

多采样率系统的辨识问题综述

倪博溢, 萧德云

(清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘要: 在多率采样系统中, 采样间隔不均匀. 本文综述了文献中有关多率采样系统的数学模型, 如线性周期时变模型、频域模型和连续状态空间模型等. 同时对相应的辨识方法, 如提升、频域方法、子空间辨识方法等, 也进行了全面的综述. 对多率采样系统辨识中存在的一些问题, 包括辨识模型的选择、一致性问题、带约束条件的辨识方法和辨识收敛性等, 也作了深入的讨论.

关键词: 多采样率系统; 建模; 辨识; 非均匀采样

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

A survey on identification of multirate sampled systems

NI Bo-yi, XIAO De-yun

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: In multirate sampled systems, sampling periods are not uniform. This article briefly reviews the existing mathematical models of multirate sampled systems including the linear periodic time-varying model, the frequency domain model, and the continuous time state space model. The corresponding identification methods, such as lifting method, frequency domain method and subspace method, are also discussed. Model selection, consistency, constrained identification, convergence and other problems in the identification of multirate sampled system are deeply discussed.

Key words: multirate sampled systems; modeling; identification; non-uniform sampling

1 引言(Introduction)

采样系统是离散化实际系统的连续信号而得到的. 由于受到客观物理因素的限制, 系统的多个输入输出量不能工作在相同的采样(保持)频率下, 而在同一个系统中产生了多个采样频率, 形成了多采样率系统(multirate sampled systems或多率系统). 多率系统的模型描述、变量控制和参数辨识等问题也变得比单率系统更为复杂. 如: 即使多率系统原初所对应的连续系统是时不变的, 采样后的多率系统也将是时变的. 这种特性使得多率系统变得更复杂, 但另一方面也带来了灵活性, 带来提高控制系统的性能的可能.

多采样率系统广泛存在于过程工业、信号处理、航空航天、地震观测/地质勘探和医学等领域中, 不同行业的人们从信号处理、控制理论和辨识建模等不同方面进行广泛的研究. 例如: 在温室温度控制中, 温度采样率高于控制器的保持率^[1]; 一种磁盘驱动器系统中对磁头定位的控制, 其控制量的保持率高于测量量的采样率^[2]. 特别在过程工业中, 多率系

统研究具有现实目的和需求: 复杂设备和生产线中的塔釜、容器和管道等都具有多个控制(测量)点, 不仅采样率不一样, 甚至可能是手工控制而导致采样间隔不均匀^[3,4].

关于多率系统辨识在国内外都已经有较多的研究成果, 对多率系统典型模型的辨识方法也已经文献作出了较好的阐述, 但至今尚未有全面总结; 并且随着辨识、建模方法的不断研究和发展, 也出现了一些新的研究成果. 本文将综述多率系统辨识方面的研究情况, 给出多率系统的几种模型化方法, 包括提升方法、小波方法等, 并讨论了其中一部分模型的辨识方法及其存在的问题.

2 多率系统概述(Overview of multirate systems)

典型的多采样率系统如图1所示. 连续系统的 q 个输入和 p 个输出分别以各自的采样(保持)率工作. 因此, 具有保持器 H_1-H_q 和采样器 S_1-S_p 的多采样率系统是一个时变离散系统.

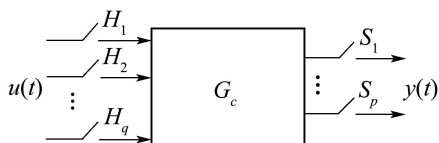


图 1 多率系统示意图

Fig. 1 Figure of multirate system

多率系统可按采样间隔分为均匀和非均匀采样两类. 对均匀采样情况给出如下假设: 对所有采样保持周期 T_j^{in} 和 T_i^{out} 存在一个最小公倍数 δ , 也即存在一个最小周期 T_0 , 使得所有采样保持周期都可以表示成 T_0 的整数倍:

$$\begin{cases} T_i^{\text{out}}/T_0 = K_i \Leftrightarrow \delta/T_i^{\text{out}} = P_i, \\ T_j^{\text{in}}/T_0 = L_j \Leftrightarrow \delta/T_j^{\text{in}} = Q_j, \end{cases} \quad (1)$$

在使用有限精度表示时, 上述假设总是成立的.

非均匀采样的数据在时间轴上分布不均匀, 例如对一个变量 x 的采样时间序列 $\{t_i^x\}$ 有 $t_1^x < t_2^x < \dots < t_n^x$, 但不存在周期性; 同时作为系统另一个变量 y , $\{t_i^y\}$ 和 $\{t_i^x\}$ 可以完全不同. 通常非均匀情况更为复杂, 而且包含均匀采样情形, 是更为一般化的问题. 下文中在不特别指出的情况下, 所指系统都是均匀采样的.

