第 25 卷第 5 期
2008 年 10 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 25 No. 5
Oct. 2008

文章编号: 1000−8152(2008)05−0943−04

随机不确定时滞系统的鲁棒H$_\infty$控制

夏建伟[1], 徐胜元[2], 邹 云[2]

(1. 聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252000; 2. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094)

摘要: 本文研究了随机不确定时滞系统的鲁棒稳定性与鲁棒H$_\infty$控制问题, 系统的不确性具有凸多面体形式. 利用线性矩阵不等式方法, 通过依赖于参数的Lyapunov函数, 得到了此类系统鲁棒随机镇定的充分条件. 在此基础上, 又给出了H$_\infty$状态反馈控制器的设计.

关键词: H$_\infty$控制; 凸多面体; 随机系统; 时滞

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Robust H-infinity control for stochastic uncertain systems with time-delay

XIA Jian-wei[1], XU Sheng-yuan[2], ZOU Yun[2]

(1. School of Mathematic Science, Liaocheng University, Liaocheng Shandong 252000, China;
2. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

Abstract: The robust stochastic stability and the robust H-infinity control for time-delay stochastic systems with convex polytopic uncertainties are addressed. Sufficient conditions for the solvability of these problems are obtained via the parameter-dependent Lyapunov functional. It is also shown that a desired state feedback controller can be designed by solving a set of linear matrix inequality.

Key words: H-infinity control; polytopic uncertainties; stochastic systems; time-delay

1 引言(Introduction)

众所周知, 时滞和不确定性往往是破坏系统稳定性和降低系统性能的主要因素, 由于建模误差及系统工作环境等诸多方面影响, 决定了时滞和不确定性实际存在于大量实际系统中. 近年来, 对不确定时滞系统的鲁棒研究引起了广大学者的关注[1~3].

另一方面, 由于随机因素在实际工业中的广泛存在性, 随机系统的研究也越来越受到大家的重视[4]. 例如文[5]中, 研究了时滞随机系统稳定性问题. 文[6]中, 对随机系统H$_\infty$控制问题进行了研究. 当同时考虑参数不确定性和时滞, 文[7]中, 给出了随机系统的鲁棒H$_\infty$稳定性结果, 并给出控制器的设计方法. 值得注意的是, 文[7]中, 参数不确定性满足范数有界形式. 到目前为止, 据作者所知, 还没有不确定参数满足凸多面体形式的随机不确定时滞系统的鲁棒H$_\infty$控制问题的相应研究结果.

本文中, 研究了随机不确定时滞系统的鲁棒稳定性和鲁棒H$_\infty$控制问题. 不确定参数满足凸多面体形式. 对鲁棒稳定性问题和鲁棒H$_\infty$控制问题, 分别给出静态反馈控制器的设计, 使得闭环系统渐近稳定, 同时满足H$_\infty$范数界. 通过依赖于参数的Lyapunov函数, 分别给出了上述问题的充分条件, 并且通过解一组线性矩阵不等式得到静态反馈控制律.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑随机不确定时滞系统(Σ)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x(t)=&[A(\alpha)x(t)+A_1(\alpha)x(t-\tau(t))+B(\alpha)u(t)+\\&B_1(\alpha)v(t)]dt+[E(\alpha)x(t)+\\&E_1(\alpha)x(t-\tau(t))+E_v(\alpha)v(t)]\mathrm{d}w(t),\end{aligned}\quad(1)$$

$$z(t)=Cx(t),\quad(2)$$

$$x(t)=\varphi(t),\ \forall t\in[-\mu,0],\quad(3)$$

其中: $x(t)\in\mathbb{R}^n$为状态变量, $u(t)\in\mathbb{R}^m$为控制输入, $v(t)\in\mathbb{R}^p$为干扰输入, $z(t)\in\mathbb{R}^q$为控制输出, $\omega(t)$为标准一维布朗运动, 满足$\mathrm{E}\mathrm{d}\omega(t)=0, \mathrm{E}\{\mathrm{d}\omega(t)^2\}=\mathrm{d}t$, $\mathrm{E}\{\cdot\}$为期望, 标量$\tau(t)$为时变时滞满足$0<\tau(t)\leqslant\mu<\infty$, $\dot\tau(t)\leqslant h<1$. 其中μ和h为已知常数, $\varphi(t)$为起始函数. 系统的不确定

收稿日期: 2007−01−04; 收修改稿日期: 2007−09−05.
基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20060288021); 高等学校全国优秀博士学位论文专项基金资助项目(200240).

