第 26 卷第 1 期
2009 年 1 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 26 No. 1
Jan. 2009

文章编号: 1000−8152(2009)01−0046−05

线性多变量系统的控制Lyapunov函数构造

蔡秀珊[1], 韩正之[2], 吕干云[1], 王 霄[1]

(1. 浙江师范大学 数理与信息工程学院, 浙江 金华 321004; 2. 上海交通大学 自动化系, 上海 200030)

摘要: 提出线性多变量系统控制Lyapunov函数(CLF)构造的一般方法. 先证明可以通过解一类Lyapunov方程, 得到线性系统二次型的CLF. 接着证明了对于线性系统, 这种方法可以提供所有二次型的CLF. 最后证明了若线性系统存在CLF, 那么必存在二次型的CLF. 由此完全解决了线性系统的CLF构造问题.

关键词: 线性系统; 控制Lyapunov函数; Yokoyama标准形; 反馈镇定

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

The construction of control Lyapunov functions for linear multivariable systems

CAI Xiu-shan[1], HAN Zheng-zhi[2], LÜ Gan-yun[1], WANG Xiao[1]

(1. College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang 321004, China;
2. Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: A universal method for constructing control Lyapunov functions (CLF) for a linear multivariable system is presented. Firstly, we show that every quadratic control Lyapunov function can be obtained by solving the Lyapunov equation. Then, we prove that this method can generate all quadratic control Lyapunov functions for a given linear system. Finally, it is shown that if there is a control Lyapunov function then there must be a quadratic control Lyapunov function. Thus, the problem of constructing control Lyapunov functions for linear systems is solved completely.

Key words: linear systems; control Lyapunov functions; Yokoyama canonical form; feedback stabilization

1 引言(Introduction)

Lyapunov函数是动态系统稳定性分析的强有力的工具. Artstein[1]和Sontag[2]于1983年分别研究了控制系统的镇定, 将Lyapunov函数的概念延伸到控制Lyapunov函数(CLF). 他们证明了一个非线性系统可由松驰反馈镇定当且仅当存在CLF. Sontag[3]研究仿射系统的镇定并由CLF构造通用的反馈控制律. 这些成就极大地推动了人们对CLF的研究, 并将它广泛地运用于各种设计问题, 获得了大量有价值的成果[4~7]. 与Lyapunov函数的构造相似, CLF的构造是一个很难的问题. 即使对于线性系统, 也没有一个通用的方法来构造CLF.

Yokoyama[8]在1973年提出可用一系列初等的坐标变换将多变量的线性系统化成一种标准型, 后来称为Yokoyama标准形. 此后, Yokoyama标准形成为多变量线性系统分析与设计的有力工具. 韩京清[9]系统地介绍了Yokoyama标准形及其应用. 本文将利用这种标准型来研究线性多变量系统CLF的构造问题. 首先指出CLF在坐标变换、输入变换、状态反馈下具有不变性. 利用Yokoyama标准形, 提出可通过解Lyapunov方程, 构造线性系统的二次型CLF. 证明了对于线性系统, 这种方法可以提供所有二次型的CLF. 并且证明了若线性系统存在CLF, 那么必存在二次型的CLF. 从而彻底解决了线性系统的CLF构造问题. 这项研究可以认为是Lyapunov关于线性自主系统理论在线性控制系统的推广. 并由所构造的CLF给出了可镇定系统的线性反馈.

2 系统的描述及CLF的定义(System description and the definition of CLF)

考虑定常线性多变量系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统的状态与输入, A, B 为维数适当的矩阵.

$V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$为连续函数, 若$V(0) = 0$, 而对于$x \neq 0$, $V(x) > 0$, 那么称$V(x)$为正定的. 若$\|x\| \to$

收稿日期: 2006−12−03; 收修改稿日期: 2007−11−10.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60774011); 浙江省自然科学基金资助项目(Y105141).

$\infty, V(x) \to \infty$, 则称$V(x)$是真的(或径向无界).

定义 1　V是C^1, 真和正定的, 若对于任意的$x \neq 0$,

$$\inf_u \frac{\partial V}{\partial x}(Ax + Bu) < 0, \tag{2}$$

那么称$V(x)$是系统(1) 的控制Lyapunov函数(CLF). 当控制u不受约束时(2) 等价于

$$\frac{\partial V}{\partial x}B = 0, x \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x}Ax < 0. \tag{3}$$

3　主要结果(Main results)

下面的引理说明CLF在坐标变换, 输入变换, 状态反馈下的不变性. 这些结果为CLF的进一步研究提供了方便.