按不同研究领域, 对多率系统的研究可大致分为模型数学描述、系统分析、控制、滤波和辨识等几类. 数学描述方法是系统辨识的前期工作, 以确定辨识模型的结构. 目前研究较多的内容是多率控制器和滤波器、系统辨识以及系统分析等.

3 多率系统的数学描述方法(Mathematical description of multirate systems)

通过数学描述给出多率系统的模型框架, 是分析研究多率系统的基础. 过去的研究中已经给出了几种经典数学描述, 最近也有部分探索新的模型描述方法. 这里从不同的分析域分别加以介绍.

3.1 时域模型(Time domain model)

1) 时变传递函数模型.

多率系统的时变特性很早就被人注意到, Friedland 指出它是一种具有特殊结构的周期时变系统^[5]. 以线性切换时变系统的观点看, 可将多率系统视作多个 LTI 系统按时间循环依次切换的系统, 也即是线性周期时变(LPTV: linear periodic time-varying)系统. Meyer 采用移位时变系统(shift time-varying system)加以描述^[6,7], 这给出了多率系统的清晰表达. LPTV 系统的特性已经得到较多的研究^[8~10]. 值得注意的是移位时变系统和 LPTV 系统的结构存在区别, 但不难证明移位时变结构是可以表述 LPTV 系统

的, 从表达上来看移位时变结构更为一般且符合多率系统的特点.

对 $p \times q$ 维的多率系统, 各通道传递函数 $h_{i,j}$ 对应一个单输入单输出(SISO)系统. 结合式(1)有

$$y_i[n] = \sum_l h_{i,j}[n, l] u_j[l], \quad (2)$$

它是一个移位时变系统, 具有如下特点:

$$h_{i,j}[n + P_i, l + Q_j] = h_{i,j}[n, l],$$

因而系统响应可以表达成如下形式^[11]:

$$y_i[n] = \sum_j \sum_{m=0}^{N-1} h_{i,j}[n, jN + m] x[jN + m],$$

同时具有周期为 $\text{lcm}(T_j^{\text{in}}, T_i^{\text{out}})$, $\text{lcm}(\cdot)$ 为最小公倍数. 因而, 整个 $p \times q$ 维系统是 (P_i, Q_j) -移位时变系统和周期为 δ 的 LPTV 系统.

2) 有理分式传递函数模型.

多率系统在 SISO 系统中被称为双采样率系统, 输入保持率是输出量采样率 N 倍的情况是其中的一个特例, 可采用有理分式传递函数来描述^[12]:

$$\frac{Y(q^N)}{U(q)} = \tilde{G}(q, N) = \frac{\tilde{N}(q, N)}{D_N(q^N)} = \frac{\sum_{i=1}^{nN} \beta_{i,T} q^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_{i,NT} q^{-i}}, \quad (3)$$

式中用 $a_{i,T}$ 和 $b_{i,T}$ 分别表示在单一快采样时间 T 下传递函数第 i 个分母和分子, 则 $b_{i,T}$ 和 $\beta_{i,T}$ 具有确定的代数关系^[13]. 这样, 双率系统也可以采用统一的变量 q 进行描述, 与单率系统模型类似. 有理分式表达实际上是差分方程的特殊形式, 其传递函数某些项的系数恒为零.

3) 状态空间模型.

对离散状态空间模型, 多率数据不能直接使用, 因此需要通过数据变换, 即“提升”方法使采样数据变为单率. 对提升变换这里不再赘述, 文[11, 13~15]等有对此有详细的描述. 这里只给出 p 维提升 $L_p(u(n))$ 的表达式:

$$L_p : \mathbf{u}^p(k) = [u(kp), u(kp+1) \cdots u(kp+p-1)]^T, \quad (4)$$

提升后状态空间模型可表示为^[14,16]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_F & \mathbf{B}_F \\ \mathbf{C}_F & \mathbf{D}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_F & \mathbf{B}_F & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{C}_F & \mathbf{D}_F & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{C}_F & \mathbf{D}_F & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \mathbf{C}_F & \mathbf{D}_F & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

多率系统的建模方法中, 提升方法占据主要地位. 提升模型的形式依原模型而定, 提升模型可以是传递

函数模型、状态空间方程和其它需要的形式。

而对于非均匀采样的系统,数据无论怎样提升都无法变成单率,因此,如果采用状态空间描述,则只能采用连续状态空间模型.对一个系统来说,它的连续模型是唯一的:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\omega}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t), \end{cases} \quad (6)$$

