, \quad F_i^T F_i \leq I, \quad i = 1, \dots, q. \quad (5)$$

其中: $\Delta T_{i1} = D_i F_i E_{i3}$, $\Delta T_{i2} = D_i F_i E_{i4}$, $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为状态反馈增益矩阵, ΔK_i 为增益干扰.

全局模糊控制器为

$$u(k) = \sum_{i=1}^q h_i(z(k)) (u_{i0}(k) + \Delta K_i x(k)). \quad (6)$$

假设 1 系统(1)中的参数不确定项是范数有界的, 并且满足下面等式:

$$[\Delta A_i, \Delta B_i, \Delta T_{i1}, \Delta T_{i2}] = D_i F_i(k) [E_{i1}, E_{i2}, E_{i3}, E_{i4}],$$

其中: $D_i, E_{i1}, E_{i2}, E_{i3}, E_{i4}$ 是具有适当维数的矩阵, $F_i(k)$ 是一未知矩阵函数, 其元素是勒贝格可测的,

且 $F_i^T(k) F_i(k) \leq I$, I 是合适维数的单位阵.

3 具有加性增益干扰的极小极大控制律设计(Minimax robust control under additive gain perturbations)

定理 1 针对系统(2)和性能指标(3), 对于给定的常数 $\gamma > 0$, 如果存在公共的正定对称矩阵 X 使得下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 I & \bar{D}_i^T X \\ X \bar{D}_i & -X \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} -X & X A_i^T \\ A_i X & -(X - \gamma^{-2} \bar{D}_i \bar{D}_i^T + B_i R^{-1} B_i^T) \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} -X + Q_1 & X A_i^T & X A_i^T \\ * & -X + Q_1 & 0 \\ * & * & -Z \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad (9)$$

则

$$u_{j0}^* = - \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q h_i h_j (R + B_i^T \bar{P} B_i)^{-1} B_i^T \bar{P} A_i x(k)$$

是系统(2)的一个极小极大非脆弱控制律, 且闭环系统渐近稳定, 相应的系统性能指标上界为

$$J^* \leq x^T(0) P x(0). \quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= P + P \bar{D}_i (\gamma^2 I - \bar{D}_i^T P \bar{D}_i)^{-1} \bar{D}_i^T P, \\ Z &= P^{-1} (\gamma^{-2} \bar{D}_i \bar{D}_i^T - B_i R^{-1} B_i^T) + \\ & \quad (\gamma^{-2} \bar{D}_i \bar{D}_i^T - B_i R^{-1} B_i^T) P^{-1} - (\gamma^{-2} \bar{D}_i \bar{D}_i^T - \\ & \quad B_i R^{-1} B_i^T) (\gamma^{-2} \bar{D}_i \bar{D}_i^T - B_i R^{-1} B_i^T), \\ X &= P^{-1}, \end{aligned}$$

Q_1 为对角线元素都为正的相应维数的常数阵.

证 首先构造李雅普诺夫函数

$$V(k) = x^T(k) P x(k), \quad (11)$$

其中矩阵 P 为对称正定矩阵. 对式(11)做差分, 得

$$\Delta V(k) = x^T(k+1) P x(k+1) - x^T(k) P x(k). \quad (12)$$

选择一个局部检验函数为

$$\psi(k) = \Delta V(k) + u_{j0}^T(k) R u_{j0}(k) - \gamma^2 W^T W, \quad (13)$$

将式(12)代入上式并关于 W 求极值得到

$$\begin{aligned} W^* &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q h_i h_j (\gamma^2 I - \bar{D}_i^T P \bar{D}_i)^{-1} \cdot \\ & \quad \bar{D}_i^T P (A_i x + B_i u_{j0}), \end{aligned} \quad (14)$$

由式(7)显然有 $\frac{\partial^2 \psi(k)}{\partial W^2} = \bar{D}_i^T P \bar{D}_i - \gamma^2 I < 0$, 故式(14)即为闭环系统的最坏干扰参数表达式, 将 W^* 代入式(13)再对其关于 u_{j0} 求极值, 得到

$$u_{j0}^* = - \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q h_i h_j (R + B_i^T \bar{P} B_i)^{-1} B_i^T \bar{P} A_i x(k), \tag{15}$$

又因为 $\frac{\partial^2(\max_W \psi(k))}{\partial u^2} = R + B_i^T \bar{P} B_i \geq 0$, 故式(15)为使得局部检验函数取极小值的控制器参数表示, 根据Schur补定理, 易知闭环系统是渐近稳定的, 且 $\min_{u_0} \max_W J(u, W) = x(0)^T P x(0)$.