引理 1　令$T \in \mathbb{R}^{n\times n}, G \in \mathbb{R}^{m\times m}, F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 其中$T$, G都为非奇异的. 在引入坐标变换$\bar{x} = Tx$, 输入变换$u = Gu_1$和状态反馈$u_1 = F\bar{x} + u_2$后, 系统(1) 变换为

$$\dot{\bar{x}} = T(AT^{-1} + BGF)\bar{x} + TBGu_2. \tag{4}$$

那么$V(x)$是系统(1)的CLF当且仅当$V(T^{-1}\bar{x})$为系统(4) 的CLF.

命题不难证得, 证明过程略去.

容易证明坐标变换, 输入变换, 反馈变换形成系统(1) 的一个变换群. 引理1说明CLF是这个变换群的不变量. 有了引理1, 可以在一种方便的标准形下讨论CLF.

3.1　线性系统CLF的构造(Construct CLF for linear systems)

设系统(1) 可控, 且$\mathrm{rank}(B) = m$, 设(A, B) 具有Yokoyama标准形, 就是在式(1)中有

$$A = \begin{bmatrix} 0 & [I_\nu\ \ 0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [I_2\ \ 0] \\ -A_\nu & -A_{\nu-1} & \cdots & -A_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

I_i, $i = 2, 3, \cdots, \nu$为$n_i \times n_i$阶单位阵, A_i, $i = 1, 2, 3, \cdots, \nu$为$m \times n_i$阶的实矩阵. $m = n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_\nu > 0$为$(A, B)$能控性指数集. 由于$(A, B)$能控, $n_1 + n_2 + \cdots + n_v = n$. 在式(5)中, 0代表适当阶的零矩阵, B_1是$m \times m$的非奇异矩阵.

分别将A, x, 分块如下:

$$A = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & -A_1 \end{bmatrix},$$

其中:

$$G_{11} = \begin{bmatrix} 0 & [I_\nu\ \ 0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [I_3\ \ 0] \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ [I_2\ \ 0] \end{bmatrix},$$

$$G_{21} = [-A_\nu\ -A_{\nu-1} \cdots -A_2].$$

相应地

$$x^{\mathrm{T}} = [X_{n-m}^{\mathrm{T}}\ \ X_m^{\mathrm{T}}],$$

其中:

$$X_{n-m}^{\mathrm{T}} = [x_1\ \ \cdots\ \ x_{n-m}],$$
$$X_m^{\mathrm{T}} = [x_{n-m+1}\ \ \cdots x_n].$$

首先引入输入变换$u = B_1^{-1}u_1$, 接着作状态反馈$u_1 = -[G_{21}\ -A_1]x + u_2$, 将系统(5)变换为

$$\dot{x} = A_c x + B_c u_2, \tag{6}$$

这里:

$$A_c = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}.$$

根据引理1, 只需研究系统(6)的CLF. 设P为对称矩阵. 将P表为如下的分块矩阵:

$$P = \begin{bmatrix} P_{n-m} & P_{12} \\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_m \end{bmatrix}, \tag{7}$$

这里:

$P_{n-m} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}, P_m \in \mathbb{R}^{m\times m}, P_{12} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times m}$.

如果P_m可逆, 记$P_m^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}} = [S_\nu\ S_{\nu-1} \cdots S_2]$, 再记$S_i = \begin{bmatrix} S_{i1} \\ S_{i2} \end{bmatrix}$, 这里$S_i$, S_{i1}, S_{i2}分别为$n_1 \times n_i$, $n_2 \times n_i$, $(n_1 - n_2) \times n_i$的实矩阵, $i = 2, 3, \cdots, \nu$. 令

$$C_\beta = \begin{bmatrix} 0 & [I_\nu\ \ 0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [I_3\ \ 0] \\ -S_{\nu1} & -S_{\nu-11} & \cdots & -S_{21} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

则C_β是$(n-m) \times (n-m)$实矩阵. 作下列的假设:

H1　P_m为正定, 且C_β为Hurwitz矩阵.

H2　$(P_{n-m} - P_{12}P_m^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}})C_\beta + C_\beta^{\mathrm{T}}(P_{n-m} - P_{12}P_m^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}})$ 为负定矩阵.