连续状态空间模型对非均匀多率系统只是理论上适用,因为在任何一个时间点,仍然没有完整的数据建立上述方程,因此还需要进一步的处理。

3.2 频域模型(Frequency domain model)

Jury指出,多率系统的提升方法在频域和时域有着对应的等价关系^[17]. Meyer等^[5]研究多率系统的统一表达时,指出多率系统由于其时变特性,频率响应难以定义,利用提升多率系统具有的时不变特性,可以对提升后的多输入多输出系统进行频率特性研究. Shiny等将其表示成一个周期变化的频域模型,可采用混叠(AC: aliasing components)来表示变量的傅里叶变换^[18,19]:

$$U_i^{AC}(e^{j\omega lh}) = \begin{bmatrix} U_i(e^{j\omega m_i h}) \\ U_i(e^{j(\omega + \frac{2\pi}{lk})m_i h}) \\ \vdots \\ U_i(e^{j(\omega + \frac{2\pi}{lk}(l-m_i))h}) \end{bmatrix}, 0 \leq \omega \leq \frac{2\pi}{lh}.$$

即对应的域频提升形式.得到系统的频域表示:

$$\mathbf{Y}^{AC}(e^{j\omega lh}) = \mathbf{G}^{AC}(e^{j\omega lh})\mathbf{U}^{AC}(e^{j\omega lh}),$$

其中

$$\mathbf{G}^{AC}(e^{j\omega lh}) = \mathbf{F}_N \mathbf{D}_N(e^{j\omega lh}) \hat{\mathbf{G}}(e^{j\omega lh}) \mathbf{D}_M^{-1}(e^{j\omega lh}) \mathbf{F}_M^{-1},$$

系统频域描述 $\mathbf{G}^{AC}(e^{j\omega lh})$ 给出了时域空间与频域空间的稳态映射.从上述表达可看出系统在频域和时域的对称性,混叠表示和提升表示是多率系统的一对互补表示形式,系统在时域显示出一些特性,如因果性,而对频域特性方面反映很少;混叠表示则相反. Yamamoto基于文[20]的研究,在文[21]中对采样系统的频域相应做了详细的分析.时域中的 L_2 范数等价与频域中的 H_∞ 范数,频域模型得到的结果和连续时域中相比在此意义下具有等价性。

Vaidyanathan提出的双频谱图(bifrequency & bispectrum)也是描述多率系统的一种方法^[22~24].时变系统的频谱是随时间变化的,而双频谱将系统传递函数 $h[n, l]$ 进行二维Fourier分析,得到在二维频域的系统描述,给出了直观的图像描述^[14,22].

对非均匀采样下的多率系统也有一些频域模型。

在某些时候,需要跟踪时变系统的参数变化,通过实时测定数据的一系列频率点,对频域数据建模,得到系统信息^[25,26].频率数据有多种方法可获得,如小波变换,从而建立频域的参数或非参数模型.例如参数模型可表示为:

$$Y(\omega, t) = c_1(t)I_1(\omega) + c_2(t)I_2(\omega) + \dots + c_n(t)I_n(\omega),$$

其中 $I(\omega)$ 是分段常数函数. Gillberg则建立了频域的AR模型,是时域AR模型的对应形式,其频域数据通过截断Fourier变换得到^[27].

3.3 小波模型(Wavelet model)

考虑到时域和频域各自的优点,如果两者得以结合则更为理想,小波变换正符合这一特点.吕立华等^[28,29]提出以分段加权的形式辨识多率系统,突出“剪切频率”附近的模型参数特性,使所关心的频段模型精度有所提高.对输入输出信号进行尺度为 L 的多分辨率分解:

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i,w}^1 + y_{i,w}^2 + \dots + y_{i,w}^L + y_{i,v}^L, \\ u_i &= u_{i,w}^1 + u_{i,w}^2 + \dots + u_{i,w}^L + u_{i,v}^L, \end{aligned}$$

其中 w 和 v 是一系列正交空间.由此可得到各频段的信号分量,它们之间满足如下关系:

$$\begin{cases} y_{n,w}^j = [y_{n-1,w}^j \dots y_{0,w}^j u_{n-1,w}^j \dots u_{n-m,w}^j] \cdot \boldsymbol{\theta}, \\ y_{n,v}^L = [y_{n-1,v}^L \dots y_{0,v}^L u_{n-1,v}^L \dots u_{n-m,v}^L] \cdot \boldsymbol{\theta}, \end{cases} \quad (7)$$

