文章编号: 1000−8152(2009)02−0133−06

带最小批量约束的计划问题及其拉格朗日松弛算法

潘常春, 杨根科, 孙　凯, 陆恒云

(上海交通大学 自动化系, 上海 200240)

摘要: 针对一类带最小批量约束的计划问题, 提出了基于拉格朗日松弛策略求解算法. 通过拉格朗日松弛策略, 将原问题转为一系列带最小批量约束的动态经济批量W-W(Wagner-Whitin)子问题. 提出了解决子问题且其时间复杂度$O(T^3)$的最优前向递推算法. 对于拉格朗日对偶问题, 用次梯度算法求解, 获得原问题的下界. 若对偶问题的解是不可行的, 通过固定装设变量, 求解一个剩余的线性规划问题来进行可行化处理. 最后, 数据仿真验证了算法的有效性.

关键词: 计划问题; 最小批量约束; 拉格朗日松弛; 次梯度算法

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

A Lagrange relaxation algorithm for capacitated lot-size problem(CLSP) with minimum lot-size constraint

PAN Chang-chun, YANG Gen-ke, SUN Kai , LU Heng-yun

(Department of Automation, Shanghai Jiaotong Unviversity, Shanghai 200240 China)

Abstract: A Lagrange relaxation heuristic-based procedure is presented to solve the capacitated lot-size problem(CLSP) with minimum lot-size constraint. The problem is first decomposed into a series of sub-problems W-W(Wagner-Whitin) with dynamic economic minimum lot-size constraint. To deal with the sub-problems, an optimal forward iterative algorithm with runtime complexity of $O(T^3)$ is proposed. The Lagrange dual problem is then handled by the sub-gradient optimization algorithm to obtain a tight lower bound. If the solution to the Lagrange dual problem is infeasible, the setup variables are fixed and the remaining problem is reformulated as a linear programming problem which can be solved efficiently by any off-the-shelf solver. Finally, the computational experiments demonstrate the algorithm's efficiency.

Key words: CLSP; minimum lot-size; Lagrange relaxation; sub-gradient optimization

1　引言(Introduction)

CLSP(capacitated lot-size problem)问题也称带能力约束的单级多项动态批量问题, 是几十年来一直被广泛研究和关注的热点问题, 这个问题有广泛的工业背景, 因此具有很强的应用研究价值, 自文献[1]首次提出W-W模型, 近几十年来, 很多学者对这个问题做了广泛的研究[2,3]. 文献[4∼7]从模型重构角度出发, 通过数学规划方法旨在获得问题的最优解或次优解. 文献[8]研究基于Lagrangean松弛策略的大规模CLSP, 考虑多重资源约束. 文献[9]证明了带约束的单级单项批量计划问题在一般意义下是普通NP-hard的. 因此作为一个更加泛化的问题, CLSP也至少是NP-Hard的. 在这种背景下, 很多研究者越来越关注起启发式策略, 文献[10,11]分别基于线性规划(LP)松弛策略和贪婪式启发策略来获得问题的近优解. 文献[12]采用了集成遗传算法(GA)和LP的两步优化策略. 文献[13]采用混合遗传算法求解了某类车间集成计划于调度问题. 文献[14]采用Lagrangean松弛策略和启发算法相结合的混合算法. 对于工业界的实际问题, 文献[15]研究了基于蚁群算法(ACO)的热轧计划调度算法. 文献[16]从鲁棒调度的角度出发, 研究了实际调度问题中的参数摄动的影响.

本研究以某制造企业的实际问题为研究背景, 与以往问题不同的是, 我们考虑了生产中的最小批量约束. 在某些产品的生产过程中, 出于生产成本、设备或者管理上的考虑, 产品在设备上一旦生产就必须大于一个给定的批量, 比如电炉熔炼合金就必

收稿日期: 2007−09−07; 收修改稿日期: 2008−07−04.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60574063).