下面将证明$V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$为系统(6) 的CLF当且

仅当它满足假设H1, H2.

定理 1 P满足假设H1, H2, 则$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$为系统(6)的CLF.

证 由假设H1, H2, 可知P为正定矩阵. $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$沿着系统(6)轨线的导数为

$$\begin{aligned}&\dot V(x)=x^{\mathrm{T}}PA_cx+x^{\mathrm{T}}A_c^{\mathrm{T}}Px+2x^{\mathrm{T}}PB_cu_2=\\&\begin{bmatrix}X_{n-m}^{\mathrm{T}}\ X_m^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\cdot\\&\begin{bmatrix}P_{n-m}G_{11}+G_{11}^{\mathrm{T}}P_{n-m} & P_{n-m}G_{12}+G_{11}^{\mathrm{T}}P_{12}\\ P_{12}^{\mathrm{T}}G_{11}+G_{12}^{\mathrm{T}}P_{n-m} & P_{12}^{\mathrm{T}}G_{12}+G_{12}^{\mathrm{T}}P_{12}\end{bmatrix}\cdot\\&\begin{bmatrix}X_{n-m}\\ X_m\end{bmatrix}+(2X_{n-m}^{\mathrm{T}}P_{12}+2X_m^{\mathrm{T}}P_m)u_2.\end{aligned}\tag{9}$$

由式(9)可得

$$\frac{\partial V}{\partial x}B_c=2X_{n-m}^{\mathrm{T}}P_{12}+2X_m^{\mathrm{T}}P_m.$$

令$\dfrac{\partial V}{\partial x}B_c=0$, 那么

$$X_m=-P_m^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}X_{n-m},\tag{10}$$

由式(9)可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial x}A_cx=\\&\begin{bmatrix}X_{n-m}^{\mathrm{T}}\ X_m^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\cdot\\&\begin{bmatrix}P_{n-m}G_{11}+G_{11}^{\mathrm{T}}P_{n-m} & P_{n-m}G_{12}+G_{11}^{\mathrm{T}}P_{12}\\ P_{12}^{\mathrm{T}}G_{11}+G_{12}^{\mathrm{T}}P_{n-m} & P_{12}^{\mathrm{T}}G_{12}+G_{12}^{\mathrm{T}}P_{12}\end{bmatrix}\cdot\\&\begin{bmatrix}X_{n-m}\\ X_m\end{bmatrix},\end{aligned}\tag{11}$$

将式(10)代入式(11), 得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial x}A_cx=\\&X_{n-m}^{\mathrm{T}}[\big(P_{n-m}-P_{12}P_m^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}\big)\cdot\\&\big(G_{11}-G_{12}P_m^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}\big)+\big(G_{11}-G_{12}P_m^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}\big)^{\mathrm{T}}\cdot\\&\big(P_{n-m}-P_{12}P_m^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}\big)]X_{n-m},\end{aligned}$$

可以算得

$$\begin{aligned}&G_{11}-G_{12}P_m^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}=\\&\begin{bmatrix}0 & [I_\nu\ 0] & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & [I_3\ 0]\\ -S_{\nu1} & -S_{\nu-11} & \cdots & -S_{21}\end{bmatrix}=C_\beta.\end{aligned}$$

由假设H2, 当$\dfrac{\partial V}{\partial x}B_c=0, X_{n-m}\neq0$时, 成立$\dfrac{\partial V}{\partial x}A_cx<0$. 即$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$是系统(6)的CLF.

由引理1可知$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$也是系统(5)的CLF.

注 1 从定理1的证明可知, 在S_i中S_{i2}是自由变量, 可以任意取值.

下面的例子说明如何由定理1所提出的方法构造CLF.