这种模型只适用于SISO系统.对多率数据的处理方法要进行重采样,因而会损失部分数据信息。

Dorfan等在文[8]中采用“小波分析树”、“小波综合树”的结构对LPTV系统建模^[30~32].周期为 N 的单输入单输出的LPTV系统,分析树使得采样率为 F_s 的输入分解为 N 个采样率为 F_s/N 的输入,变换后的系统形式为:

$$\mathbf{W}_y[k] = \sum_{l=0}^{M-1} \mathbf{A}_l \mathbf{W}_x[k-l], \quad (8)$$

其中: $\mathbf{W}_x[k-l]$ 和 $\mathbf{W}_y[k]$ 分别是输入输出的小波变换值, \mathbf{A}_l 是模型参数矩阵,其元素是长为 M 的滤波系数向量. \mathbf{A}_l 所代表的是一个MIMO的LTI模型。

3.4 其它模型(Other models)

除了上述的模型外,智能模型也在多率系统的建模研究中得到应用,例如:文献[33]用T-S模糊模型描述了一个输入多采样的非线性系统,文献[34]以神经网络模型建立柴油发动机缸盖振动到汽缸压力的模型。

4 多率系统的辨识方法(Multirate system identification methods)

1) 有理分式传递函数模型辨识方法。

对式(3)所示的双率系统,其模型与单率SISO系统类似,可采用常见的模型表示,例如采用ARX模型参数化^[13],所得到的辨识模型直观易用,可直接用于预测和控制.其中,递推形式中参数 θ 对应的数据是以输入数据的采样时间,即输出数据采样时间的 q 倍来更新的.值得注意的是,文献[12,35]得到的是输出采样率模型,而文献[13]得到的是输入采样率模型,称为快采样率模型.

同时丁峰等提出了双率系统的辅助模型辨识方法^[13,36],直接进行对系统的单率系统进行辨识,由于无法获得某些采样点上的数据,因而需要借助辅助模型估计缺失的测量数据.

2) 频域模型辨识方法.

频域方法研究如何通过辨识频域模型或者利用频域工具获得时域模型.如Gillberg给出的方法^[27]是,以截断Fourier变换得到频域数据,通过对比频域和时域模型形式,得到频域模型:

$$\Phi_y(i\omega) = \Phi_H(i\omega)\Phi_e(i\omega) + \Phi_d(i\omega), \quad (9)$$

并对参数的偏差和方差进行分析.Gustafsson的方法则通过小波分析等方法得到瞬时频率数据,再通过参数或非参数辨识得到频域模型^[25].Georgios等则通过高阶统计量估计变量的频谱,以这些量和时频域转换关系得到时域的参数和非参数模型^[10].

对非均匀采样模型,Lahalle给出了基于非均匀测量值连续ARMA频谱估计^[37].Martin采用Burg提出的预报误差方法和协方差方法,允许数据分类和频谱估计,从而对非均匀采样的数据序列进行建模^[38,39].这里多数方法都是通过估计得到系统的频谱,因此都是非参数模型.

3) 小波模型辨识方法.

文献[29]提出了小波模型的辨识方法,由式(7)导出,并根据实际建模的要求对各频率段数据进行加权,如何适当选取加权阵 C 的问题还需进一步研究.这种小波模型和前两种差别较大:这里解决多率数据的方法是数据重采样,同时也可能适用于非均匀采样的情况.而辨识模型的有效与否则依赖于数据的重采样是否保留了系统原始的信息.

Dorfan的小波模型如式(8)所示,系统模型相当于一个滤波器矩阵.对 $p \times q$ 维的多率系统,其参数个数将是 $pqMN^2$ 个,不过实际上每一个 h_{ij} 的周期可能小于 N ,因此总的辨识参数会小于这一数字.

小波模型的使用并不普遍,但从小波的特性可以推断,辨识模型将会对系统的频域特性有比较好的反映.上面提到的加权方法,就可以突出系统某一

段“感兴趣”的频段,提高其精度.从对称性分析可知,模型同样可以对某时间段的数据加权.小波模型的特点就是时频域同时分析,而且在离散情况下本质上具有不均匀采样的特点,这是一般时域或频域方法都不具有的,因此对多率系统的辨识存在发挥优势的潜力.

4) 状态空间模型辨识方法.

状态空间的形式在数学描述中已经给出.Wang采用了状态空间模型的提升表述^[14],选择了输出误差模型结构,Ljung指出此结构即使在非白色噪声的情况下,仍可获得一致估计^[40].状态空间模型的辨识主要方法是子空间估计方法.Li在文[3]中,使用提升方法构造了多率系统的模型,并参考了MOESP^[41],N4SID^[42]等子空间辨识方法.Li的方法中,多率系统是一种周期的非均匀采样系统,因此仍然采用提升得到时不变模型.