须大于一定的重量. 考虑到现代生产模式下, 多品种、小批量需求, 这个就问题就愈发显得突出. 因此, 该研究具有现实的意义. 本文的主要贡献是对带最小批量约束的CLSP问题, 通过分解–合成获得问题的近优解, 其中通过对子问题的研究, 给出了带最小批量约束下W-W模型的$O(T^3)$时间复杂度的最优计划策略.

2 数学模型描述(Problem formulation)

符号描述:

t: 周期下标, $t=1,\cdots,T$;

j: 产品类型, $j=1,\cdots,J$.

参数表示:

d_{jt}: 在周期t内, 产品j的需求;

m_{jt}: 在周期t内, 产品j生产的最小批量;

a_j: j的单位能力需求;

h_{jt}: 单位产品j从周期t到$t+1$的库存费用;

s_{jt}: 产品j在周期t中生产的装设费用;

p_{jt}: 单位产品j在周期t中生产费用;

r_t : t中资源能力限制.

自变量定义:

X_{jt}: 在周期t内生产产品j的批量;

Y_{jt}: 生产装设变量, 若产品j在t中生产为1, 否则为0;

I_{jt}: 带进周期t的产品j的库存.

数学模型(P):

$$\min\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=2}^{T+1}h_{j,t-1}I_{jt}+\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{J}(p_{jt}X_{jt}+s_{jt}Y_{jt}) \tag{1}$$

$$\text{s.t. } I_{jt}+X_{jt}-I_{j,t+1}=d_{jt},\ \forall j,t, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{J}X_{jt}\cdot a_j\leqslant r_t,\ \forall t, \tag{3}$$

$$X_{jt}\leqslant\left({}^{r_t}\!/_{a_j}\right)\cdot Y_{jt},\ \forall j,t, \tag{4}$$

$$X_{jt}\geqslant Y_{jt}\cdot m_{jt},\ \forall j,t, \tag{5}$$

$$X_{jt}\geqslant 0,\ I_{jt}\geqslant 0,\ Y_{jt}\in\{0,1\},\forall j,t, \tag{6}$$

$$I_{j1}=0,\forall j,t. \tag{7}$$

其中: 式(1)为优化目标, 包括库存费用、装设费用和生产费用; 式(2)表示物料平衡; 式(3)为能力约束; 式(4)建立了装设变量和生产批量之间的联系; 式(5)为最小批量约束; 式(6)(7)为变量类型约束和初始化库存, 表明生产不允许拖期.

注 问题(P)和一般的CLSP模型不同地方有两点: i) 增加了式(5)的最小批量约束; ii) 最后库存$I_{j,T+1}$不一定为0.

3 基于Lagrangean松弛的求解策略(Lagrangean relaxation-based strategy)

3.1 Lagrangran松弛(Lagrangean relaxation)

给定一组Lagrangran乘子$\beta=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_T]$, 其中$\beta_t\geqslant 0$, 将式(3)通过这组Lagrangean算子松弛到目标(1)中, 得Lagrangean函数

$$\begin{aligned}L(\boldsymbol{\beta})=\min\Big\{&\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=2}^{T+1}h_{j,t-1}\cdot I_{jt}+\\&\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}X_{jt}\cdot(p_{jt}+\beta_t\cdot a_j)+\\&\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}s_{jt}\cdot Y_{jt}-\sum_{t=1}^{T}r_t\cdot\beta_t\Big\},\end{aligned} \tag{8}$$

s.t. 式(2)(4) $\sim$ (6).

