文章编号: 1000−8152(2009)02−0179−04

# 二维非线性临界解析动态系统的局部渐近稳定性

倪郁东[1], 沈吟东[2]

(1. 合肥工业大学 数学系, 安徽 合肥 230009; 2. 华中科技大学 控制科学与工程系, 湖北 武汉 430074)

**摘要**: 考察具有一对共轭纯虚数特征值的二维非线性临界解析动态系统的局部渐近稳定性. 首先在非奇异线性坐标变换和时间尺度变换下, 将其化成标准形式. 之后, 运用形式级数法的思想, 通过构造多组线性方程组, 给出了确定该系统的李雅普诺夫函数的方法, 并得到了判别系统局部渐近稳定和不稳定的充分条件. 最后通过示例说明该判别条件的有效性.

**关键词**: 非线性动态系统; 临界情形; 李雅普诺夫函数; 局部渐近稳定

**中图分类号**: 0175.13　　**文献标识码**: A

# Locally asymptotic stability of 2-dimension nonlinear analytic dynamic systems in critical cases

NI Yu-dong[1], SHEN Yin-dong[2]

(1. Department of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei Anhui 230009, China;
2. Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430074, China)

**Abstract:** The locally asymptotic stability of a 2-dimension nonlinear analytic dynamic system with a pair of conjugated imaginary eigenvalues is studied. The system is firstly simplified to a standard form by using the non-singular linear coordinate transformation and the time scale transformation. Next, based on the idea of formal progression, a method is developed to determine the Lyapunov function for this standard form by constructing several sets of linear equations. Finally, a sufficient condition of locally asymptotic stability for the system is obtained. The validity is shown by two examples at the end of this paper.

**Key words:** nonlinear dynamic system; critical case; Lyapunov function; locally asymptotic stability

## 1 引言(Introduction)

非线性动态系统稳定性特别是局部渐近稳定性的研究, 成果已极为丰富[1~3], 但对临界情形动态系统稳定性的研究还比较少. 临界情形下非线性动态系统的稳定性, 取决于系统的非线性部分, 至今仍无一般的稳定性判据, 只能通过寻找李雅普诺夫函数的方法来实现. 然而李雅普诺夫第二方法不是一个构造性的方法, 这使得临界系统的稳定性成为稳定性理论中的难点, 已是非线性动态系统稳定性研究的重大课题.

由中心流形定理可知, 二维临界系统是基本而又重要的临界系统, 因而成为是国内外学者研究的重点. 王联、王慕秋曾对二维二次临界系统进行了较完整的分析[4], 张芷芬则给出了一些简便的稳定性判别条件[5]. 李春文等利用正则判别函数法, 讨论了二维三次临界系统的稳定性[6], 并设计了二维齐次高阶临界系统的稳定性判别算法[7]. 刘向东、黄文虎采用中心流形方法和二维Hopf分叉理论, 取得了临界系统稳定性的充分条件[8]. 在文[9]中, Fu研究了自由动态$\dot{Z} = f(Z)$在如下两种情形的李雅普诺夫函数的构造问题: A) $\sigma(A) \subset C^- \bigcup C^0$, $\sigma(A) \bigcap C^0 = \{0\}$; B) $\sigma(A) \subset C^- \bigcup C^0, \sigma(A) \bigcap C^0 = \{\pm\omega \mathrm{i}\}$, $\omega > 0$, 其中$A = \dfrac{\partial f}{\partial Z}(0)$, $C^- = \{\lambda \in C \mid \mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$, $C^0 = \{\lambda \in C \mid \mathrm{Re}\,\lambda = 0\}$, 得到若干渐近稳定的条件.

## 2 具有一对共轭纯虚数特征值的二维临界解析系统(2-dimension critical analytic dynamic system with a pair of conjugated imaginary eigenvalues)

本文讨论二维非线性临界解析动态系统的重要情形: $\sigma(A) = \{\pm\omega \mathrm{i}\}, \omega > 0$. 运用形式级数法的思

收稿日期: 2007−05−14; 收修改稿日期: 2008−04−30.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70671045).

想, 提出构造该类临界系统李雅普诺夫函数的方法, 并建立系统稳定性的判别条件.