对非均匀采样系统,Li给出了连续状态空间的模型^[43],采用Sagara和Zhao的积分滤波器方法^[44],给出辨识结果.同时Garnier也指出,他给出的积分模型也同样适用于非均匀采样系统^[45,46].积分滤波器的基本形式是对连续模型各阶微分作多重积分:

$$\int_{t_b}^{t_e} \dots \int_{t_b}^{t_e} \xi(t) dt = [k_1 k_2 \dots k_n] [\xi(t_1) \xi(t_2) \dots \xi(t_n)]^T.$$

由于积分是线性算子,原来模型的结构得到保持,状态空间模型不变;对应的数据变为积分形式,解决了多率和非均匀采样的困难.积分滤波器是区别于提升方法改变数据结构,数据重采样的第3种解决思路.积分思想更早可以从文[47]中给出.需要注意的是,他们的非均匀系统是同步的,即虽然采样是非均匀的,但在同一采样时刻,可以获得系统所有的采样点数据.

因此,状态空间建模对均匀或非均匀多率系统都是适用的.对均匀采样,能得出离散状态空间模型,而非均匀情况一般只能得到连续形式.

5 多率系统辨识中的若干问题(Related issues in multirate system identification)

5.1 收敛性问题(Convergence)

提升方法中,文献[48,49]研究了时变系统辨识的收敛性,给出论断:在采用递推遗忘因子法(RFFA)辨识多率系统时,若系统满足一定条件,辨识参数的误差极限存在上下界.在时不变情况下证明了在RFFA方法下参数的误差和均方差都将收敛到0.实际上,当系统通过提升等手段转换成时不变系统之后,其收敛性问题,就是普通的多变量系统辨识收敛性问题.

在采用辅助模型直接辨识^[36]的情况下,由于数

据并不在所有的采样点都出现, 是一个不完整的数据集, 因而其收敛性不是普通系统的简单推广, 丁锋等给出定理描述参数误差随时间递推步数 k 下降的速度, 并有如下推论:

推论 若有持续激励条件满足, 则参数将以时间 k 的平方根倒数 $1/\sqrt{k}$ 收敛.

5.2 因果性约束(Causal restraint)

由于提升模型的结构, 其中的多个输入(输出)变量是由原系统的同一变量提升出来的, 因此它们不是完全独立的. 这导致了提升系统的状态空间表达式有一因果约束条件^[7]:

$$[D_{ij}]_{\alpha\beta} = 0, 1 \leq \alpha \leq K_i, 1 \leq \beta \leq L_j,$$

在辨识模型参数化过程中应避免将上述值列入辨识参数中. 在文献 [19, 50]中都采用nest-代数来描述多率系统, 如定义的系统输入输出数据空间为 $\mathbf{U}_k, \mathbf{Y}_k$, 则系统的因果约束可表示为简洁的nest-算子形式: $\hat{G}(0) \in (\{\mathbf{U}_k\}, \{\mathbf{Y}_k\})$.

5.3 输出迟延问题(Output delay)

同样由提升结构所引起的另一问题是系统输出的迟延. 考察式 (4)的向量, $\underline{u}^p(k)$ 的采样周期将是 $u(k)$ 的 p 倍, 从而系统的响应变慢 p 倍. 这里是单输入单输出的系统, 如果存在多个采样率, 则系统各采样周期的公倍数更大(见式 (1)), 会使系统响应明显变慢. Dorfan的小波变换模型同样存在此问题, 其迟延时间为 $d_0 = d(N-1)$. 辨识系统输出的延迟可能会影响到模型的实用性, 如用于控制时变系统的辨识要求模型具有一定的实时性, 若迟延太大则辨识模型将失去意义.

5.4 闭环辨识问题及可辨识性(Closed-loop identification and its identifiability)

文献 [51]对闭环系统给出了作为多采样率的闭环数字控制系统的一般表述. 在采用提升方法辨识多率系统时, 可得到一个重要的特性: 多率系统的可辨识性可以不满足普通系统的持续激励条件而得到满足, 同时也不依赖于外加信号或者控制器切换策略^[52]. 文献 [53]所研究的是单率闭环系统的可辨识性, 给出可辨识性所必需的数据矩阵行满秩条件也适用于多率系统. 文献 [52]定理2的证明了输出信号过采样的方法满足可辨识性条件.

文献 [54]从辨识准则函数的正定性出发, 也证明了类似的结论, 并指出这种闭环直接辨识的可辨识性条件是相对弱的. 其缺点是辨识精度依赖于噪声模型的估计准确程度.

在双频谱分析的频域中, 文献 [14]研究了辨识准则函数的正定性. 通过加快输出的采样率, 使系统特

性在频域出现了混叠. 混叠在信号处理中通常希望被去掉, 而在这里它的存在正是闭环可辨识性的条件.

