文章编号: 1000−8152(2008)06−1113−04

线性离散时滞重复过程的H_∞控制

徐建明[1], 俞 立[1], 熊远生[1, 2]

(1. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310014; 2. 嘉兴学院 机电工程学院, 浙江 嘉兴 314001)

摘要: 首先给出了线性离散时滞重复过程的2D(两维)Roesser模型, 采用线性矩阵不等式方法导出了过程稳定并具有H_∞扰动抑制度的一个充分条件. 通过求一个线性矩阵不等式的可行解来构造系统的一个状态反馈H_∞控制器. 进一步, 通过求解一个线性矩阵不等式凸优化问题得到该过程的最优状态反馈H_∞控制器.

关键词: 重复过程; 时滞; 稳定性; H_∞ 控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

H-infinity control for discrete linear repetitive processes with time-delay

XU Jian-ming[1], YU Li[1], XIONG Yuan-sheng[1, 2]

(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310014, China;
2. College of Mechanical & Electrical Engineering, Jiaxing University, Jiaxing Zhejiang 314001, China)

Abstract: The discrete linear repetitive process with time-delay is described by a 2-D state-space Roesser model. A sufficient condition is derived for this process to be stable and to have an H-infinity disturbance attenuation via the linear matrix inequality(LMI) approach. A state feedback H-infinity controller is then developed by solving a certain LMI. Furthermore, the optimal state-feedback H-infinity controller is obtained by solving a convex optimization problem with LMI constraints.

Key words: repetitive processes; time-delay; stability; H-infinity control; LMI

1 引言(Introduction)

线性离散重复过程是一类特殊的两维系统. 该过程的主要特点是具有一系列重复性操作, 这种操作在一个固定的有限时间内动态进行, 并且每一次操作的输出结果又作用于下一次操作, 对下一次操作的输出结果产生影响. 重复过程不仅有现实例子(如长壁法采煤和金属轧制操作过程)[1]; 而且重复过程的控制理论已经成为迭代学习控制算法收敛性分析和综合的一个重要基础[2]. 由于线性离散重复过程具有两维系统结构, 过程中的信息既在一次操作中沿时间方向传播又在前后操作之间传播, 需要兼顾整个系统在时间方向和操作方向的性能(如稳定性), 因而不能直接利用标准系统(或一维系统)理论来解决线性离散重复过程的控制问题. 另外, 重复过程每一次操作在有限时间内动态进行的特点又有别于一般的两维离散线性系统, 借鉴现有的以Roesser状态空间模型为基础的两维离散线性系统理论[3,4], 也需要进行一些适当的修改. 为此, Rogers等提出了线性重复过程的稳定性理论[5], 并给出了类似于一维系统的稳定性判别方法.

近年来, 基于线性矩阵不等式方法的线性离散重复过程的稳定性分析和控制器设计出现了一些有益的成果, Galkowski等给出了线性离散重复过程稳定性分析和控制器设计方法[6,7], Paszke等给出了线性离散重复过程控制器设计方法[8], Sulikowski等给出了线性离散重复过程的输出反馈控制器设计方法[9]. 在各类工业过程中, 时滞现象是极其普遍的, 如长管道进料过程、信息传输过程等均存在时滞现象. 此外, 对许多大时间常数的系统, 在建模中也常用适当的小时间常数加纯滞后环节来近似. 在重复过程中也存在原料和信息传输引起的时滞现象, 以及系统建模时引入的滞后环节. 本文基于Roesser模型对具有状态时滞的线性离散重复过程进行H_∞性能分析, 采用线性矩阵不等式方法给出了该重复过程渐近稳定并具有一定H_∞性能的条件, 在此基础上, 导出γ−次优状态反馈H_∞控制器设计方法. 利用线性矩阵不等式凸优化技术得到该过程的最优状态反馈H_∞控制器.

2 问题描述(Problem statement)

考虑由下述状态空间模型描述的线性离散时滞

收稿日期: 2007−03−20; 收修改稿日期: 2008−01−18.
基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(60525304).