假设 2 系统(2)的闭环系统初值 x_0 是一个满足 $E\{x_0 \ x_0^T\} = I$ 的零均值随机变量. 此时, 模糊闭环系统的性能指标的期望值是 $\bar{J} = E\{J\} \leq E\{x_0^T P x_0\} = \text{tr}(P) = J^*$. 其中: J^* 为闭环系统的性能函数上界, $E(\cdot)$ 表示期望算子^[3].

定理 2 对给定的系统(2)和性能指标(3), 如果以下优化问题成立:

$$\begin{aligned} & \min_{X, \bar{X}} \text{tr}(\bar{X}), \\ & \text{s.t.} \quad (7) \sim (9), \begin{bmatrix} \bar{X} & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, q, \end{aligned}$$

则式(15)为系统(2)的最优极小极大控制律, 相应的系统性能指标上界是 $\bar{J} \leq \text{tr}(\bar{X}) = J^*$.

4 具有乘性增益干扰的极小极大控制律设计 (Minimax robust control under multiplicative gain perturbations)

定理 3 针对系统(2)和性能指标(3), 对于给定的 $\bar{\gamma} > 0$ 及 $\bar{\varepsilon} > 0$, 如果存在公共的对称正定矩阵 Y 使得下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -\bar{\gamma}^2 I & \bar{D}_i^T \\ * & -Y + \bar{\varepsilon} B_i \bar{D}_i \bar{D}_i^T B_i^T \end{bmatrix} < 0, \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} -Y & Y A_i^T \\ A_i Y & -(Y - M_i) \end{bmatrix} < 0, \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} -Q_2 & 0 & 0 \\ * & -M_i(Y - \bar{\varepsilon} B_i \bar{D}_i \bar{D}_i^T B_i^T) & 0 \\ * & * & -\bar{\varepsilon} S^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} -Y + Q_2 & Y A_i^T & Y A_i^T \\ * & -Y + M_i + I & 0 \\ * & * & -\bar{\varepsilon} \Phi_i \end{bmatrix} < 0,$$

$$i = 1, \dots, q, \tag{19}$$

则

$$u_{j0} = - \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q h_i h_j (\bar{R} + B_i^T \bar{P}_m B_i + \bar{\varepsilon}^{-1} E_{i3}^T E_{i3})^{-1} B_i^T \bar{P}_m A_i x(k) \tag{20}$$

是系统(2)的一个极小极大非脆弱控制律, 且闭环系统渐近稳定, 相应的系统性能指标上界是

$$\min_{u(k)} \max_W J(u, \omega) = x^T(0) P_m x(0).$$

其中:

$$M_i = -\bar{\gamma}^2 \bar{D}_i \bar{D}_i^T - \varepsilon B_i \bar{D}_i \bar{D}_i^T B_i^T + B_i^T (\bar{R} + \bar{\varepsilon}^{-1} E_{i3}^T E_{i3})^{-1} B_i,$$

$$\bar{P}_m = \tilde{P}_m + \tilde{P}_m \bar{D}_i (\bar{\gamma}^2 I - \bar{D}_i^T \tilde{P}_m \bar{D}_i)^{-1} \bar{D}_i^T \tilde{P}_m,$$

$$Y = P_m^{-1},$$

$$\Phi_i = \Theta_i \bar{P}_m^{-1} S^{-1} B_i + B_i^T S^{-1} \bar{P}_m^{-1} \Theta_i^T + B_i^T B_i.$$

定理 4 对给定的系统(2)和性能指标(6), 如果以下优化问题成立

$$\begin{aligned} & \min_{Y, \bar{Y}} \text{tr}(\bar{Y}) \\ & \text{s.t.} \quad (16) \sim (19), \begin{bmatrix} \bar{Y} & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, q, \end{aligned}$$

则式(20)为系统(2)的最优极小极大鲁棒非脆弱控制律, 相应的性能指标上界为 $\bar{J} \leq \text{tr}(P_m) = J^*$.