由于$\sum_{j=1}^{J}X_{jt}\cdot a_j\leqslant r_t$, $\boldsymbol{\beta}\geqslant 0$, $L(\boldsymbol{\beta})$是原问题(P)的一个下界. 为了获得问题(P)的最紧的下界, 定义如下的Lagrangean对偶问题:

$$LD=\max\left(L(\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\beta}\geqslant 0\right). \tag{9}$$

求解Lagrangean对偶问题LD是一个不断迭代的过程, 首先给定一个可行的Lagrangean乘子β, 然后计算Lagrangean函数$L(\boldsymbol{\beta})$, 根据计算结果来更新Lagrangean乘子, 然后重复上述过程. 所以如何解决$L(\boldsymbol{\beta})$成为解决全部问题的关键所在. 对于函数$L(\boldsymbol{\beta})$, 由于各产品生产之间耦合关系已经被松弛, 可以将$L(\boldsymbol{\beta})$分解为J个子问题来解决, 考虑第j个子问题:

$$\begin{aligned}&L_j(\boldsymbol{\beta})=\\&\min\{\sum_{t=2}^{T+1}h_{jt-1}\cdot I_{jt}+\sum_{t=1}^{T}\{(p_{jt}+\beta_t\cdot a_j)\cdot X_{jt}+\\&\qquad s_{jt}\cdot\delta(X_{jt})\}\},\end{aligned} \tag{10}$$

$$\text{s.t. } I_{jt}+X_{jt}-I_{j,t+1}=d_{jt},\ \forall t, \tag{11}$$

$$X_{jt}\geqslant\delta\left(X_{jt}\right)\cdot m_{jt},\ \forall t, \tag{12}$$

$$X_{jt}\geqslant 0, I_{jt}\geqslant 0,\ \forall t,\ I_{j1}=0. \tag{13}$$

其中$\delta(x)=\begin{cases}1,\ x>0,\\0,\ 其他.\end{cases}$ 上述问题为一个带最小批量、无限能力、单产品动态批量问题. 从上式可以看出除去约束(11)之外, $L_j(\boldsymbol{\beta})$就是一个标准的W-W模型. 因此, 称问题(9)~(12)为带最小批量约束W-W模型(E-WW).

3.2 E-WW模型的前向计划策略(The optimal forward plan policy)

对于标准W-W模型(S-WW), 一个非常基本的结论是: 存在一个最优解, 有$I_tX_t=0$, 对$\forall t$. 即在同

一个周期内, 同时存在库存不为0, 又有生产的计划策略不可能对解的质量有提升[17]. 尽管E-WW和S-WW模型非常相似, 但是这个结论对E-WW已经不适用, 这就使得针对S-WW的很多有用的结果(见文献[18,19])都不成立了.

注　由于子问题是单产品问题, 所以直接用I_t, X_t分别表示进入t的库存和t中的生产数量.

对于E-WW模型, 有如下定理:

定理 1　若对于任意一个周期t都有$d_t \geqslant m_t$, 则E-WW模型与S-WW模型是等价的.

证　首先证明S-WW的最优解是E-WW的一个上界, 根据文献[1]的证明, 存在一个S-WW的最优解X^*, 对任意周期t有$X_t^* = 0$或者存在一个周期$k, t \leqslant k \leqslant T$, 有$X_t^* = \sum\limits_{i=t}^{k} d_i$. 根据已知条件, 对$\forall t$, 有$d_t \geqslant m_t$, 所以$X^*$是E-WW的一个可行解, 因此是一个E-WW问题的上界. 而又因为E-WW是属于S-WW的一类特殊问题(E-WW相对于S-WW而言, 增加了一条最小批量约束). 所以任何一个S-WW的最优解必定是E-WW问题的下界.　　证毕.

定理 2　存在一个E-WW模型的最优解, 对任意一个周期t, $X_t = 0$ 或者m_t或者存在一个周期k, $k \geqslant t$有$I_t + X_t = \sum\limits_{j=t}^{k} d_j$.