5.5 模型确认(Model validation)

模型的确认是辨识建模一个逐渐受到重视的研究问题. Chai等分别从时域^[55]和频域^[19]角度, 采用nest-代数工具, 对多率系统辨识进行模型确认研究, 分别从时域和频域提出了CF(Carathéodory Fejér)插值和NP(Nevanlinna-Pick)插值问题, 在此基础上给出了模型确认的充分必要条件.

6 总结(Summary)

对多率系统的研究, 其关键在于系统采样率的不同步性, 即不存在一个 T , 使得在以 T 为周期的点上均能获得所有输入输出数据, 因而需要在模型化时做适当的处理, 使得系统能显示出同步采样(单采样率)的特性. 如上面的提升方法、数据重采样方法和积分滤波等, 都体现了这一思想.

通过本文分析, 可以看出在多率系统的辨识方面, 仍存在着很多值得研究和探索的问题.

首先, 如何选择描述多率系统的模型仍然值得研究. 虽然提升模型具有一定的通用性, 但还存在不少缺点, 如模型的维数升高可能导致辨识模型出现病态、MIMO系统的提升周期过大将导致模型不可用、提升模型用于控制时存在纹波(ripple)问题等. 采用连续状态空间模型则可以较好地避免提升所带来的问题, 但这种模型尚未被广泛使用. 其它几种模型也都存在较强的特殊性, 因此选择多率系统的描述模型, 以及寻找新的模型化方法是必要的.

其次, 如何将有理分式模型、LPTV模型、频域模型等进行推广, 比如可否将有理分式模型从双率推广到多率系统、频域中找到合适的模型形式等等, 这些都是尚待解决的问题.

再次, 对非均匀采样系统的研究还需要进一步深入. 在采样条件、数据缺失等限制下, 实际过程中存在着大量的非均匀采样情况. 在离散模型框架下, 非均匀采样还没有很好的解决方法, 以积分、滤波等形式构成的连续模型, 以及通过Fourier变换, 小波变换等途径得到的频域和时频域模型, 是非均匀采样建模的可能途径.

最后, 目前对多率系统辨识的可辨识性、递推辨识及其收敛性、数值计算, 以及其它一些相关问题的研究还处在初步阶段, 需要进一步推进.

多率系统的辨识研究不仅具有理论意义, 而且有着广泛的应用价值. 随着信息技术、数字控制、通信等领域的发展, 其重要性会不断显现.

参考文献(References):