5 仿真研究 (Simulation study)

为了验证方法的有效性, 这里以控制器受到加性增益变化为例, 利用本文方法对 truck-trailer 模型^[2]进行仿真. 考虑如下模型:

$$x_1(k+1) = (1 - v \frac{\bar{k}}{L}) x_1(k) + v \frac{\bar{k}}{L} u(k) + a(k) x_1(k),$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + v \frac{\bar{k}}{L} x_1(k) + a(k) x_2(k),$$

$$x_3(k+1) = x_3(k) + v \bar{k} \sin(x_2(k) + v \frac{\bar{k}}{2L} x_1(k)) + a(k) x_3(k),$$

其中 $a(k)$ 是系统的参数不确定项.

采用式(1)形式的模糊规则来描述该模型, 其中:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.3846 & 0 & 0 \\ -0.3846 & 1 & 0 \\ 0.009615 & -0.05 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -0.5747 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.3846 & 0 & 0 \\ -0.3846 & 1 & 0 \\ 0.00032458 & -0.001688 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -0.5747 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_1 = \Delta A_2 = \begin{bmatrix} 0.2 \sin k & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 \sin k & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \sin k \end{bmatrix},$$

$$\Delta B_1 = D_1 F(k) E_{12}, \Delta B_2 = D_2 F(k) E_{22},$$

$$E_{12} = [1.5],$$

$$D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, F(k) = \sin k, E_{22} = [2.5].$$

采用下面的隶属函数:

$$h_1(z(k)) = \frac{1}{1 + \exp\{-3[z(k) - \frac{\pi}{2}]\}} \frac{1}{1 + \exp\{-3[z(k) + \frac{\pi}{2}]\}},$$

$$h_2(z(k)) = 1 - h_1(z(k)),$$

$$z(k) = x_2(k) + v \frac{\bar{k}}{2L} x_1(k).$$

首先假设设计时不考虑控制器的增益变化, 利用MATLAB LMI Toolbox对定理2中的条件寻优得到性能指标的最小上界 $J_R^* = 15.9600$, 相应的控制器增益为 $K_{1R} = [2.4566 \ -0.3167 \ 0.0083]$, $K_{2R} = [2.4565 \ -0.3163 \ 0]$, 假设控制器受到的扰动参数为 $D_1 = D_2 = [0.1 \ -0.01 \ 0.1]^T$, $E_1 = E_2 = [0.3 \ 0.15 \ -0.2]$, 扰动矩阵 $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, 对定理2中的条件寻优得到性能指标的最小上界为 $J_N^* = 15.4703$, 相应的控制器增益为 $K_{1N} = [2.5169 \ -0.3316 \ 0.0085]$, $K_{2N} = [2.5168 \ -0.3312 \ 0]$, 显然 $J_R^* > J_N^*$, 可见当系统的控制器增益受到很小的扰动时, 闭环系统的性能下降.

为了进一步说明控制性能, 将鲁棒控制与鲁棒非脆弱控制效果进行对比. 对系统施加幅值为0.1的正弦干扰, 系统状态的响应曲线如图1和图2所示.

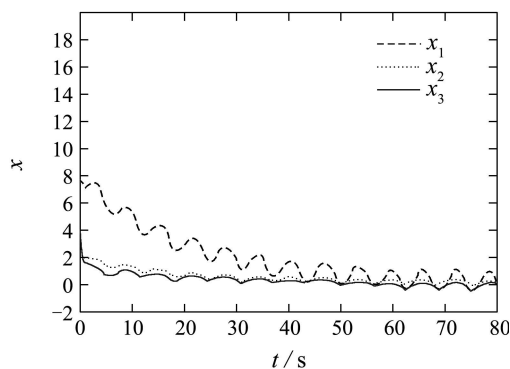


图1 鲁棒控制的系统状态响应曲线
Fig. 1 state responses of robust control

从图中可看出当控制器存在扰动时, 单纯的极小极大鲁棒控制虽然仍能使系统的各个状态趋于渐近稳定, 但是曲线存在明显抖动, 这说明单纯的极小极大鲁棒控制器具有脆弱性. 采用所设计的极小极大鲁棒非脆弱控制器能很好的解决控制器由于器件或传感器老化等原因引起的系统稳定性破坏和性能下降, 使得控制器适应更恶劣的工程环境.