证　通过反证法证明. 假设不存在满足上述条件E-WW的最优解, 则一定存在一个最优解, 对于周期t的生产数量X_t, 必定存在一个最小的周期$k, k > t$, 有: $\sum\limits_{\tau=t}^{k-1} d_\tau < I_t + X_t < \sum\limits_{\tau=t}^{k} d_\tau$, 分下面两种情况讨论:

若$p_t + \sum\limits_{\tau=t}^{k-1} h_r \geqslant p_k$: 构造一个新的计划, 因为$I_t + X_t > \sum\limits_{\tau=t}^{k-1} d_\tau$, 减少$X_t$至$X_t'$, 使得

$$I_t + X_t' = \max(m_t + I_t, \sum_{\tau=t}^{k-1} d_\tau).$$

令$\Delta X_t = X_t - X_t'$, 根据物料平衡, 将ΔX_t放在k中生产. 对周期t来讲, 由于生产减少, 比原计划减少费用: $\Delta f^- = \Delta X_t \cdot (p_t + \cdot \sum\limits_{\tau=t}^{k-1} h_\tau)$; 对于周期$k$来讲, 比原计划增加费用: $\Delta f^+ = \Delta X_t \cdot p_k$. 所以$\Delta f^- \geqslant \Delta f^+$, 若$\Delta f^- = \Delta f^+$, 根据假设说明存在和原有计划一样最优的计划, 而此时$I_t + X_t' = \max(m_t + I_t, \sum\limits_{\tau=t}^{k-1} d_\tau)$与假设矛盾, 若$\Delta f^- > \Delta f^+$说明原计划非最优,与假设矛盾;

若 $p_t + \sum\limits_{\tau=t}^{k-1} h_r < p_k$: 构造一个新的计划, 因为$I_t + X_t < \sum\limits_{\tau=t}^{k} d_\tau$, 增加$X_t$至$X_t'$, 使得$I_t + X_t' = \sum\limits_{\tau=t}^{k} d_\tau$,令$\Delta X_t = X_t' - X_t$, 对于周期$k$来说, 至少减少了$\Delta X_t$的生产数量, 比原计划减少费用: $\Delta f^- = p_k \cdot \Delta X_t$; 根据物料平衡, 周期$t$中增加了$\Delta X_t$的生产数量, 因此比原计划增加费用: $\Delta f^+ = (p_t + \sum\limits_{\tau=t}^{k-1} h_\tau) \cdot \Delta X_t$. 所以$\Delta f^- > \Delta f^+$, 这说明假设的最优解不是最优的, 与假设矛盾.　　证毕.

推论 1　存在一个E-WW模型的最优解, 若存在周期t, 有$I_t X_t > 0$, 则一定有一个确定的周期l, $X_l = m_l$, 其中l为$< t$的周期中, 最接近t的那个生产装设周期.

证　根据定理2, 只需排除两点: 1) $X_l \neq 0$; 2) 不存在一个$k \geqslant l$有$I_l + X_l = \sum\limits_{j=l}^{k} d_j$. 因为$I_t \cdot X_t > 0$, 必有$X_l + I_l > \sum\limits_{\tau=t}^{t-1} d_\tau$, 因此不存在$k \in \{l, \cdots, t-1\}$, 使得$X_l + I_l = \sum\limits_{\tau=t}^{k} d_\tau$, 对于$k \in \{t, \cdots, T\}$, 如果存在$X_l + I_l = \sum\limits_{\tau=t}^{k} d_\tau$, 可证明这个计划一定不是最优的, 证明过程与定理2证明类似, 此处不再赘述.

引理 1　在给定$I_t = 0$, 则可以独立考虑两个子计划问题, 即周期$(1, \cdots, t-1)$和周期$(t, \cdots, T)$的计划问题.

证　参见文献[1,17], 此结论对于E-WW模型仍然适用.