例 1 考虑系统(5), 其中:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\-1&-1&1&0&0\\-5&-9&10&2&1\\-2&7&8&-1&-3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&4&6\\2&5&8\\-2&3&4\end{bmatrix},\tag{12}$$

(A,B)已为Yokoyama规范型, (A,B)的能控性指数集为$m=n_1=3, n_2=1, n_3=1$,而且有

$$G_{11}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},G_{12}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$

$$G_{21}=\begin{bmatrix}-1&-1\\-5&-9\\-2&7\end{bmatrix},A_1=\begin{bmatrix}-1&0&0\\-10&-2&-1\\-8&1&3\end{bmatrix}.$$

假定$P=\begin{bmatrix}P_2&P_{12}\\P_{12}^{\mathrm{T}}&P_3\end{bmatrix}$, 令

$$P_3^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&3\\1&0\\0&1\end{bmatrix},P_3=\begin{bmatrix}3&&\\&4&\\&&5\end{bmatrix}.$$

注意, 在选取$P_3^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}$时, 下面的$2\times2$矩阵是随意的, 第1行上的向量$[2\ \ 3]$使得$\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}$为Hurwitz矩阵. 为了获得$P_2$, 考虑下面的Lyapunov方程:

$$\begin{aligned}&\big(P_2-P_{12}P_3^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}\big)\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}+\\&\begin{bmatrix}0&-2\\1&-3\end{bmatrix}\big(P_2-P_{12}P_3^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}\big)=-I_2,\end{aligned}\tag{13}$$

解式(13), 可得

$$P_2=\begin{bmatrix}17.25&18.25\\18.25&32.25\end{bmatrix}.$$

由定理1,

$$P=\begin{bmatrix}17.25&18.25&6&4&0\\18.25&32.25&9&0&5\\6&9&3&0&0\\4&0&0&4&0\\0&5&0&0&5\end{bmatrix}$$

为正定矩阵, 且$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$为这一系统CLF.

下面的定理2表明定理1所提出的方法提供了所有二次型的CLF.

定理 2 若$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$是系统(6) 的CLF, 那么$V(x)$满足假设H1, H2.

证明略去.

3.2 由CLF构造线性反馈(Construct linear feedback by CLF)

Sontag曾经利用CLF对仿射非线性系统给出了镇定的"通用公式"[3], 但是他的公式不是线性的, 不适合线性系统. 本节考虑利用二次型CLF的线性反馈镇定. 它不但能使系统稳定, 而且使闭环系统的极点与C_β和P_m有关. 令

$$F=\begin{bmatrix} I_v & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_2 & \\ & & & P_m^{-1}\end{bmatrix},$$

$$L_{-1}=\begin{bmatrix} 0 & [I_v\ \ 0] & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & [I_2\ \ 0]\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

若$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$为系统(6)的CLF, 这里

$$P=\begin{bmatrix} P_{n-m} & P_{12}\\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_m\end{bmatrix},$$

其中$P_{12}^{\mathrm{T}}=P_m[S_\nu\ S_{\nu-1}\cdots\ S_2]$,定义$C_\beta$如式(8).

定理 3 如果$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$为系统(6)的CLF, 那么

$$u=-(B_c^{\mathrm{T}}P+B_c^{\mathrm{T}}FPL_{-1})x \tag{14}$$

可镇定系统(6), 且闭环系统的极点配置在$-P_m$的m个特征根处, 其余的$n-m$个极点配置在C_β的$n-m$个特征根处.

证 记$\tilde I_v=I_v$,$\tilde I_i$为n_i-n_{i+1}阶单位阵, $i=1,2,\cdots,v-1$. 令

$$I(\lambda)=\begin{bmatrix} \widetilde I_v\lambda^{v-1} & & & & \\ & \widetilde I_{v-1}\lambda^{v-2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \widetilde I_2\lambda & \\ & & & & \widetilde I_1\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\tilde I}_2(\lambda)=\begin{bmatrix} \tilde I_v\lambda^{v-2} & & & \\ & \tilde I_{v-1}\lambda^{v-3} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde I_2\end{bmatrix}.$$

由于

$$A_c-B_cB_c^{\mathrm{T}}(P+FPL_{-1})=$$
$$\begin{bmatrix} 0 & [I_v\ 0] & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -P_mS_v & -P_mS_{v-1}-[S_v\ 0] & \cdots & -P_m-[S_2\ 0]\end{bmatrix},$$

那么由文献[9], 可知

$$\det\big(\lambda I_{n\times n}-(A_c-B_cB_c^{\mathrm{T}}(P+FPL_{-1}))\big)=$$
$$\det\{(P_m+\lambda I_1)(\frac{1}{\lambda^{v-1}}[S_v\ 0]+\frac{1}{\lambda^{v-2}}[S_{v-1}\ 0]+\cdots+\frac{1}{\lambda^2}[S_3\ 0]+\frac{1}{\lambda}[S_2\ 0]+I_1)I(\lambda)\},$$