重复过程:

$$\begin{cases} x_{k+1}(p+1)= \\ Ax_{k+1}(p)+A_1x_{k+1}(p-h)+ \\ Bu_{k+1}(p)+B_0y_k(p)+B_1w_{k+1}(p), \\ y_{k+1}(p)=Cx_{k+1}(p)+Du_{k+1}(p)+ \\ \qquad D_0y_k(p)+D_1w_{k+1}(p). \end{cases} \tag{1}$$

其中: $k(k\geqslant 0)$ 表示第k次操作, $p(0\leqslant p\leqslant\alpha)$表示离散时刻, $x_k(p)\in\mathbb{R}^n$表示系统状态向量, $y_k(p)\in\mathbb{R}^m$表示系统输出向量, $u_k(p)\in\mathbb{R}^s$表示控制输入向量, $w_k(p)\in\mathbb{R}^r$是有限能量的外部扰动, 即$w_k(p)\in l_2\{[0,\infty],[0,\alpha]\}$, h是一个正整数, 表示系统状态的滞后常数, A, A_1, B, B_0, B_1, C, D, D_0和D_1是适当维数的常数矩阵. 系统状态的初始条件定义如下:

$$\begin{aligned} X(0)=[&x_1(-h),x_2(-h),x_3(-h),\cdots, \\ &x_1(-h+1),x_2(-h+1),x_3(-h+1),\cdots, \\ &x_1(0),x_2(0),x_3(0),\cdots]. \end{aligned} \tag{2}$$

不失一般性, 假设存在正整数M, 使得初始状态

$$x_{k+1}(q)=0,\ \forall k>M,\ q=-h,-h+1,\cdots,0. \tag{3}$$

引入变量代换

$$\begin{cases} l=k+1, \\ y_k(p)=v_{k+1}(p)=v_l(k), \end{cases} \tag{4}$$

则状态空间模型(1)可以写成Roesser模型形式:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_l(p+1) \\ v_{l+1}(p) \end{bmatrix}= \\ \begin{bmatrix} A & B_0 \\ C & D_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_l(p) \\ v_l(p) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}u_l(p)+ \\ \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_l(p-h) \\ v_l(p-h) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_1 \\ D_1 \end{bmatrix}w_l(p), \\ z_l(p)=\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_l(p) \\ v_l(p) \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{5}$$

其中I 表示相应维数的单位矩阵.

定义 1 对于$u_l(p)=0$的线性离散时滞重复过程(5), 给定的正常数γ和正定对称矩阵$R_1\in\mathbb{R}^n$, $R_2\in\mathbb{R}^m$ 和$W\in\mathbb{R}^n$, 如果满足下列条件:

1) 系统是渐近稳定的;

2)

$$J=\sup_{0\neq w\in L_2}\frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2+S_x+S_v}<\gamma^2, \tag{6}$$

其中:

$$\|z\|_2=\sqrt{\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\alpha}z_l^{\mathrm T}(p)z_l(p)},$$

$$\|w\|_2=\sqrt{\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\alpha}w_l^{\mathrm T}(p)w_l(p)},$$

$$S_x=\sum_{l=1}^{\infty}[x_l^{\mathrm T}(0)R_1x_l(0)+\sum_{i=1}^{h}x_l^{\mathrm T}(-i)Wx_l(-i)],$$

$$S_v=\sum_{p=0}^{\alpha}v_1^{\mathrm T}(p)R_2v_1(p).$$

则称$u_l(p)=0$时系统(5)具有$\mathrm H_\infty$性能.

在零初始条件$X(0)=0$和$y_0(p)=v_1(p)=0$的情况下, $\mathrm H_\infty$性能(6)可写成

$$J_0=\sup_{0\neq w\in l_2}\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}<\gamma. \tag{7}$$

由2D Parseval's 定理[10], 上式等价于外部扰动$w_l(p)$到输出$z_l(p)$ 的传递函数矩阵的$\mathrm H_\infty$范数小于γ.

3 H_∞性能分析(Analysis of H-infinity performance)

以下定理给出了$u_l(p)=0$时系统(5)具有给定$\mathrm H_\infty$性能的条件.