在给出求解E-WW模型的最优策略之前, 首先给出一些符号表示: $F(t)$: 一个t周期计划问题的最小费用; $\hat{F}(t)$: 在约束$I_{t+1} = 0$下的t周期计划问题的最小费用, 若约束$I_{t+1} = 0$无论如何都不能满足, 则$\hat{F}(t) = \infty$;

$F(t, l)$:一个t周期计划问题的最小费用,并且l是满足$l \leqslant t, I_l = 0$中最后一个生产装设周期, 则有

$$F(t) = \min_{l \in \{1, \cdots, t\}} \{F(t, l)\}. \tag{14}$$

对于确定的 l, 由引理1可得, 可分别考虑两个更小规模周期计划问题, 即$\{1, \cdots, l-1\}$和$\{l, \cdots, t\}$. 由此给出两组递推公式:

$$F(t) = \min_{l \in \{1, \cdots, t\}} \{C(t, l) + \hat{F}(l-1)\}, \tag{15}$$

$$\hat{F}(t) = \min_{l \in \{1, \cdots, t\}} \{\hat{C}(t, l) + \hat{F}(l-1)\}. \tag{16}$$

其中: $C(t, l)$为周期计划问题$\{l, \cdots, t\}$的最小费用; $\hat{C}(t, l)$为考虑约束$I_{t+1} = 0$下的周期计划问题$\{l, \cdots, t\}$的最小费用, 若约束$I_{t+1} = 0$无论如何

都不能满足, 则$\hat{C}(t,l)=\infty$. 初始值定义为

$$C(1,1)=\begin{cases} s_1+m_1\cdot p_1+h_1\cdot(m_1-d_1),\ m_1>d_1,\\ s_1+d_1\cdot p_1, \qquad\qquad\qquad m_1\leqslant d_1,\end{cases}$$

$$\hat{C}(1,1)=\begin{cases} +\infty, \qquad\qquad m_1>d_1,\\ s_1+d_1\cdot p_1,\ m_1\leqslant d_1,\end{cases}$$

$$\hat{F}(0)=0.$$

3.3 算法复杂性分析(Algorithmic complexity analysis)

由式(15)(16)可知, 如果要求解$\hat{F}(t)$, 需要对任意$l\in\{1,\cdots,t\}$计算$\hat{C}(t,l)$, 而求解$\hat{C}(t,l)$问题, 对于固定的 l, 根据l的定义, 存在一个最优解, 最多发生$(t-l+1)$次生产装设, 且每次生产的数量, 除最后一次生产装设之外, 都等于所在装设周期规定的最小批量. 假设最后生产发生时刻在$\tilde{\tau}$, 则$X_{\tilde{\tau}}=\max(m_{\tilde{\tau}},\sum\limits_{\tau=\tilde{\tau}}^{t}d_\tau-I_{\tilde{\tau}})$. 因此$\hat{C}(t,l)$的复杂度为$O(t)$, 则$T$个周期的计划$\hat{F}(T)$的算法复杂度为$O(T^3)$, 显然$F(T)$的算法复杂度与$\hat{F}(T)$一致.

3.4 Lagrangean对偶问题次梯度优化算法(Subgradient optimization for the Lagrangean dual problem)

由于其拉格朗日函数是分段线性且凹的, 用次梯度优化算法解决Lagrangean对偶问题. 次梯度优化算法是在Lagreagean松弛过程中求解整数规划的常用手段[20].

次梯度优化的两个关键步骤: 1) Lagrangean乘子的更新; 2) 步长的选取. 在算法中, Lagrangean乘子更新为

$$\boldsymbol{\beta}^{k+1}=\max\left\{0,\ \boldsymbol{\beta}^k+\lambda^k\cdot\boldsymbol{g}^k\right\}.$$

其中g^k(T维向量)为$L(\boldsymbol{\beta})$在$\boldsymbol{\beta}^k$处的次梯度, 定义为: $\boldsymbol{g}^k=[g_t^k], g_t^k=\sum\limits_{j=1}^{J}a_jX_{jt}^k-r_t$.