考察下列二维非线性临界解析动态系统

$$\dot{Z} = AZ + F(Z). \tag{1}$$

其中: $Z = (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(Z)$关于$Z$是解析的, 并且

$$F(0) = 0,\ \frac{\partial F}{\partial Z}(0) = 0,\ A \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$
$$\sigma(A) = \{\pm\omega \mathrm{i}\},\ \omega > 0,\ \mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$

由代数学知识可得, 对于矩阵$A$存在一个非奇异的矩阵$S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, 使得

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}.$$

令$Z = SU$, 则

$$\dot{U} = S^{-1}ASU + S^{-1}F(SU).$$

再令$v = \omega t$, 便得到

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}v} = A_0 U + F_0(U),$$

其中:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \omega F_0(U) = S^{-1}F(SU).$$

由此可知, 系统(1)化成了标准形式

$$\begin{cases} \dot{x} = y + P(x, y), \\ \dot{y} = -x + Q(x, y). \end{cases} \tag{2}$$

其中: $P, Q$关于$Z = (x, y)$是解析的, 并且

$$(P, Q)(0) = 0,\ \frac{\partial(P, Q)}{\partial Z}(0) = 0.$$

## 3 李雅普诺夫函数的构造(Construction of Lyapunov function)

设

$$P(Z) = \sum_{n=2}^{\infty} P_n(Z), Q(Z) = \sum_{n=2}^{\infty} Q_n(Z),$$

$P_n, Q_n$均为$Z = (x, y)$的$n$次齐次多项式. 取李雅普诺夫函数为

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{n\geqslant 3} V_n(x, y),$$

其中$V_n$为$x, y$的$n$次齐次多项式. 显然无论$V_n$如何选取, 均能确定一个原点邻域使$V$是正定的,

$$\dot{V}_{(2)} =$$
$$\sum_{n\geqslant 2}(xP_n + yQ_n) + \sum_{n\geqslant 3}(y\frac{\partial V_n}{\partial x} - x\frac{\partial V_n}{\partial y}) +$$
$$\sum_{n\geqslant 3}\sum_{k\geqslant 2}[\frac{\partial V_n}{\partial x}P_k + \frac{\partial V_n}{\partial y}Q_k].$$

设

$$F_k = (P_k, Q_k)^{\mathrm{T}}\ \ (k \geqslant 2),\ G_3 = (x, y)F_2,$$
$$G_n = (x, y)F_{n-1} + \sum_{k=3}^{n-1} \nabla V_k F_{n+1-k}\ \ (n \geqslant 4),$$

则

$$\dot{V} = [G_3 - (x\frac{\partial V_3}{\partial y} - y\frac{\partial V_3}{\partial x})] +$$
$$\sum_{n\geqslant 4}[G_n - (x\frac{\partial V_n}{\partial y} - y\frac{\partial V_n}{\partial x})].$$

设

$$V_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} a_k^n x^k y^{n-k},$$

则

$$x\frac{\partial V_n}{\partial y} - y\frac{\partial V_n}{\partial x} =$$
$$\sum_{k=0}^{n}[(n-k+1)a_{k-1}^n - (k+1)a_{k+1}^n]x^k y^{n-k}.$$

其中$a_k^n = 0$, 当$k < 0$或$k > n$.

设

$$G_n = \sum_{k=0}^{n} b_k^n x^k y^{n-k},$$

则

$$\dot{V} = -\sum_{n\geqslant 3}\sum_{k=0}^{n}[(n-k+1)a_{k-1}^n -$$
$$(k+1)a_{k+1}^n - b_k^n]x^k y^{n-k}.$$

考察$\dot{V} = 0$, 得到

$$x\frac{\partial V_3}{\partial y} - y\frac{\partial V_3}{\partial x} = G_3, \tag{3}$$
$$x\frac{\partial V_n}{\partial y} - y\frac{\partial V_n}{\partial x} = G_n,\ n \geqslant 4. \tag{4}$$