性参数满足

$$[A(\alpha)\ A_1(\alpha)\ B(\alpha)\ B_1(\alpha)\ E(\alpha)\ E_1(\alpha)\ E_v(\alpha)] = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i[A_i\ A_{1i}\ B_i\ B_{1i}\ E_i\ E_{1i}\ E_{vi}], \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 1. \tag{5}$$

$A_i, A_{1i}, B_i, B_{1i}, E_i, E_{1i}, E_{vi}$为已知常数矩阵.

定义 1 假设$u(t)=0, v(t)=0$, 对所有容许不确定变量, 开环系统(Σ) 称为鲁棒随机稳定, 如果对于任意的$\varepsilon>0$, 存在$\delta(\varepsilon)>0$, 当$\sup\limits_{-\tau\leqslant t\leqslant 0}\mathrm{E}\{|\phi(t)|\}<\delta(\varepsilon)$时, 有

$$\mathrm{E}\{\|x(t)\|^2\}<\varepsilon.$$

如果对任意起始条件, 有

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\{\|x(t)\|^2\}=0,$$

则称随机时滞系统(Σ)鲁棒随机渐近稳定.

定义 2 当$u(t)=0$时, 给定标量$\gamma>0$, 开环系统(Σ) 称为鲁棒随机渐近稳定且具有H_∞性能界$\gamma>0$, 如果系统(Σ) 随机渐近稳定且对于零初始状态, 有不等式

$$||z(t)||_{E_2}<\gamma||v(t)||_2,$$

对所有容许不确定变量成立.

3 主要结果(Main results)

定理 1 考虑系统(Σ), 假设$v(t)=0$, 如果存在矩阵G,Y,P_i,Q_i ,Y_{ij}, 有$P_i>0$, $Q_i>0$, $Y_{ii}=Y_{ii}^{\mathrm T}$, $Y_{ij}=Y_{ji}^{\mathrm T}$, 对$j<i, i=1,2,\cdots,r$, 满足线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Omega & A_{1i}P_i & P_iE_i^{\mathrm T} & B_iY+G^{\mathrm T}-P_i\\ * & -(1-h)Q_i & P_iE_{1i}^{\mathrm T} & 0\\ * & * & -P_i & 0\\ * & * & * & G^{\mathrm T}+G \end{bmatrix}<Y_{ii}, \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & A_{1i}P_j & P_jE_i^{\mathrm T} & B_iY+G^{\mathrm T}-P_j\\ * & -(1-h)Q_i & P_jE_{1i}^{\mathrm T} & 0\\ * & * & -P_j & 0\\ * & * & * & G^{\mathrm T}+G \end{bmatrix}+ \begin{bmatrix} \Omega_2 & A_{1j}P_i & P_iE_j^{\mathrm T} & B_jY+G^{\mathrm T}-P_i\\ * & -(1-h)Q_j & P_iE_{1j}^{\mathrm T} & 0\\ * & * & -P_i & 0\\ * & * & * & G^{\mathrm T}+G \end{bmatrix}< Y_{ij}+Y_{ij}^{\mathrm T}, \tag{7}$$

$$[Y_{ij}]_{r\times r}<0. \tag{8}$$

其中:

$$\Omega = A_iP_i+P_iA_i^{\mathrm T}+B_iY+Y^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T}+Q_i,$$
$$\Omega_1 = A_iP_j+P_jA_i^{\mathrm T}+B_iY+Y^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T}+Q_i,$$
$$\Omega_2 = A_jP_i+P_iA_j^{\mathrm T}+B_jY+Y^{\mathrm T}B_j^{\mathrm T}+Q_j.$$

那么, 闭环系统鲁棒随机稳定. 且控制器可取为

$$u(t)=Fx(t), F=YG^{-1}. \tag{9}$$

证 令

$$\tilde P(\alpha)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_iP_i,\ \tilde Q(\alpha)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_iQ_i, \tag{10}$$

