文章编号: 1000−8152(2008)06−1139−03

Delta算子系统具有极点约束的鲁棒非脆弱方差控制

肖民卿[1,2], 陈金玉[1], 曹长修[1]

(1. 重庆大学 自动化学院, 重庆 400030; 2. 福建师范大学 数学与计算机科学学院, 福建 福州 350007)

摘要: 研究Delta算子描述的线性不确定系统具有圆形区域极点约束的鲁棒非脆弱方差控制问题. 针对系统参数范数有界不确定性和控制器的乘性增益不确定性, 运用线性矩阵不等式(LMI)方法, 提出具有圆形区域极点约束的状态反馈鲁棒非脆弱方差控制器存在的条件和设计方法. 数值算例表明设计方法的可行性.

关键词: 鲁棒方差控制; Delta算子系统; 非脆弱控制; 控制器增益不确定性

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Robust non-fragile variance control for Delta-operator systems with disk-pole constraints

XIAO Min-qing[1,2], CHEN Jin-yu[1], CAO Chang-xiu[1]

(1. College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400030, China;
2. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian 350007, China)

Abstract: The robust non-fragile variance control for the Delta-operator-formulated linear uncertain systems with disk-pole constraints is studied. The aim is to design a robust non-fragile state feedback controller which satisfies the disk-pole and variance constraints. With the norm-bounded parameter uncertainty in the system and the multiplicative gain uncertainty in the controller, we derive a sufficient condition for the existence of such controllers via the linear matrix inequality (LMI) approach, and present a design procedure of these controllers. A numerical example is provided to illustrate the design method.

Key words: robust variance control; Delta operator system; non-fragile control; controller gain variation

1 引言(Introduction)

近年来, 关于Delta算子系统[1]鲁棒控制的研究较为活跃, 出现了许多成果. 如, 张端金[2]等研究了具有区域极点与方差约束的鲁棒滤波问题, 邵锡军[3]等研究了鲁棒滤波器设计问题, 刘满[4]等研究了D稳定鲁棒容错控制器设计问题, 刘晓华[5] 等研究了具有凸多面体参数不确定性的Delta算子时滞系统的保性能滤波问题等等.

众所周知, 对于参数不确定系统, 可以通过使其闭环系统稳态状态方差不超过给定的上界来保证控制系统具有期望的稳态性能[6,7], 而系统暂态性能则可以由闭环极点的位置决定, 因此, 包含区域极点约束的鲁棒方差控制问题研究具有较为实际的应用价值. 另一方面, 对于反馈控制系统来说, 控制器参数的微小扰动都可能导致系统失去稳定性, 而由于控制器老化或是其他因素造成的控制器参数变化往往是不可避免的, 因此, 有必要研究当控制器存在增益参数扰动时, 仍能保证控制目标要求的控制器设计问题, 即非脆弱控制问题[8,9].

本文考虑Delta算子描述的范数有界参数不确定系统, 针对乘性控制增益不确定性, 研究具有圆形区域极点约束的鲁棒非脆弱方差控制问题, 利用线性矩阵不等式(LMI) 给出状态反馈控制器存在的条件和设计方法.

2 问题描述(Problem description)

设Delta算子描述参数不确定离散系统为

$$\delta x(k) = (A + \Delta A)x(k) + (B + \Delta B)u(k) + Dw(k). \tag{1}$$

其中: 采样周期为T, $x(k) \in \mathbb{R}^n$为系统状态向量, $u(k) \in \mathbb{R}^m$为控制输入, $w(k) \in \mathbb{R}^p$为具有单位协方差矩阵的零均值白噪声过程, 且与初始状态$x(0)$不相关; A, B, D为适维常数矩阵, $\Delta A, \Delta B$为系统不确定性, 具有如下形式:

$$\Delta A = D_1F_1E_1, \Delta B = D_2F_2E_2. \tag{2}$$

式中: D_1, E_1, D_2, E_2为适维常数矩阵; F_1, F_2分别为满足$F_1^{\mathrm{T}}F_1 \leqslant I, F_2^{\mathrm{T}}F_2 \leqslant I$的不确定参数矩阵, 其

收稿日期: 2007−04−27; 收修改稿日期: 2007−12−25.
基金项目: 福建省教育厅科技基金资助项目(JA04169).