定理 1 对于$u_l(p)=0$时的系统(5)和给定的常数γ, 如果存在对称正定矩阵$P_1\in\mathbb{R}^n$, $P_2\in\mathbb{R}^m$和$Q\in\mathbb{R}^n$满足$P_1\leqslant\gamma^2R_1$, $P_2\leqslant\gamma^2R_2$, $Q\leqslant\gamma^2W$, 使得

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm T} \\ A_1^{\mathrm T} \\ B_0^{\mathrm T} \\ B_1^{\mathrm T} \end{bmatrix}P_1\begin{bmatrix} A^{\mathrm T} \\ A_1^{\mathrm T} \\ B_0^{\mathrm T} \\ B_1^{\mathrm T} \end{bmatrix}^{\mathrm T}+\begin{bmatrix} C^{\mathrm T} \\ 0 \\ D_0^{\mathrm T} \\ D_1^{\mathrm T} \end{bmatrix}(I+P_2)\begin{bmatrix} C^{\mathrm T} \\ 0 \\ D_0^{\mathrm T} \\ D_1^{\mathrm T} \end{bmatrix}^{\mathrm T}+ \begin{bmatrix} -P_1+Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2I \end{bmatrix}<0, \tag{8}$$

则$u_l(p)=0$时系统(5)具有$\mathrm H_\infty$性能γ .

证 若存在对称正定矩阵$P_1\in\mathbb{R}^n$, $P_2\in\mathbb{R}^m$和$Q\in\mathbb{R}^n$满足矩阵不等式(8), 定义

$$\bar x(l,p)=\begin{bmatrix} x_l(p) \\ v_l(p) \end{bmatrix},\ \bar x(l+1,p+1)=\begin{bmatrix} x_l(p+1) \\ v_{l+1}(p) \end{bmatrix}$$

和1个Lyapunov泛函

$$V(\bar x(l,p))=V_x(x_l(p))+V_v(v_l(p)), \tag{9}$$

其中:

$$V_x(x_l(p))=x_l^{\mathrm T}(p)P_1x_l(p)+\sum_{i=1}^{h}x_l^{\mathrm T}(p-i)Qx_l(p-i),$$

$$V_v(v_l(p))=v_l^{\mathrm T}(p)P_2v_l(p),$$

则$V(\bar{x}(l,p))$是正定的, 且当$w_l(p)=0$时, 沿系统(5)的轨线, Lyapunov泛函的前向差分

$$\Delta V(\bar{x}(l,p))=V(\bar{x}(l+1,p+1))-V(\bar{x}(l,p))=\begin{bmatrix}x_l(p)\\x_l(p-h)\\v_l(p)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\left(\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}\\A_1^{\mathrm{T}}\\B_0^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}P_1\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}\\A_1^{\mathrm{T}}\\B_0^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}C^{\mathrm{T}}\\0\\D_0^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}P_2\cdot\begin{bmatrix}C^{\mathrm{T}}\\0\\D_0^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}-P_1+Q&0&0\\0&-Q&0\\0&0&-P_2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_l(p)\\x_l(p-h)\\v_l(p)\end{bmatrix},$$

因此, 对于所有的$x_l(p)\neq 0, x_l(p-h)\neq 0$和$v_l(p)\neq 0$, 由线性矩阵不等式(8)可得

$$V_x(x_l(p+1))+V_v(v_{l+1}(p))<V_x(x_l(p))+V_v(v_l(p)).\tag{10}$$

定义一个集合

$$D(r):=\{(l,p):l+p=r,l\geqslant 1,\alpha\geqslant p\geqslant 0\}.$$

对于任意整数$r>\max\{M,\alpha\}$, 由不等式(10)和初始条件(3), 可得

$$\sum_{(l,p)\in D(r)}V(\bar{x}(l,p))\geqslant\sum_{(l,p)\in D(r+1)}V(\bar{x}(l,p)).\tag{11}$$

其中当且仅当$\sum\limits_{(l,p)\in D(r)}V(\bar{x}(l,p))=0$时上面不等式取等号. 这也就表明$(l,p)\in D(r)$的所有状态$\bar{x}_l(p)$(除所有的$\bar{x}_l(p)=0$外)的Lyapunov泛函之和大于$(l,p)\in D(r+1)$的所有状态$\bar{x}_l(p)$的Lyapunov泛函之和.