记

$$\tilde H(\lambda)=\frac{1}{\lambda^{v-1}}[S_v\ 0]+\frac{1}{\lambda^{v-2}}[S_{v-1}\ 0]+\cdots+\frac{1}{\lambda^2}[S_3\ 0]+\frac{1}{\lambda}[S_2\ 0]+I_1,$$

因为

$$\tilde H(\lambda)I(\lambda)=$$
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda^{v-1}}[S_{v1}\ 0]+\cdots+\frac{1}{\lambda}S_{21}+I_2 & 0\\ \frac{1}{\lambda^{v-1}}[S_{v2}\ 0]+\cdots+\frac{1}{\lambda}S_{22} & \tilde I_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\tilde{\tilde I}_2(\lambda) & \\ & \tilde I_1\end{bmatrix},$$

则

$$\det(\tilde H(\lambda)I(\lambda))=$$
$$\det\{[\frac{1}{\lambda^{v-2}}[S_{v1}\ 0]+\frac{1}{\lambda^{v-3}}[S_{v-11}\ 0]+\cdots+S_{21}+I_2\lambda]\tilde{\tilde I}_2(\lambda)\},$$

即$\det(\tilde H(\lambda)I(\lambda))$为$C_\beta$的特征多项式.

由于$\det\big(\lambda I_{n\times n}-(A_c-B_cB_c^{\mathrm{T}}(P+FPL_{-1}))\big)=\det(\lambda I_1+P_m)\det(\tilde H(\lambda)I(\lambda))$且$C_\beta$为Hurwitz矩阵, 所以反馈(16)可稳定系统(6), 且闭环系统的m个极点配置在$-P_m$的m个特征根处, 其余的$n-m$个极点配置在C_β的$n-m$个特征根处.

注 2 定理3说明闭环系统的极点在C_β中就可以预先设定, 使得开始的设计就有目标可循.

推论 1 如果$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$为系统(5)的CLF, 那么

$$u=-B_1^{-1}(BB_1^{-1})^{\mathrm{T}}(P+FPL_{-1})x-B_1^{-1}[G_{21}\ \ -A_1]x \tag{15}$$

可镇定系统(5), 且闭环系统的极点配置在$-P_m$的m个特征根处, 其余的$n-m$个极点配置在C_β的$n-m$个特征根处.

例 2 继续考虑例1 中的系统.

容易获得开环系统的极点为$0.7718+1.1151\mathrm{i}$, $0.7718-1.1151\mathrm{i}, 0.5437, 1.7913, -2.7913$, 由式(15), 反馈可取为

$$u=\begin{bmatrix} -6.5 & -8 & 2.5 & 2.5 & 1.5\\ -36 & -80 & 7 & 23 & 6\\ 24.25 & 53 & -6.25 & -15.75 & -4.25 \end{bmatrix}x,$$

那么闭环系统的极点为$-3,-4,-5,-1,-2$. 其中$-1,-2$为$C_\beta=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$的特征根; $-3,-4,-5$为$-P_3$的特征根, 此时闭环系统是稳定的.

定理 4 线性系统存在CLF, 那么必存在二次型的CLF.

证 对于任意的线性系统

$$\dot x=Ax+Bu, \tag{16}$$

若它存在CLF, 根据文献[2]中的定理5, 那么它一定可镇定. 对系统(16)作能控性分解, 即引入状态变换$\bar x=T_1x$,使得:

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar x}_c\\ \dot{\bar x}_{\bar c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar A_c & \bar A_{12}\\ 0 & \bar A_{\bar c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar x_c\\ \bar x_{\bar c}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar B_c\\ 0\end{bmatrix}u,$$

其中$(\bar A_c,\bar B_c)$是完全能控的. 因此系统(16)可镇定当且仅当$\bar A_{\bar c}$是Hurwitz矩阵. 于是

$$\bar A_{\bar c}^{\mathrm T}P+P\bar A_{\bar c}=-I_{n-n_1} \tag{17}$$

有正定解P. 这里$n_1<n$为系统(16)的能控性矩阵Q_c的秩.

