文章编号: 1000−8152(2009)02−0186−03

二型Takagi-Sugeno-Kang模糊模型和不确定高斯混合模型的等价性

张钦礼[1,2], 王士同[1], 谭左平[1]

(1. 江南大学 信息工程学院, 江苏 无锡 214122; 2. 北华航天工业学院 基础部, 河北 廊坊 065000)

摘要: 不确定的高斯混合模型和二型Takagi-Sugeno-Kang(TSK)模糊模型之间的对应关系被建立: 任何一个不确定的高斯混合模型都唯一对应着一个二型TSK模糊系统, 不确定的高斯混合模型的条件均值和二型TSK模糊系统的输出是等价的. 基于此, 一种设计二型模糊系统的新方法被提出: 通过建立不确定的高斯混合模型确定二型TSK模糊系统, 即用概率统计的方法设计二型模糊系统. 仿真实验结果表明利用不确定高斯混合模型设计的二型模糊系统比其它模型具有更强的抗噪性和更快的速度.

关键词: 二型TSK模糊模型; 高斯混合模型; 模糊系统; 期望值的最大化算法

中图分类号: TP18 **文献标识码**: A

Equivalence between type-2 TSK fuzzy model and uncertain Gaussian mixture model

ZHANG Qin-li[1,2], WANG Shi-tong[1], TAN Zuo-ping[1]

(1. School of Information, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China;
2. Department of Fundamental Science, North China Institute of Aerospace Engineering, Langfang Hebei 065000, China)

Abstract: This work explores how the uncertain Gaussian mixture model(UGMM) can be translated to an additive type-2 TSK(Takagi-Sugeno-Kang) fuzzy logic system. The mathematical equivalence between the conditional mean of a UGMM and the defuzzified output of a type-2 TSK fuzzy model(T2-TSK-FM) is proved. The relationship between a UGMM and a T2-TSK-FM, and the conditions for UGMM to T2-TSK- FM translation is made explicit in the form of a theorem. The proposed results provide a new method for constructing a T2-TSK-FM by interpreting a fuzzy system from a probabilistic viewpoint. Instead of estimating the parameters of the fuzzy rules directly, the parameters of a UGMM are estimated using any popular density estimation algorithm, such as expectation maximization. The proposed approach is also applied to Mackey-Glass chaotic time series. After comparing the simulation results with those obtained with other system modeling tools, it can be claimed that successful results are achieved.

Key words: type-2 TSK fuzzy model; Gaussian mixture model; fuzzy system; EM(expectation maximization) algorithm

1 引言(Introduction)

二型模糊系统有许多一型模糊系统不具备的优点, 如有很强的抗噪性和更好的可解释性[1]. 但是二型模糊系统也有缺陷, 如系统的结构不好确定[2], 参数的估计方法比较单一. 为了解决这些问题, 本文提出了不确定的高斯混合模型和具有可加性的二型模糊系统的关系理论: 任何一个不确定的高斯混合模型都唯一对应着一个具有可加性的二型TSK模糊系统, 不确定高斯混合模型的条件均值和二型TSK模糊系统的输出是等价的. 于是, 便可通过训练不确定的高斯混合模型来确定二型TSK模糊系统. 这种新的训练二型TSK模糊模型的方法有3个优点: 第一, 很容易确定模糊系统的结构和规则, 并且确定的规则和结构非常简练, 从而加快了计算速度; 第二, 估计参数的方法更为多样化, 所有的概率密度估计理论都可用来估计二型TSK模糊系统的参数, 不用局限于效果不甚理想的模糊C均值方法(FCM)[1,2]; 第三, 估计的参数更为合理有效, 能抓住数据的特征和细微差别. 仿真实验结果表明用不确定高斯混合模型估计参数的二型TSK模糊系统比一型和其他二型

收稿日期: 2007−08−10; 收修改稿日期: 2008−06−02.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60225015); 2004年度国家教育部新世纪优秀人才计划项目(NCET–040496).

模糊系统的精度更高, 抗噪性更强.

2 可加性 Type-2 TSK 模糊模型(Additive type-2 TSK fuzzy model)

Type-2 TSK模糊模型(type-2 TSK fuzzy model, 简写为T2-TSK-FM)由Mendel等人提出[3], 其一般形式为

$$R^i: 如果x_1是\tilde{\tilde{F}}_1^i, \cdots, 如果x_P是\tilde{\tilde{F}}_P^i, 则$$
$$\tilde{Y}^i = \tilde{C}_0^i + \tilde{C}_1^i x_1 + \cdots + \tilde{C}_P^i x_P.$$

其中: R^i为第i条规则, 假设有M条规则; $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_P)^{\mathrm{T}}$为前件变量; $\tilde{\tilde{F}}_j^i$为type-2模糊集, $\mu_{\tilde{\tilde{F}}_j^i}(x_j)$为其隶属度函数; $\tilde{C}_j^i$为type-1模糊集.

当$\tilde{\tilde{F}}_j^i$和$\tilde{C}_j^i$为区间模糊集时[4], T2-TSK-FM变为区间T2-TSK-FM, 其输出为

$$Y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{M} W_i Y_i}{\sum\limits_{i=1}^{M} W_i}. \tag{1}$$

其中: $W_i = \top_{j=1}^{P} \mu_{\tilde{\tilde{F}}_j^i}(x_j)$, $\top$为$\top$-范式算子.

3 多输入单输出的区间 T2-TSK-FM 和多维 UGMM 的关系(From a multi-dimensional UGMM to a multiple-input-single-output intrval T2-TSK-FM)

所有系统都可归结为多输入单输出的系统. 因为单输入单输出系统是它的特例, 多输入多输出系统可归结为几个多输入单输出系统.