- [1] ARVANITIS K, PARASKEVOPOULOS P, VERNARDOS A. Multirate adaptive temperature control of greenhouses[J]. *Computers and Electronics in Agriculture*, 2000, 26(3): 303 – 320.
- [2] PHAN D T. The design and modeling of multirate digital control systems for disk drive applications[C] // *Proceedings of Motion Control Proceedings*. Singapore: IEEE Press, 1993, 189 – 205.
- [3] LI W, HAN Z, SHAH S L. Subspace identification for FDI in systems with non-uniformly sampled multirate data[J]. *Automatica*, 2006, 42(4): 619 – 627.
- [4] RAGHAVAN H, TANGIRALA A, GOPALUNI R, et al. Identification of chemical processes with irregular output sampling[J]. *Control Engineering Practice*, 2006, 14(5): 467 – 480.
- [5] MEYER R, BURRUS C. A unified analysis of multirate and periodically time – varying digital filters[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1975, CAS-22(3): 1576 – 1578.
- [6] MEYER D G. Shift-invariant equivalents for a new class of shift-varying operators with applications to multi-rate digital control[C] // *Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control*. Austin: IEEE Press, 1988, 1697 – 1701.
- [7] MEYER D G. A parametrization of stabilizing controllers for multirate sampled-data systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(2): 233 – 236.
- [8] DORFAN Y, FEUER A, PORAT B. Modeling and identification of LPTV systems by wavelets[J]. *Signal Processing*, 2004, 84(8): 1285 – 1297.
- [9] MCLERNON D. Relationship between an LPTV system and the equivalent LTI MIMO structure[C] // *Proceedings of IEEE Proceedings-Vis Image Signal Process*. London: Institution of Electrical Engineers 2003, 150(3): 133 – 141.
- [10] GIANNAKIS G B, DANDAWATE A V. Polyspectral analysis of (almost) cyclostationary signals: LPTV system identification and related applications[C] // *Proceedings of Signals, Systems and Computers, Twenty-Fifth Asilomar Conference*. Pacific Grove, CA: IEEE Computer Society, 1992: 377 – 382.
- [11] MEHR A S, CHEN T. Representations of linear periodically time-varying and multirate systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(9): 2221 – 2229.
- [12] ALBERTOS P, SALT J, TORNERO J. Dual-rate adaptive control[J]. *Automatica*, 1996, 32(7): 1027 – 1030.
- [13] DING F, CHEN T. Modeling and identification of multirate systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(1): 105 – 122.
- [14] WANG J, CHEN T, HUANG B. Closed identification via output fast sampling[J]. *Journal of Process Control*, 2004, 14(5): 555 – 570.
- [15] LI D, SHAH S L, CHEN T W. System identification issues in multirate systems[C] // *Proceedings of the 1999 IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*. Edmonton, AB, Canada: IEEE Press, 1999: 9 – 12.
- [16] ARAKI M, YAMAMOTO. Multivariable multirate sampled-data systems: state-space description, transfer characteristics, and nyquist criterion[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, AC-31(2): 145 – 154.
- [17] JURY E. A note on multirate sampled-data systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, 12(3): 319 – 320.
- [18] SHENOY R G. Analysis of multirate components and application to multirate filter design[C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Adelaide, Aust: IEEE Press, 1994: 121 – 124.
- [19] CHAI L, QIU L. Topics on multirate systems: frequency response, interpolation, model validation[C] // *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney: IEEE Press, 2000, 4290 – 4295.
- [20] YAMAMOTO Y. Frequency response and its computation for sampled-data systems[J]. *Systems and Networks: Mathematical Theory and Applications, Mathematical Research*, 1994, MTNS-93(79): 573 – 574.
- [21] YAMAMOTO Y, KHARGONEKAR P P. Frequency response of sampled-data systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(2): 166 – 176.
- [22] AKKARAKARAN S, VAIDYANATHAN P P. Bifrequency and bispectrum maps: a new look at multirate systems with stochastic inputs[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, 48(3): 723 – 736.
- [23] AKKARAKARAN S, VAIDYANATHAN P P. New insights into multirate systems with stochastic inputs using bifrequency analysis[C] // *Proceedings of in Proceedings IEEE International Symp Circuits and Systems*. Monterey, CA: IEEE Press, 1998: 53 – 56.
- [24] SATHE V P, VAIDYANATHAN P. Effects of multirate systems on the statistical properties of random signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(1): 131 – 146.
- [25] GUSTAFSSON F, GUNNARSSON S, LJUNG L. Shaping frequency-dependent time resolution when estimating spectral properties with parametric methods[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, 45(4): 1025 – 1035.
- [26] SEKHAR S C, SREENIVAS T V. Auditory motivated level-crossing approach to instantaneous frequency estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(4): 1450 – 1462.
- [27] GILLBERG J, GUSTAFSSON F. Frequency-domain continuous-time AR modeling using non- uniformly sampled measurements[C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Philadelphia, PA: IEEE Press, 2005, 105 – 108.
- [28] LU L, SONG Z, LI P. A weighted band-wise identification method for multirate sampled-data systems based on wavelet multiresolution analysis[C] // *Proceedings of Circuits and Systems, IEEE APCCAS*. Tianjin, China: IEEE Press, 2000: 752 – 755.
- [29] 吕立华, 宋执环, 李平. 一种基于小波多分辨率分析的多采样率系统辨识方法[J]. *控制理论与应用*, 2002, 19(2): 225 – 228. (LV Lihua, SONG Zhihuan, LI Ping. An identification method for multirate sampled-data systems based on wavelet multiresolution analysis[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(2): 225 – 228.)
- [30] VALENS C. The fast lifting wavelet transform[EB/OL]. <http://citeseer.ist.psu.edu/valens99fast.html>, 2001.
- [31] 吴渝, 刘伯红, 李刚. 基于提升方案的自适应小波变换[J]. *计算机应用研究*, 2002, 19(6): 18 – 20. (WU Yu, LIU Bohong, LI GANG. Adaptive wavelet transforms using lifting[J]. *Application Research of Computers*, 2002, 19(6): 18 – 20.)
- [32] YOO H, JEONG J. A unified framework for wavelet transforms based on the lifting scheme[C] // *Proceedings of Image Processing, International Conference*. Thessaloniki: IEEE Computer Society, 2001: 792 – 795.
- [33] 蒋林, 肖建. 非线性系统的模糊输入多采样率数字控制[J]. *电机与控制学报*, 2007, 11(3): 266 – 270. (JIANG Lin, XIAO Jian. Fuzzy multirate input digital control for nonlinear systems[J]. *Electric Machines and Control*, 2007, 11(3): 266 – 270.)
- [34] 沈希忠, 史习智. 多抽样率分析在柴油机汽缸压力神经网络识别中的研究[J]. *上海大学学报(自然科学版)*, 2003, 9(5): 393 – 397. (SHEN Xizhong, SHI Xizhi. Multirate analysis on neural network