6 结论(Conclusions)

本文在T-S模型的后件部分引入了参数不确定

项, 考虑不确定性使得系统性能指标的界最大时, 设计鲁棒且非脆弱的控制器. 通过引入凸优化技术和LMI方法, 求解的最优控制器不需要耗费很大的代价就可以使得闭环系统渐近稳定且性能指标存在最小上界. 通过与单纯的鲁棒控制器比较说明设计的控制器具有良好的非脆弱性.

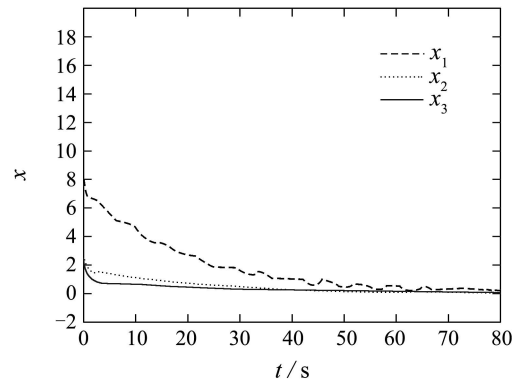


图2 鲁棒非脆弱控制的系统状态响应曲线
Fig. 2 State responses of robust and non-fragile

参考文献(References):

- [1] TAKAGI T, SUGENO M. Stability analysis and design of fuzzy control systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 45(2): 135 - 156.
- [2] TANAKA K, WANG H.O. Fuzzy controller and observer design for backing control of a truck-trailer[J]. *Engng Application Artif Intell*, 1997, 10(4): 441 - 452.
- [3] LEUNG F H, LAM H K, TAM P. Design of fuzzy controllers for uncertain nonlinear systems using stability and robustness analyses[J]. *Systems & Control Letters*, 1998, 35(4): 237 - 243.
- [4] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. *IEEE Transactions on Systems Man, and Cybernetics Cabernet*, 1985, 15(1): 116 - 132.
- [5] WANG Z D, UNBEVAUEN H. A class of nonlinear observers for discrete-time systems with parametric uncertainty[J]. *International Journal of Systems Science*, 2000, 31(1): 19 - 26
- [6] MAHMOUD M S. Robust H_∞ control of discrete systems with uncertain parameters and unknown delays[J]. *Automatica*, 2000, 36(4): 627 - 653.
- [7] MA X J, SUN Z Q, HE Y Y. Analysis an design of fuzzy controller and fuzzy observer[J]. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, 1998, 6(1): 41 - 51
- [8] KOGAN M M. Local-minimax and minimax control of linear natural discrete system[J]. *Automechanism and Telemechanism*, 1997, 11: 33 - 44.
- [9] MYUNG Y, VALERY U, IAN P. On the worst-case disturbance of minimax optimal control[J]. *Automatica*, 2005, 41(4): 847 - 855.
- [10] YANG G H, WANG J L, LIN C. H_∞ control for linear systems with additive controller gain variations[J]. *International of Journal Control*, 2000, 73(15): 1500 - 1506.
- [11] YANG G H, WANG J L. Non-fragile H_∞ control for linear systems with multiplicative controller gain variations[J]. *Automatica*, 2001, 37(4): 727 - 737.

作者简介:

姜 园 (1979—), 女, 博士, 从事极小极大控制、电力系统模型预测控制研究, E-mail: jiangnan230@126.com;

井元伟 (1956—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统、远程通讯网络通信控制等研究, E-mail: jingyuanwei@ise.neu.edu.cn.