由不等式(6)~(9), 容易验证

$$\begin{bmatrix} \Omega(\alpha) & A_1(\alpha)\tilde P(\alpha) & \tilde P(\alpha)E(\alpha)^{\mathrm T} & B(\alpha)FG+G^{\mathrm T}-\tilde P(\alpha)\\ * & -(1-h)\tilde Q(\alpha) & \tilde P(\alpha)E_1(\alpha)^{\mathrm T} & 0\\ * & * & -\tilde P(\alpha) & 0\\ * & * & * & G+G^{\mathrm T} \end{bmatrix}<0, \tag{11}$$

其中

$$\Omega(\alpha)=A(\alpha)\tilde P(\alpha)+\tilde P(\alpha)A(\alpha)^{\mathrm T}+ B(\alpha)FG+G^{\mathrm T}F^{\mathrm T}B(\alpha)^{\mathrm T}+\tilde Q(\alpha).$$

取满秩矩阵

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -B(\alpha)F\\ 0 & I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix},$$

对不等式(11)做合同变换, 令$P(\alpha)=\tilde P(\alpha)^{-1}$, $Q(\alpha)=P(\alpha)\tilde Q(\alpha)P(\alpha)$, 由Schur补引理易得, 存在标量$a>0$, 有

$$\varPsi(\alpha)+\mathrm{diag}\{aI,0\}<0, \tag{12}$$

其中:

$$\varPsi(\alpha)=\begin{bmatrix} \dot\Omega(\alpha) & P(\alpha)A_1(\alpha)\\ * & -(1-h)Q(\alpha) \end{bmatrix}+ \begin{bmatrix} E(\alpha)^{\mathrm T}\\ E_1(\alpha)^{\mathrm T} \end{bmatrix}P(\alpha)\begin{bmatrix} E(\alpha)\ E_1(\alpha) \end{bmatrix}. \tag{13}$$

$$\dot\Omega(\alpha)=P(\alpha)[A(\alpha)+B(\alpha)F]+ [A(\alpha)+B(\alpha)F]^{\mathrm T}P(\alpha)+Q(\alpha).$$

定义Lyapunov函数

$$V(x(t),t)=x(t)^{\mathrm T}P(\alpha)x(t)+ \int_{t-\tau(t)}^{t}x(s)^{\mathrm T}Q(\alpha)x(s)\mathrm ds, \tag{14}$$

根据伊藤公式定义, 易得

$$\ell V(x(t),t) \leqslant \xi(t)^{\mathrm{T}}\Psi(\alpha)\xi(t) < -a|x(t)|^2. \quad (15)$$

其中$\Psi(\alpha)$如(13)中定义, 且

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t)) \end{bmatrix}.$$

根据定义1和文献[4], 闭环系统鲁棒随机渐近稳定.

定 理 2　如果存在矩阵G, Y, P_i, Q_i, Y_{ij}, 有$P_i > 0, Q_i > 0, Y_{ii} = Y_{ii}^{\mathrm{T}}, Y_{ij} = Y_{ji}^{\mathrm{T}}, j < i, i = 1, 2, \cdots, r$, 对给定常数$\gamma > 0$, 满足下面线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \Omega & * & * & * & * & * \\ P_iA_{1i}^{\mathrm{T}} & -(1-h)Q_i & * & * & * & * \\ B_{1i}^{\mathrm{T}} & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * \\ E_iP_i & E_{1i}P_i & E_{vi} & -P_i & * & * \\ CP_i & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ Y^{\mathrm{T}}B_{1i}^{\mathrm{T}}+G-P_i & 0 & 0 & 0 & 0 & G^{\mathrm{T}}+G \end{bmatrix} < Y_{ii}, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & * & * & * & * & * \\ P_jA_{1i}^{\mathrm{T}} & -(1-h)Q_i & * & * & * & * \\ B_{1i}^{\mathrm{T}} & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * \\ E_iP_j & E_{1i}P_j & E_{vi} & -P_j & * & * \\ CP_j & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ Y^{\mathrm{T}}B_{1i}^{\mathrm{T}}+G-P_j & 0 & 0 & 0 & 0 & G^{\mathrm{T}}+G \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_2 & * & * & * & * & * \\ P_iA_{1j}^{\mathrm{T}} & -(1-h)Q_j & * & * & * & * \\ B_{1j}^{\mathrm{T}} & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * \\ E_jP_i & E_{1j}P_i & E_{vj} & -P_i & * & * \\ CP_i & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ Y^{\mathrm{T}}B_{1j}^{\mathrm{T}}+G-P_i & 0 & 0 & 0 & 0 & G^{\mathrm{T}}+G \end{bmatrix} < Y_{ij} + Y_{ij}^{\mathrm{T}}, \quad (17)$$