由于$(\bar A_c,\bar B_c)$能控, 存在状态反馈$u_c=K_c\bar x_c$, 使得$\bar A_c+\bar B_cK_c$的特征值与$\bar A_{\bar c}$不同, 那么矩阵方程$(\bar A_c+\bar B_cK_c)F_1-F_1\bar A_{\bar c}=\bar A_{12}$有唯一的解$F_1$. 于是系统(16)经过状态反馈$u=[K_c\ \ 0]\bar x+v$及坐标变换$z=T_2\bar x, T_2=\begin{bmatrix}I_{n_1} & F_1\\ 0 & I_{n-n_1}\end{bmatrix}$后为:

$$\begin{bmatrix}\dot z_c\\ \dot z_{\bar c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar A_c+\bar B_cK_c & 0\\ 0 & \bar A_{\bar c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_c\\ z_{\bar c}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar B_c\\ 0\end{bmatrix}v, \tag{18}$$

$(\bar A_c+\bar B_cK_c,\bar B_c)$依然是能控的. 于是根据定理1, 存在二次型的CLF, $V(z_c)=z_c^{\mathrm T}P_cz_c$, 那么$V(z)=z_c^{\mathrm T}P_cz_c+z_{\bar c}^{\mathrm T}Pz_{\bar c}$就是系统(18)的CLF, 根据引理1, $V(T_1^{-1}T_2^{-1}z)$是系统(16)的CLF. 因此线性系统存在CLF, 那么必存在二次型的CLF. 因而它的逆否命题也成立, 即线性系统不存在二次型的CLF, 则不存在CLF.

4 结论(Conclusions)

本文解决了线性多变量系统CLF的构造问题. 利用线性系统的Yokoyama标准形, 证明了可以通过解Lyapunov方程得到线性系统二次型的CLF. 接着证明了对于线性系统. 这种方法可以提供所有二次型的CLF. 最后证明了若线性系统存在CLF, 那么必存在二次型的CLF. 通过所构造的CLF得到了可镇定系统的线性反馈, 而且可将闭环系统的极点配置到预先给定的位置.

参考文献(References):

[1] ARTSTEIN Z. Stabilization with relaxed controls[J]. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 1983, 7(11): 1163 – 1173.

[2] SONTAG E D. A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability[J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1983, 21(3): 462 – 471.

[3] SONTAG E D. A 'Universal' construction of Artstein's Theorem on nonlinear stabilization[J]. *Systems & Control Letters*, 1989, 13(2): 117 – 123.

[4] FREEMAN R A, PRIMBS J A. Control Lyapunov functions: new ideas from an old source[C] // *Proceedings of the Decision Control Conference*. New York: IEEE Press, 1996, 4: 3926 – 3931.

[5] 蔡秀珊, 汪晓东, 吕干云. 具有零动态仿射非线性系统控制Lyapunov函数的构造[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 391 – 395.
(CAI Xiushan, WANG Xiaodong, LÜ Ganyun. Constructive control Lyapunov functions for affine nonlinear systems with zero dynamics[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 391 – 395.)

[6] CAI X S, HAN Z Z. An analysis and design method for systems with structural uncertainty[J]. *International Journal of Control*, 2006, 79(12): 1647 – 1653.

[7] CAI X S, HAN Z Z. Inverse optimal control of nonlinear systems with structural uncertainty[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2005, 152(1): 79 – 83.

[8] YOKOYAMA R, KINNEN E. Plase-variable canonical forms for multi-input, multi-output systems[J]. *International Journal of Control*, 1973, 17(6): 1127 – 1142.

[9] 韩京清. 线性控制系统的结构[M]. 北京: 科学出版社, 1979.
(HAN Jingqing. *Configuration of Linear Control System*[M]. Beijing: Science Press, 1979.)

作者简介:

蔡秀珊 (1966—), 女, 2005年毕业于上海交通大学自动化系, 获得控制理论与控制工程的博士学位, 现为浙江师范大学数理与信息工程学院的教授, 主要的研究方向为非线性系统的理论与应用等, E-mail: xiushan@zjnu.cn;

韩正之 (1947—), 男, 教授, 博士生导师, 主要的研究方向为非线性系统控制、复杂网络系统控制等, E-mail: zzhan@sjtu.edu.cn;

吕干云 (1976—), 男, 副教授, 主要的研究方向为电力系统的稳定性、混沌动力系统与控制等, E-mail: ganyun-lv@zjnu.cn;

王 霄 (1978—), 女, 讲师, 主要的研究方向为非线性控制、混沌动力系统与控制等, E-mail: wxd@zjnu.cn.