中I为适维单位矩阵.

假定系统状态可量测, 则采用状态反馈控制器

$$u(k)=\bar{K}x(k)=(K+\Delta K)x(k), \tag{3}$$

得到的闭环系统为

$$\delta x(k)=\bar{A}x(k)+Dw(k). \tag{4}$$

其中$\bar{A}=A+\Delta A+(B+\Delta B)\bar{K}$. 控制器(3)中, $K\in\mathbb{R}^{m\times n}$为名义控制增益, ΔK为乘性控制增益不确定性, $\Delta K=MLNK$, 其中M,N为适维常数矩阵, L为不确定参数矩阵, 满足$L^{\mathrm{T}}L\leqslant I$.

记$D(a,r)$为复平面上以$a+\mathrm{j}0$为圆心, r为半径的圆形区域; $\lambda(A)$为矩阵A的全部特征值的集合.

根据Delta算子系统稳定性判据[3]和矩阵特征值性质可知, 闭环系统(4)渐近稳定当且仅当$\lambda(\bar{A})\subset D(-1/T,1/T)$, 当且仅当$\lambda(I+T\bar{A})\subset D(0,1)$. 将闭环系统(4)写成前向移位算子描述的通常离散系统形式, 得到$x(k+1)=(I+T\bar{A})x(k)+TDw(k)$, 于是根据离散时间系统协方差控制理论, 若系统(4)是渐近稳定的, 则其稳态状态协方差矩阵$X=\lim\limits_{k\to\infty}\{\mathrm{E}x(k)x^{\mathrm{T}}(k)\}$存在, 且满足矩阵方程

$$(I+T\bar{A})X(I+T\bar{A})^{\mathrm{T}}-X+T^2DD^{\mathrm{T}}=0. \tag{5}$$

本文要讨论的问题是: 对Delta算子不确定离散系统(1), 给定正常数$\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$和包含于Delta算子系统稳定域$D(-1/T,1/T)$的圆形区域$\mathrm{D}(a,r)$, 设计状态反馈控制器(3), 即寻找名义增益矩阵K, 使得对任意允许的控制器增益不确定性ΔK和系统不确定性$(\Delta A,\Delta B)$, 闭环系统(4)满足:

a) 所有极点落在圆形区域$D(a,r)$中, 即$\lambda(\bar{A})\subset D(a,r)$;

b) 稳态状态协方差矩阵X满足$[X]_{ii}<\sigma_i^2, i=1,2,\cdots,n$, 其中$[X]_{ii}$表示矩阵$X$的第$i$个对角元素, 即第$i$个状态分量的稳态方差.

注 1 在式(5)中, 令$T=1$, $\bar{A}=I+T\bar{A}$, 则本文研究的问题转化为通常离散时间系统(对应于前向移位算子)具有圆形区域极点约束的鲁棒非脆弱方差控制问题; 令$X=\dfrac{1}{T}X$, 则式(5)化为$\bar{A}X+X\bar{A}^{\mathrm{T}}+T\bar{A}X\bar{A}^{\mathrm{T}}+DD^{\mathrm{T}}=0$, 再令$T=0$, 得$\bar{A}X+X\bar{A}^{\mathrm{T}}+DD^{\mathrm{T}}=0$, 则本文研究的问题转化为连续时间系统的相应问题. 因此, 离散系统和连续系统具有圆形区域极点约束的鲁棒非脆弱方差控制问题可以统一到Delta算子框架中进行研究.

3 主要结果(Main results)

限于篇幅, 不加证明地给出本文的主要结论.

定理 1 对Delta算子闭环系统(4)和给定的圆形区域$D(a,r)$, 如果存在对称正定矩阵P, 使得对所有允许的系统不确定性和控制器不确定性, 有

$$\begin{bmatrix} -P & P\bar{A}^{\mathrm{T}}-aP \\ \bar{A}P-aP & -r^2P+DD^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}<0 \tag{6}$$

成立, 则$\lambda(\bar{A})\subset D(a,r)$, 系统(4)的稳态状态协方差矩阵$X$存在, 且满足$X<P$.