由式(11)可得

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{(l,p)\in D(r)}V(\bar{x}(l,p))=0.\tag{12}$$

进而可推出

$$\lim_{l+p\to\infty}V(\bar{x}(l,p))=0,\ \lim_{l+p\to\infty}\|\bar{x}(l,p)\|=0,\tag{13}$$

因此, 当$u_l(p)=0$时系统(5)是渐近稳定的.

另外, 对任意非零的$w_l(p)\in l_2\{[1,\infty],[0,\alpha]\}$, 由线性矩阵不等式(8)可推出

$$\begin{cases}\Delta V(\bar{x}(l,p))+z_l^{\mathrm{T}}(p)z_l(p)-\gamma^2 w_l^{\mathrm{T}}(p)w_l(p)<0,\\ \forall\, l\geqslant 1,\forall\, p\geqslant 0.\end{cases}\tag{14}$$

对于整数n_1,n_2(其中: $n_1\geqslant 1,\alpha\geqslant n_2\geqslant 0$), 由式(14)可得

$$\sum_{l=1}^{n_1}\sum_{p=0}^{n_2}z_l^{\mathrm{T}}(p)z_l(p)-\gamma^2\sum_{l=1}^{n_1}\sum_{p=0}^{n_2}w_l^{\mathrm{T}}(p)w_l(p)<-\sum_{l=1}^{n_1}[V_x(x_l(n_2+1))-V_x(x_l(0))]-\sum_{p=0}^{n_2}[V_v(v_{n_1+1}(p))-V_v(v_l(p))].\tag{15}$$

另外, 利用不等式(10), 可得

$$\sum_{p=0}^{n_2}V_v(v_{n_1+1}(p))\leqslant\sum_{(l,p)\in D(n_1)}[V_x(x_l(p))+V_v(v_l(p))]-\sum_{l=1}^{n_1}V_x(x_l(n_2+1))+\sum_{p=n_1}^{n_2}V_v(v_1(p)).\tag{16}$$

当$n_1>\alpha$时, 式(16)中$\sum\limits_{p=n_1}^{n_2}V_v(v_1(p))=0$.

因此, 当$n_1\to\infty$和$n_2=\alpha$时, 由式(12)(15)(16), 以及$P_1\leqslant\gamma^2R_1, P_2\leqslant\gamma^2R_2, Q\leqslant\gamma^2W$, 可推出

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\alpha}z_l^{\mathrm{T}}(p)z_l(p)<\gamma^2\{\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\alpha}w_l^{\mathrm{T}}(p)w_l(p)+\sum_{l=1}^{\infty}[x_l^{\mathrm{T}}(0)R_1x_l(0)+\sum_{i=1}^{h}x_l^{\mathrm{T}}(-i)Wx_l(-i)]+\sum_{p=0}^{\alpha}v_l^{\mathrm{T}}(p)R_2v_1(p)\}.\tag{17}$$

因此由定义1可知系统(5)具有H_∞性能.　　证毕.

在零初始条件($X(0)=0$和$v_1(p)=0$)的情况下, 定理1中的约束条件$P_1\leqslant\gamma^2R_1$, $P_2\leqslant\gamma^2R_2$和$Q\leqslant\gamma^2W$不再需要.

4　H_∞控制器设计(Design of H-infinity controllers)

针对Roesser模型描述的线性离散时滞重复过程(5)和给定的正常数γ, 本节的目的是确定下面形式的状态反馈控制器

$$u_l(p)=\begin{bmatrix}K_1&K_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_l(p)\\v_l(p)\end{bmatrix}.\tag{18}$$

其中: $K_1\in\mathbb{R}^{s\times n}$, $K_2\in\mathbb{R}^{s\times m}$, 使得相应的闭环系统

$$\begin{bmatrix}x_l(p+1)\\v_{l+1}(p)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A+BK_1&B_0+BK_2\\C+DK_1&D_0+DK_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_l(p)\\v_l(p)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_l(p-h)\\v_l(p-h)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\D_1\end{bmatrix}w_l(p),$$
$$z_l(p)=\begin{bmatrix}0&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_l(p)\\v_l(p)\end{bmatrix}.\tag{19}$$

稳定且外部扰动$w_l(p)$到输出$z_l(p)$的传递函数矩阵的H_∞范数小于γ. 此时, 控制器(18)称为系统(5)的1个γ–次优状态反馈H_∞控制器.