- recognition of diesel cylinder pressure[J]. *Journal of Shanghai University (Natural Science)*, 2003, 9(5): 393 – 397.)
- [35] SALT J, TORNERO J, et al. Modeling of non-conventional sampled data systems[C] // *Proceedings of Second IEEE Conference on Control Application*. Vancouver: IEEE Press, 1993: 631 – 635.
- [36] DING F, CHEN T. Combined parameter and output of dual-rate systems using an auxiliary model[J]. *Automatica*, 2004, 40(10): 1739 – 1748.
- [37] LAHALLE E, PEREZ P, FLEURY G. Simplified LMS algorithm in the case of non-uniformly sampled signals[C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. HongKong: IEEE Press, 2003, 81 – 84.
- [38] BRONEZ T P. Spectral estimation of irregularly sampled multidimensional processes by generalized prolate spheroidal sequences[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1988, 36(12): 1862 – 1873.
- [39] BOS R, WAELE S, BROERSEN P M T. Autoregressive spectral estimation by application of the burg algorithm to irregularly sampled data[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2002, 51(6): 1289 – 1294.
- [40] LJUNG L. Guest editorial: special issue on system identification[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(10): 1473.
- [41] VERHAEGEN M. Identification of the deterministic part of MIMO state space models given in innovations from input-output data[J]. *Automatica*, 1994, 30(1): 61 – 74.
- [42] VAN OVERSCHEE P, DE MOOR B. N4SID: subspace algorithm for the identification of combined deterministic-stochastic system[J]. *Automatica*, 1994, 30(1): 75 – 93.
- [43] LI W, RAGHAVAN H, SHAH S. Subspace identification of continuous time models for process fault detection and isolation[J]. *Journal of Process Control*, 2003, 13(5): 407 – 421.
- [44] SAGARA S, ZHAO Z. Numeric integration approach to on-line identification of continuous-time systems[J]. *Automatica*, 1990, 26(1): 63 – 79.
- [45] HUSELSTEIN E, GARNIER H. An approach to continuous-time model identification from non-uniformly sampled data[C] // *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Control and Decision*. Las Vegas: IEEE Press, 2002, 622 – 623.
- [46] GARNIER H, MENSLER M, RICHARD A. Continuous-time model identification from sampled data: implementation issues and performance evaluation[J]. *International Journal Control*, 2003, 76(13): 1337 – 1357.
- [47] 王志中, 张钟俊. 非均匀采样系统的建模方法[J]. *控制理论与应用*, 1985, 2(4): 34 – 43.
(WANG Zhizhong, ZHANG Zhongjun. A method for modelling nonuniformly sampled systems[J]. *Control Theory & Applications*, 1985, 2(4): 34 – 43.)
- [48] DING F, XIE X, FANG C. The convergence of the forgetting factor algorithm for identifying time-varying systems[J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 1994, 11(5): 634 – 639.
- [49] 丁锋, 谢新民, 方崇智. 时变多变量系统辨识的一种方法[J]. *控制与决策*, 1994, 9(1): 54 – 58.
(DING Feng, XIE Xinmin, FANG Chongzhi. A new method of time-varying multivariable system identification[J]. *Control and Decision*, 1994, 9(1): 54 – 58.)
- [50] CHEN T, QIU L. H_∞ design of general multirate sampled-data control systems[J]. *Automatica*, 1994, 30(7): 1139 – 1152.
- [51] GODBOUT L, JORDAN D, APOSTOLAKIS I. Closed-loop model for general multirate digital control systems[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 1990, 137(5): 329 – 336.
- [52] SUN L, LIU W, SANO A. Over-sampling approach to close-loop identification[C] // *Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control*. San Diego: IEEE Press, 1997: 1253 – 1258.
- [53] LI D. Identification of fast-rate models from multirate data[J]. *International Journal of Control*, 2001, 74(7): 680 – 689.
- [54] SUN L, OHMORI H, SANO A. Output intersampling approach to direct closed-loop identification[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(12): 1936 – 1941.
- [55] CHAI L, QIU L. Model validation of multirate systems from time-domain experimental data[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(2): 346 – 351.

作者简介:

倪博溢 (1982—), 男, 清华大学自动化系博士研究生, 目前研究兴趣包括多采样率系统的辨识和建模、数据压缩等, E-mail: nby00@mails.tsinghua.edu.cn;

萧德云 (1945—), 男, 1970年毕业于清华大学, 现任清华大学自动化系教授、博士生导师, 主要从事辨识建模、故障诊断、混合动态系统、多传感器融合、计算机应用等领域的教学和科研, E-mail: xiaody@tsinghua.edu.cn.