定理 2 给定正常数$\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$和圆形区域$\mathrm{D}(a,r)$, 如果存在对称正定矩阵P, 矩阵Y和正数$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$, 使得以下两式成立:

$$\begin{bmatrix} \varPhi & \varPsi & 0 & \varXi_1 & 0 \\ * & -P & PE_1^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & \varXi_2 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix}<0, \tag{7}$$

$$[P]_{ii}\leqslant\sigma_i^2,\ i=1,2,\cdots,n. \tag{8}$$

其中:

$$\varPhi=\varepsilon_1D_1D_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2D_2D_2^{\mathrm{T}}+\varepsilon_3BMM^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}-r^2P+DD^{\mathrm{T}},$$

$$\varPsi=AP-aP+BY,$$

$$\varXi_1=\varepsilon_3BMM^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}},$$

$$\varXi_2=\varepsilon_3E_2MM^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}}-\varepsilon_2I,$$

$*$表示由矩阵对称性得到的块, 则对于Delta算子系统(1), 存在鲁棒非脆弱状态反馈控制器(3), 使闭环系统满足a)和b), 且名义控制增益矩阵为$K=YP^{-1}$.

根据定理2可以得到Delta算子不确定系统鲁棒非脆弱方差控制律的设计方法, 式(7)、式(8)与约束条件$P>0,\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0,\varepsilon_3>0$共同构成关于变量$P,Y,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$的一个线性矩阵不等式系统, 可以利用MATLAB的LMI工具箱提供的求解器进行求解, 若可行解存在, 则Delta算子系统(1)具有极点约束的鲁棒非脆弱方差控制器存在, 且可求得名义控制律$K=YP^{-1}$.

4 数值算例(Numeral example)

通过一个简单算例说明设计方法的有效性. 考虑Delta算子不确定系统(1)和含乘性增益不确定性的状态反馈控制器(4), 其中:

$$A=\begin{bmatrix} -2.5 & 1 & -1.5 \\ 2.4 & -2 & 1 \\ -2 & 1.5 & 3.7 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} -1 & 0.8 \\ 2.35 & 1 \\ 1.1 & -0.7 \end{bmatrix},$$

$$D_1=\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ -0.3 \end{bmatrix},\ D_2=\begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.15 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$E_1=\begin{bmatrix} 0.7 & -0.2 & 0.3 \end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix} -0.4 & 0.55 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix},\ N = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 \end{bmatrix},$$

采样周期$T = 0.1$. 系统(1)的稳定域为D$(-10, 10)$, 现要求设计鲁棒非脆弱方差控制器, 使得闭环系统所有极点均位于中心在点$-6 + \mathrm{j}0$, 半径为3的圆形区域$D(-6, 3)$中, 且其稳态状态协方差矩阵X满足$[X]_{11} \leqslant 0.5, [X]_{22} \leqslant 1.1, [X]_{33} \leqslant 1$. 根据上节提出的设计方法, 应用MATLAB的LMI工具箱算得相应线性矩阵不等式系统存在可行解:

$$P = \begin{bmatrix} 0.4420 & -0.3529 & 0.3529 \\ -0.3529 & 0.9519 & -0.2337 \\ 0.1133 & -0.2337 & 0.1049 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.0828 & -0.6028 & -0.0960 \\ -0.5622 & -1.0224 & 0.2793 \end{bmatrix},$$

由此算出名义控制增益矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} -0.0131 & -1.8964 & -5.1253 \\ -3.2309 & -1.6811 & 2.4064 \end{bmatrix}.$$

对于不确定参数矩阵F_1, F_2和L的所有允许值, 闭环系统极点均落在圆形区域D$(-6, 3)$中, 如图1所示. 由P的主对角线元素值可知, 闭环系统稳态状态协方差矩阵X满足$[X]_{11} \leqslant 0.5, [X]_{22} \leqslant 1.1, [X]_{33} \leqslant 1$.