λ^k为第k次迭代的步长. 一般情况下, 步长计算如下:

$$\lambda^k=\sigma^k\frac{\big(Z^u-L(\boldsymbol{\beta}^k)\big)}{\|\boldsymbol{g^k}\|^2}.$$

其中: $\sigma^k\in(0,2]$为调节参数, Z^u为一个$LD(\boldsymbol{\beta})$的上界估计. 在算法实施过程中, 取$\sigma^1=1.8$, $Z^u=1.08\cdot Z^*$, Z^*为当前获得的最好的下界. 如果在迭代过程中, 如果连续20次迭代都没有使得解质量有所提升, 则$\sigma^{k+1}=0.8\sigma^k$, 如果连续100次迭代没有解质量的提升则算法结束(参数选取参考文献[8]).

3.5 可行化处理(Procedure for feasibility)

解决Lagrangean对偶问题以后所得的解不一定是可行解, 尤其是当能力比较紧的时候, 这个时候需要对这个不可行解做可行化处理. 保留Lagrangean对偶问题解中对应的装设变量Y_{it}, 重新优化生产的数量, 此时的原问题可转化为一个简单的纯线性规划问题.

4 仿真结果(Computational experiments)

首先为了验证算法的有效性, 测试子问题E-WW的前向最优递归策略, 用文献[1]同样的数据同时增加一个最小批量约束, 见表1. 通过两组最小批量来分别验证定理1和定理2.

表 1 E-WW测试数据

Table 1 Test data for E-WW

时间	需求	装设成本	库存成本	最小批量	
				例1	例2
1	69	85	1	10	100
2	29	102	1	10	50
3	36	102	1	10	200
4	61	101	1	10	80
5	61	98	1	10	100
6	26	114	1	10	150
7	34	105	1	10	30
8	67	86	1	10	20
9	45	119	1	10	120
10	67	110	1	10	80
11	79	98	1	10	70
12	56	114	1	10	70

表 2 数据产生方式

Table 2 Mode of generating the test data

参数名称	生成方式
问题定义	小规模: $J=500, T=10$ 中规模: $J=1000, T=20$ 大规模: $J=2000, T=30$
周期性需求d_{jt}	$U[100,1000]$
单位产品库存成本h_{jt}	$U[0,1]$
单位生产成本p_{jt}	$U[0,1]$
装设成本s_j	$U[50,100]$
单位产品的能力需求a_j	$U[1,5]$
最小批量m_{jt}	$U[50,500]$
周期能力约束r_t	$k_t\sum\limits_j a_j\cdot d_{jt}$

在例1中, 所有的最小批量都小于对应的需求; 在例2中, 最小批量任意选取. 对于例1, 最优解的生产批量依次为: $X=[98,0,97,0,121,0,0,112,$

$0, 67, 135, 0]$, 目标值: 864和文献[1]的结果一致; 对于例2, 最优解的生产批量依次为: $X = [134, 0, 0, 80, 102, 0, 0, 112, 0, 80, 122, 0]$, 目标值: 906. 所以在不同批量约束下, E-WW的结果和S-WW结果有可能差别很大. 参考文献[21]的数据生成方式, 分别生成大、中、小3种规模的随机问题, 并在能力紧和松两种方式下进行仿真, 仿真参数在表2中详细列出. 仿真基于VC++平台, 计算机为PentiumIV 2.8GHz, 1G内存PC, 线性规划求解由Lingo8.0实现. 对于3类问题, 分别产生10组数据, 表3和表4分别给出两种情况下的平均结果. 在求解Lagrangean对偶问题, 对于紧能力情形, Lagrangean乘子β初始值取大一些, 对于松能力情形, β初始值选取尽量小一些. 通过仿真发现, 初始值的选取对结果影响不大, 仅仅影响了收敛的速度. 表3和表4中, $\mathrm{Gap} = \dfrac{\mathrm{SOL} - \mathrm{LB}}{\mathrm{LB}} \times 100\%$表示所得解和下界LB之间的对偶间隙. 由仿真结果看出, 最优解的间隙都在1%以内, 并且在松能力情形下, 无论收敛时间和解的质量上都比紧能力情形要好得多. 主要原因是能力宽松时, 下界对应的解是可行解的概率相对较大.