定理 2　对于系统(5)和给定的常数γ, 如果存在对称正定矩阵W_1, W_2和S与矩阵N_1和N_2, 使得

$$\begin{bmatrix} -W_1+S & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -S & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -W_2 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 & * & * & * \\ AW_1+BN_1 & A_1W_1 & B_0W_2+BN_2 & B_1 & -W_1 & * & * \\ CW_1+DN_1 & 0 & D_0W_2+DN_2 & D_1 & 0 & -W_2 & * \\ CW_1+DN_1 & 0 & D_0W_2+DN_2 & D_1 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{20}$$

其中: “*”表示由矩阵对称性得到的矩阵块. 则系统(5)存在γ-次优状态反馈H_∞控制器

$$u_l(p) = \begin{bmatrix} N_1W_1^{-1} \; N_2W_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_l(p) \\ v_l(p) \end{bmatrix}. \tag{21}$$

证 略.

另外, 可以通过求解以下的凸优化问题

$$\min_{W_1,W_2,S,N_1,N_2} \gamma \quad \text{s.t. 式(20)} \tag{22}$$

求取使得闭环系统的扰动抑制度γ最小化的状态反馈H_∞控制器. 这个控制器称为线性离散时滞重复过程(5)的最优状态反馈H_∞控制器.

5 结论(Conclusions)

本文研究了线性离散时滞重复过程的H_∞控制问题. 采用线性矩阵不等式处理方法, 分析了线性离散时滞重复过程的H_∞性能, 导出了系统稳定并具有H_∞扰动抑制度的条件, 给出了状态反馈H_∞控制器的一个参数化表示. 利用线性矩阵不等式凸优化技术, 提出了最优状态反馈H_∞控制器的设计方法. 该方法可进一步推广应用于解决具有范数有界参数不确定性的线性离散时滞重复过程H_∞控制问题.

参考文献(References):

[1] EDWARDS J B. Stability problems in the control of multipass processes[J]. *Proceedings Institute of Electrical Engineers*, 1974, 121(11): 1425 – 1431.

[2] OWENS D H, AMANN N, ROGERS E, et al. Analysis of linear iterative learning control schemes-a 2D systems/repetitive processes approach[J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2000, 11(1/2): 125 – 177.

[3] DU C, XIE L. H_∞ *Control and Filtering of Two-Dimensional Systems*[M]. Berlin: Springer, 2002.

[4] 杨成梧, 邹云. 2-D线性离散系统[M], 北京: 国防工业出版社, 1995.
(YANG Chengwu, ZOU Yun. 2-*D Linear Discrete Sytems*[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1995.)

[5] ROGERS E, OWENS D H. *Stability Analysis for Linear Repetitive Processes*[M]. Berlin: Springer, 1992.

[6] GALKOWSKI K, ROGERS E, XU S, et al. LMIs-a fundamental tool in analysis and controller design for discrete linear repetitive processes[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, 49(6): 768 – 778.

[7] GALKOWSKI K, LAM J, ROGERS E, et al. LMI based stability analysis and robust controller design for discrete linear repetitive processes[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, 13(13): 1195 – 1211.

[8] PASZKE W, GALKOWSKI K, ROGERS E, et al. H_∞ control of discrete linear repetitive processes[C]//*Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE Press, 2003: 628 – 633.

[9] SULIKOWSKI B, GALKOWSKI K, ROGERS E, et al. Output feedback control of discrete linear repetitive processes[J]. *Automatica*, 2004, 40(12): 2167 – 2173.

[10] LU W S, ANTONIOU A. *Two-Dimensional Digital Filters*[M]. New York: Marcel Dekker, 1992.

作者简介:

徐建明 (1970—), 男, 博士，副教授, 目前研究方向为两维系统的鲁棒控制、迭代学习控制和伺服控制, E-mail: xujm@zjut.edu.cn;

俞 立 (1961—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为鲁棒控制、网络控制系统, E-mail: lyu@zjut.edu.cn;

熊远生 (1979—), 男, 博士研究生, 讲师, 目前研究方向为变结构控制、运动控制和电力电子控制技术, E-mail: xiongyuansheng@163.com.