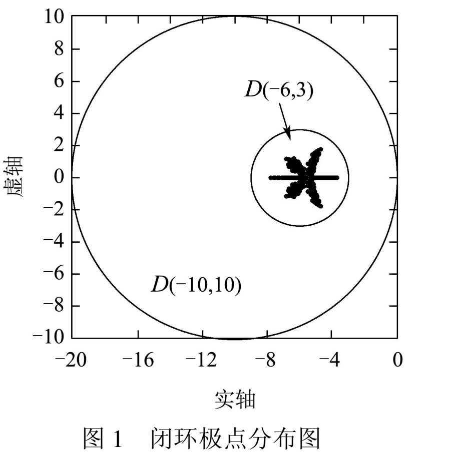

图 1　闭环极点分布图

Fig. 1　Pole distribution of the closed-loop system

5　结束语(Conclusions)

本文研究了Delta算子不确定系统具有圆形区域极点约束的鲁棒非脆弱方差控制问题. 针对状态反馈控制器含有乘性增益不确定性的情形, 给出使Delta算子闭环系统满足极点约束和方差约束的控制器设计方法, 将问题归结为一个线性矩阵不等式系统的求解问题, 进而可以利用成熟的凸优化技术, 如MATLAB的LMI工具箱加以解决. 数值算例表明了控制器设计方法的可行性和有效性. 本文的结果将连续系统和离散系统鲁棒非脆弱方差控制的有关结论统一到Delta算子框架. 此外, 本文的方法和结论可以方便地推广到状态反馈控制器含加性增益不确定性的情形.

参考文献(References):

[1] MIDDLETON R H, GOODWIN G C. Improved finite word length characteristics in digital control using Delta operator[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, 31(11): 1015 – 1021.

[2] 张端金, 吴捷. 具有区域极点和方差约束的Delta算子系统鲁棒滤波[J]. 控制与决策, 2004, 19(1): 12 – 16.
(ZHANG Duanjin, WU Jie. Robust filtering for Delta operator formulated systems with circular pole and error variance constraints[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(1): 12 – 16.)

[3] 邵锡军, 杨成梧. 具有约束方差的不确定性Delta算子系统的鲁棒滤波器设计[J]. 兵工学报, 200l, 22(3) : 312 – 316.
(SHAO Xijun, YANG Chengwu. Robust filter design of Delta operator systems with time varying uncertainty and error variance constraints[J]. *Acta Armamentarii*, 2001, 22(3): 312 – 316.)

[4] 刘满, 井元伟, 张嗣瀛. Delta算子系统D稳定鲁棒容错控制[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2004, 25(8): 715 – 718.
(LIU Man, JING Yuanwei, ZHANG Siying. D-stable robust fault-tolerant control for Delta operator systems[J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2004, 25(8): 715 – 718.)

[5] 刘晓华, 刘浩. 一类Delta算子不确定时滞系统保性能滤波[J]. 控制与决策, 2007, 22(3): 322 – 325.
(LIU Xiaohua, LIU Hao. Guaranteed cost filtering for a class Delta-operator uncertain time delay systems[J]. *Control and Decision*, 2007, 22(3): 322 – 325.)

[6] 俞立. 具有闭环极点和方差约束的不确定离散系统鲁棒控制[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(4): 621 – 623.
(YU Li. Robust control of uncertain discrete-time systems with closed-Loop pole and variance constraints[J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(4): 621 – 623.)

[7] 周武能, 苏宏业, 褚健. 具有方差和极点约束的不确定系统鲁棒H_∞输出反馈控制[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(1): 103 – 108.
(ZHOU Wuneng, SU Hongye, CHU Jian. Robust H-infinity output feedback control with variance and pole Constraints for time-varying uncertain systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(1): 103 – 108.)

[8] KEEL L, BHATTACHARYYA S. Robust, fragile, or optimal[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1098 – 1105.

[9] 熊军林, 张庆灵. 具有结构不确定性的时滞系统的最优非脆弱保性能控制[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(3): 503 – 506.
(XIONG Junlin, ZHANG Qingling. Optimal non-fragile guaranteed cost control for time-delay systems with structured uncertainties[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(3): 503 – 506.)

作者简介:

肖民卿　(1970—), 男, 副教授, 博士研究生, 目前研究方向为鲁棒控制和Delta算子系统控制等, E-mail: xxmmqq@fjnu.edu.cn;

陈金玉　(1969—), 男, 副研究员, 博士, 目前研究方向为鲁棒控制和智能控制等, E-mail: cqchenjy@cqu.edu.cn;

曹长修　(1937—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为控制理论与应用等, E-mail: cxcao@cqu.edu.cn.