注 1　紧能力情形: $k_t = U[1, 1.5]$; 松能力情形: $k_t = U[1.5, 2]$.

表 3　紧能力情形下的仿真结果

Table 3　Computational results with tight capacity

J	T	Gap/%	CPU时间/s	迭代次数
500	10	0.35	27.73	258
1000	20	0.23	85.92	569
2000	30	0.59	203.23	1325
平均值	—	0.39	105.63	—

表 4　松能力情形下的仿真结果

Table 4　Computational results with loose capacity

J	T	Gap/%	CPU时间/s	迭代次数
500	10	0.03	18.64	185
1000	20	0.12	52.59	337
2000	30	0.08	156.73	682
平均值	—	0.076	75.88	—

图1给出了某个小规模问题的Lagrangean对偶问题的收敛曲线, 当能力紧的时候, 曲线收敛慢, 而当能力宽松的时候, 则迅速收敛. 大、中规模问题与此类似.

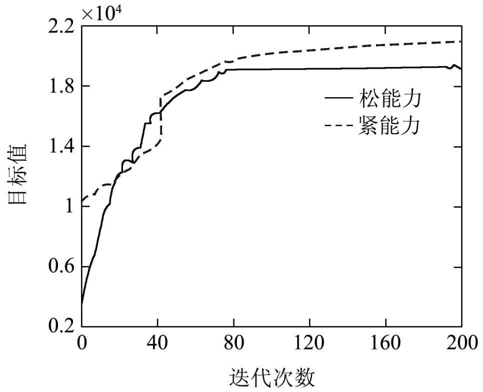

图 1　两种能力约束下的Lagrangean对偶问题收敛曲线

Fig. 1　Convergent curves of the Lagrangean dual problem under two circumstances of different capacity mode

4.1　总结(Conclusion)

随着生产制造模式的不断更新, 最小批量问题也显得越来越显著. 本课题是对新的生产模式下出现的生产问题的一种探讨, 是对经典CLSP问题的一种扩展. 整个过程以求解Lagrangean对偶问题为框架, 以解决子问题的最优策略为核心. 以仿真结果验证算法的有效性. 需要指出的是, 在实际的生产过程中, 还有很多没有考虑到的因素, 如在装设费用延用条件下带最小批量约束的CLSP问题, 考虑计划和调度的集成问题, 以及解的鲁棒性问题等等, 这些问题都将可成为以后的研究方向.

参考文献(References):

[1] WANGER H M, WHITIN T M. Dynamic version of the economic lot sizing model[J]. *Management Science*, 1958, 5(1): 89 – 96.

[2] DREXL A, KIMMS A. Lot sizing and scheduling–survey and extensions[J]. *European Journal of Operational Research*, 1997, 99(2): 221 – 235.

[3] JENS R, DEGRAEVE Z. Meta-heuristics for dynamic lot sizing: A review and comparison of solution approaches[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 177(5): 1855 – 1875.

[4] BARANY I, VAN ROY T J, WOLSEY L A. Strong formulations for multi-item capacitated lotsizing[J]. *Management Science*, 1984, 30(12): 1255 – 1261.

[5] EPPEN G D, MARTIN R K. Solving multi-item capacitated lot-sizing problems using variable redefinition[J]. *Operations Research*, 1987, 35(3): 832 – 848.

[6] WOLSEY A A. Solving multi-item lot-sizing problems with an MIP solver using classification and reformulation[J]. *Management Science*, 2002, 48(12): 1587 – 1602.

[7] 高振, 唐立新. CLSP问题的分枝定价算法[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2003, 24(1): 11 – 14.
(GAO Zhen, TANG Lixin. Branch-and-Price algorithm for CLSP[J]. *Journal of Northeastern University(Nat & Sci)*, 2003, 24(1): 11 – 14.)

[8] DIABY M, BAHL H C, KARWAN M H, et al. A lagrangean relaxation approach for very-large-scale capacitated lot-sizing[J]. *Management Science*, 1992, 38(2): 1329 – 1340.