$$[Y_{ij}]_{r\times r} < 0, \quad (18)$$

则系统(Σ)对应闭环系统鲁棒随机渐近稳定且满足H$_\infty$性能界γ. 且控制器可取为

$$u(t) = Fx(t), F = YG^{-1}. \quad (19)$$

证　定义Lyapunov函数如定理1, 取

$$J(t) = \mathrm{E}\{\int_0^t [z(s)^{\mathrm{T}}z(s) - \gamma^2 v(s)^{\mathrm{T}}v(s)] + \ell V(x(s),s)\}\mathrm{d}s - \mathrm{E}\{V(x(t),t\}.$$

类似于定理1证明, 易证明闭环系统鲁棒随机渐近稳定, 且对非零$v(t) \in L_2[0,\infty]$, 有

$$J(t) < 0,$$

故闭环系统鲁棒随机渐近稳定且具有H$_\infty$性能界γ.

4　仿真算例(Simulation)

考虑系统(Σ), 其中:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 1 & -30 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ B_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}, E_{v1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$E_{v2} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\gamma = 10, h = 0, .02, \alpha_1 = \alpha_2 = 0.5.$$

利用MATLAB LMI工具包解线性矩阵不等式组(17)~(19), 得

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0115 & -0.0074 \\ -0.0074 & 0.0207 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.0125 & -0.0074 \\ -0.0074 & 0.0252 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.0310 & 0.0125 \\ 0.0125 & 0.4265 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0.1306 & 0.0331 \\ 0.0331 & 0.2119 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -2.0891 & -2.8709 \\ -1.0287 & -1.1862 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} -3.2616 & -4.3184 \\ -4.4271 & -6.1923 \end{bmatrix}.$$

从而, 状态反馈控制器取为

$$u(t) = Fx(t) = YG^{-1}x(t) = \begin{bmatrix} 0.2101 & 0.3171 \\ 1.0369 & -0.5315 \end{bmatrix} x(t).$$

5 结论(Conclusion)

本文讨论了随机不确定时滞系统的鲁棒随机镇定和鲁棒H_∞性能分析以及状态反馈控制器的设计问题. 通过引入依赖于参数的Lyapunov函数, 利用线性矩阵不等式方法给出了问题解的充分条件. 最后, 仿真例子验证了方法的有效性.

参考文献(References):

[1] GE J H, FRANK P M, LIN C F. Robust H_∞ state feedback control for linear systems with state delay and parameter uncertainty[J]. *Automatica*, 1996, 32(8): 1183 – 1185.

[2] ZHOU S, LI T. Robust stabilization for delayed discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov-Krasovskii function[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 151(1): 139 – 153.

[3] ZHOU S, FENG G, FENG C. Robust control for a class of uncertain nonlinear systems: adaptive fuzzy approach based on backstepping[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 151(1): 1 – 20.

[4] KOLMANOVSKII V B, MYSHKIS A D. *Applied Theory of Functional Differential Equations*[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.

[5] CHEN W, GUAN Z, LU X. Delay-dependent exponential stability of uncertain stochastic systems with multiple delays: an LMI approach[J]. *System & Control Letters*, 2005, 54(6): 547 – 555.

[6] CHEN W, GUAN Z, LU X. Delay-dependent stabilization and H_∞ control of uncertain stochastic systems with time-varying delays[J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2004, 21(3): 345 – 358.

[7] XU S, CHEN T. Robust H_∞ control for uncertain stochastic systems with state delay[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(12): 2089 – 2094.

作者简介:

夏建伟 (1978—), 男, 讲师, 目前研究方向为鲁棒控制、随机系统等, E-mail: njustxjw@yahoo.com.cn;

徐胜元 (1968—), 男, 博士生导师, 主要研究方向为鲁棒控制、奇异系统等, E-mail: syxu02@yahoo.com.cn;

邹 云 (1962—), 男, 博士生导师, 主要研究方向为非线性系统、奇异系统等, E-mail: zouyun@vip.163.com.