显然式(4)右边关于$V_n$的阶次比左边低, 选$V_3$使式(3)成立时, 可将式(4)中$G_n$视为已知来确定$V_n$. 由式(4)可得, 对于$k = 0, 1, \cdots, n$, 成立着

$$(n-k+1)a_{k-1}^n - (k+1)a_{k+1}^n = b_k^n. \tag{5}$$

对于固定的$n$, $n$为奇数时, 系数行列式为$(n!!)^2$. 对于已确定的$G_n$的一组系数$\{b_k^n\}$, 式(5)唯一确定了一组解$(a_0^n, a_1^n, \cdots, a_n^n)$. $n$为偶数(记为$n = 2m$)时, 系数行列式为0, 可将式(5)分成两组独立方程:

$$\begin{cases} 2(m-i+1)a_{2(i-1)}^n - 2ia_{2i}^n = b_{2i-1}^n, \\ i = 1, 2, \cdots, m, \end{cases} \tag{6a}$$

$$\begin{cases} (2m-2i+1)a_{2i-1}^n - (2i+1)a_{2i+1}^n = b_{2i}^n, \\ i = 0, 1, \cdots, m. \end{cases} \tag{6b}$$

式(6a)系数矩阵$\varDelta_n^1$的秩为$m$, 从而它总有解$(a_0^n, a_2^n,$

$\cdots, a_{2m}^n)$. 式(6b)系数矩阵$\Delta_n^2$的秩为$m$.

记

$$\beta_m^n = (b_0^n, b_2^n, \cdots, b_{2m}^n)^{\mathrm{T}},$$

$$A(\beta_m^n) = \det(\Delta_n^2 \vdots \beta_m^n),$$

则

$$A(\beta_m^n) = (-1)^m \sum_{l=0}^{m} (2m-2l-1)!!(2l-1)!!b_{2l}^n.$$

如果$A(\beta_m^n) = 0$, 则式(6b)有解, 否则求方程

$$(2m-2j+1)a_{2j-1}^n - (2j+1)a_{2j+1}^n - C_m^j \lambda_m = b_{2j}^n,\ j = 0, 1, \cdots, m \tag{7}$$

的解$(a_1^n, a_3^n, \cdots, a_{2m-1}^n, \lambda_m)$, 其中$C_m^j$为二项展开式系数. 由克莱姆法则可求得

$$\lambda_m = (-1)^{m+1} A(\beta_m^n)/(2m)!!.$$

综上所述, 由$G_n (n \geqslant 3)$的系数$\{b_k^n\}$可以确定出$V_n (n \geqslant 3)$的全部系数$\{a_k^n\}$.

## 4 局部渐近稳定的充分条件(Sufficient conditions for the locally asymptotic stability)

**引理 1**　设

$$\begin{cases} G_{2m} - (x\dfrac{\partial V_{2m}}{\partial y} - y\dfrac{\partial V_{2m}}{\partial x}) \neq 0, \\ G_{2k} - (x\dfrac{\partial V_{2k}}{\partial y} - y\dfrac{\partial V_{2k}}{\partial x}) = 0, \\ 2 \leqslant k < m, \end{cases} \tag{8}$$

则由式(7)确定的$\lambda_m$值不为零, 并且

$$(x\frac{\partial V_{2m}}{\partial y} - y\frac{\partial V_{2m}}{\partial x}) - G_{2m} = \lambda_m (x^2 + y^2)^m.$$

**定理 1**　沿用第3节的记号, 并设$n = 2m$满足式(8), 则: 1) 若$\lambda_m < 0$, 系统(2)的零解是不稳定的; 2) 若$\lambda_m > 0$, 系统(2)是局部渐近稳定的.

**证**　令

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{k=3}^{n} V_k(x, y),$$

$V_3, \cdots, V_n$由式(3)和(4)确定. 由引理1可知

$$\begin{cases} \dot{V} = \\ G_{2m} - (x\dfrac{\partial V_{2m}}{\partial y} - y\dfrac{\partial V_{2m}}{\partial x}) + o(r^{2m}) = \\ -\lambda_m (x^2 + y^2)^m + o(r^{2m}), \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases} \tag{9}$$

由李雅普诺夫稳定性定理可知, 定理1的结论成立.

## 5 示例(Examples)

**例 1**　判定下列系统的稳定性:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + xy^2, \\ \dot{y} = -x - y^3. \end{cases} \tag{10}$$

显然$G_3 = 0$, 取$V_3 = 0$. 由$G_4 = x^2y^2 - y^4$可知, $(x\dfrac{\partial V_4}{\partial y} - y\dfrac{\partial V_4}{\partial x}) \neq G_4$, 从而$m = 2$. 经计算得, $\lambda_2 = \dfrac{1}{4} > 0$. 由定理1可知, 系统(9)是局部渐近稳定的. 事实上, 取李雅普诺夫函数为

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{3}{4}xy^3 + \frac{1}{4}x^3y.$$

由

$$\dot{V} = -\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + o(r^4)$$

可知, 系统(9)是局部渐近稳定的.