[9] LORIAN M, LENSTRA J K, RINNOOY A H G. Deterministic production planning: algorithms and complexity [J]. *Management Science*, 1980, 26(4): 669 – 679.

[10] BRANDIMARTE A P, D'ORAZIO S. LP-based heuristics for the capacitated lot-sizing problem: the interaction of model formulation and solution algorithm[J]. *International Journal of Production Research*, 2002, 40(2): 441 – 458.

[11] NEWSON E F P. Multi-item lot size scheduling by heuristic part 1: with fixed resources[J]. *Management Science*, 1975, 21(10): 1186 – 1193.

[12] 常剑峰, 钟约先, 韩赞东. 制造系统中能力约束下的生产批量计划优化方法[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2004, 44(5): 605 – 608.
(CHANG Jianfeng, ZHONG Yuexian, HAN Zandong. Optimal method of capacitated lot sizing planning in manufacturing systems[J]. *Journal of TshingHua University(Sci & Tech)*, 2004, 44(5): 605 – 608.)

[13] 张晓东, 严洪森. 一类Job-shop车间生产计划和调度的集成优化[J]. 控制与决策, 2003, 18(5): 581 – 584.
(ZHANG Xiaodong, YAN Hongsen. Integration optimization of production planning and scheduling for a kind of job-shop[J]. *Control and Decision*, 2003, 18(5): 581 – 584.)

[14] 唐立新, 杨自厚, 王梦光. CIMS下单级单资源约束下的生产批量计划的新算法[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(2): 213 – 216.
(TANG Lixin, YANG Zihou, WANG Mengguang. A new algorithm of th CSLSP in CIMS[J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(2): 213 – 216.)

[15] 刘士新, 宋键海, 周山长. 热轧带钢批量计划优化模型及计算[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(2): 243 – 248.
(LIU Shixin, SONG Jianhai, ZHOU Shanchang. Model and algorithm for solving hot strip rolling batch planning problems[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(2): 243 – 248.)

[16] 丁然, 李歧强, 孙同景, 等. 虑鲁棒性的生产调度希望值模型[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(5): 819 – 822.
(DING Ran, LI Qiqiang, SUN Tongjing, et al. Expected value model of production schedule by considering robustness constraints[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(5): 819 – 822.)

[17] ZABEL E. Some generalizations of an inventory planning horizon theorem[J]. *Management Science*, 1964 ,10(3): 465 – 471.

[18] FEDERGRUEN A, TZUR M. A simple forward algorithm to solve general dynamic lot-sizing models with n periods in *O(nlogn)* and $O(n)$ time[J]. *Management Science*, 1991, 37(1): 909 – 925.

[19] WANGELMANS A, HOESEL S V, KOLEN A. Economic lot sizing: an *O(nlogn)* algorithm that runs in linear time in the wagner-whitin case[J]. *Operations Research*, 1992, 40(1): 145 – 156.

[20] FISHER M L. The Lagrangean relaxation method for solving integer programming problems[J]. *Management Science*, 1981, 22(1): 1 – 18.

[21] DE ARAUJOA S A, ARENALESB M N, CLARKC A R. Lot sizing and furnace scheduling in small foundries[J]. *Computers & Operations Research*, 2008, 35(1): 916 – 932.

作者简介:

潘常春 (1979—), 男, 博士研究生, 研究方向为生产流程建模与优化, E-mail: pan_cc@sjtu.edu.cn;

杨根科 (1963—), 男, 博士生导师, 研究方向为混合系统控制、供应链与网络协议分析, E-mail: gkyang@sjtu.edu.cn;

孙 凯 (1979—), 男, 博士研究生, 研究方向为生产调度与优化算法与软件设计, E-mail: sunkai@sjtu.edu.cn;

陆恒云 (1982—), 女, 博士研究生, 研究方向为组合优化算法与生物信息学, E-mail: luhy@sjtu.edu.cn.