**例 2**　判定下列系统的稳定性:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = -x + y^3. \end{cases} \tag{11}$$

显然$G_3 = 0$, 取$V_3 = 0$. 由$G_4 = x^2y^2 - x^4 + y^4$可知, $(x\dfrac{\partial V_4}{\partial y} - y\dfrac{\partial V_4}{\partial x}) \neq G_4$, 从而$m = 2$. 经计算得, $\lambda_2 = -\dfrac{1}{8} < 0$. 由定理1可知, 系统(10)是不稳定的. 事实上, 取李雅普诺夫函数为

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{7}{8}xy^3 - \frac{9}{8}x^3y.$$

由

$$\dot{V} = \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2 + o(r^4)$$

可知, 系统(10)是不稳定的.

## 6 总结(Conclusions)

本文运用形式级数法的思想和正则判别函数法, 分析了一类二维临界解析动态系统的李雅普诺夫函数的构造问题, 得到了判别系统局部渐近稳定和不稳定的充分条件. 稳定性的充分条件对于控制系统中控制器的设计具有重要意义, 本文给出了临系统的李雅普诺夫函数的构造形式, 对临界控制系统中控制律的设计具有指导作用.

**参考文献**(References):

[1] BACCIOTTI A. *Local Stabilizability of Nonliear Control Systems*[M]. Singapore: World Scientific, 1992.

[2] BROCKETT R W. Asymptotic stability and feedback stabilization[C]//BROCKETT R W, MILLMAN R S, SUSSMANN H J. *Differential Geometric Control Theory*. Boston: Birkhauser, 1983: 181 – 191.

[3] 辛云冰, 倪郁东. 关于一类非线性时滞微分方程解的渐近性态[J]. 集美大学学报(自然科学版), 2004, 9(3): 278 – 281.
(XIN Yunbing, NI Yudong. The asymptotic properties of solutions about a kind of nonlinear differetial equations with delay[J]. *Journal of Jimei University(Natural Science)*, 2004, 9(3): 278 – 281.)

[4] 王联, 王慕秋. 非线性常微分方程稳定性分析[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1987.
(WANG Lian, WANG Muqiu. *Stability Analysis of Nonlinear Ordinary Differential Equation*[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press，1987.)

[5] 张芷芬, 丁同仁. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.
(ZHANG Zhifen, DING Tongren. *Differential Eguation Stability Theory*[M]. Beijing: Science Press, 1985.)

[6] 李春文, 张平, 乔岩. 一类二维临界非线性系统的稳定性判别[J]. 控制理论与应用, 1998, 15(6): 842 – 846.
(LI Chunwen, ZHANG Ping, QIAO Yan. Sufficient conditions for stability of a class of two-dimensional critical nonlinear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 1998, 15(6): 842 – 426.)

[7] 苗原, 李春文, 胡世文. 二维齐次高阶临界系统的稳定性判别算法[J]. 控制理论与应用, 1997, 14(3): 430 – 433.
(MIAO Yuan, LI Chunwen, HU Shiwen. Stability determination algorithm for 2-dimension high order singlar system[J]. *Control Theory & Applications*, 1997, 14(3): 430 – 433.)

[8] 刘向东, 黄文虎. 非线性临界系统稳定性分析的中心流形方法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1999, 31(6): 1 – 4.
(LIU Xiangdong, HUANG Wenhu. Center manifold method for stability analysis of nonlinear systems in critical cases[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 1999, 31(6): 1 – 4.)

[9] FU J H, ABED E H. Families of Lyapunov functions for nonlinear systems in criticl cases[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, 38(1): 3 – 16.

## 作者简介:

**倪郁东** (1963—), 男, 1984年于安徽大学获得学士学位, 1998年于杭州大学获得硕士学位, 现为合肥工业大学副教授, 主要研究兴趣为非线性系统分析与设计、运筹与组合优化, E-mail: niyudong888@126.com;

**沈吟东** (1965—), 女, 1986年、1989年于武汉大学获得学士、硕士学位, 2001年于英国利兹(Leeds)大学获得博士学位, 现为华中科技大学教授, 主要研究兴趣为非线性系统分析、运筹与组合优化、智能调度、公共交通调度, E-mail: yindong@mail.hust.edu.cn.