具有J个属性和C个组件的高斯混合模型的混合概率密度函数为[5,6]

$$G(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{C} P_i N_J(\vec{x}; \vec{\mu}_{\vec{x}i}, \Sigma_{\vec{x}i}). \tag{2}$$

其中P_i为混合参数, 表示各混合成分的先验概率, 且$\sum\limits_{i=1}^{C} P_i = 1$; $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_J)^{\mathrm{T}}$.

仿照式(2), 建立如下不确定高斯混合模型(UGMM):

$$\tilde{G}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{C} P_i \tilde{S}_i N_J(\vec{x}; \tilde{\vec{\mu}}_{\vec{x}i}, \tilde{\Sigma}_{\vec{x}i}). \tag{3}$$

其中: $\tilde{\vec{\mu}}_{\vec{x}i} = (\tilde{\mu}_{i1}, \cdots, \tilde{\mu}_{iJ})^{\mathrm{T}}$, $\tilde{\Sigma}_{\vec{x}i} = (\tilde{\sigma}_{imn})_{J\times J}$, $\tilde{S}_i$, $\tilde{\mu}_{ik}$和$\tilde{\sigma}_{imn}$都是区间type-1模糊集, 即分别以隶属度1取值于区间$[S_{il}, S_{ir}]$, $[\mu_{ikl}, \mu_{ikr}]$和$[\sigma_{imnl}, \sigma_{imnr}]$.

令输出为y, 则有C个组件的$J+1$维UGMM为

$$\tilde{G}(\vec{x}, y) = \sum_{i=1}^{C} P_i \tilde{S}_i N_{J+1}(\begin{pmatrix} \vec{x} \\ y \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \tilde{\vec{\mu}}_{\vec{x}i} \\ \tilde{\mu}_{yi} \end{pmatrix}, \tilde{\Sigma}_{\vec{x}yi}). \tag{4}$$

其中: $\tilde{\mu}_{yi}$以隶属度1取值于区间$[\mu_{yil}, \mu_{yir}]$,

$$\tilde{\Sigma}_{\vec{x}yi} = \begin{bmatrix} \{\tilde{\sigma}_{imn}\}_{J\times J} & \{\tilde{\sigma}_{im(J+1)}\}_{J\times 1} \\ \{\tilde{\sigma}_{i(J+1)n}\}_{1\times J} & \tilde{\sigma}_{i(J+1)(J+1)} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

令其逆矩阵为

$$\tilde{\Sigma}_{\vec{x}yi}^{-1} = \begin{bmatrix} \{\tilde{\sigma}^{imn}\}_{J\times J} & \{\tilde{\sigma}^{im(J+1)}\}_{J\times 1} \\ \{\tilde{\sigma}^{i(J+1)n}\}_{1\times J} & \tilde{\sigma}^{i(J+1)(J+1)} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

利用式(4)~(6)可求得y对$\vec{x}$的条件数学期望:

$$y_E = \mathrm{E}[y|\vec{x}] = \frac{\int_R y\tilde{G}(\vec{x}, y)\mathrm{d}y}{\int_R \tilde{G}(\vec{x}, y)\mathrm{d}y} = (\sum_{i=1}^{C} P_i \tilde{S}_i N_J(\vec{x}; \tilde{\vec{\mu}}_{\vec{x}i}, \{\tilde{\sigma}_{imn}\}_{J\times J})(\tilde{\mu}_{yi} - \frac{(\vec{x} - \tilde{\vec{\mu}}_{\vec{x}i})^{\mathrm{T}}\{\tilde{\sigma}^{im(J+1)}\}_{J\times 1}}{\tilde{\sigma}^{i(J+1)(J+1)}}))/ (\sum_{i=1}^{C} P_i \tilde{S}_i N_J(\vec{x}; \tilde{\vec{\mu}}_{\vec{x}i}, \{\tilde{\sigma}_{imn}\}_{J\times J})).$$

显然, 式(1)和上式是不可能等价的. 为此, 假设输入向量$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_J)^{\mathrm{T}}$的各分量之间是相互独立的, 这种统计假设是合理的. 于是, 协方差矩阵变为

$$\Sigma_{\vec{x}yi} = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}\{\tilde{\sigma}_{imm}\}_{J\times J} & \{\tilde{\sigma}_{im(J+1)}\}_{J\times 1} \\ \{\tilde{\sigma}_{i(J+1)n}\}_{1\times J} & \tilde{\sigma}_{i(J+1)(J+1)} \end{bmatrix}, \quad m, n = 1, \cdots, J.$$

利用上式, 则有

$$y_E = \mathrm{E}[y|\vec{x}] = \frac{\int_R y\tilde{G}(\vec{x}, y)\mathrm{d}y}{\int_R \tilde{G}(\vec{x}, y)\mathrm{d}y} = (\sum_{i=1}^{C} P_i \tilde{S}_i \prod_{j=1}^{J} N_1(x_j; \tilde{\mu}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ijj})(\tilde{\mu}_{yi} - \frac{(\vec{x} - \tilde{\vec{\mu}}_{\vec{x}i})^{\mathrm{T}}\{\tilde{\sigma}^{im(J+1)}\}_{J\times 1}}{\tilde{\sigma}^{i(J+1)(J+1)}}))/ (\sum_{i=1}^{C} P_i \tilde{S}_i \prod_{j=1}^{J} N_1(x_j; \tilde{\mu}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ijj})). \tag{7}$$

其中$N_1(x_j; \tilde{\mu}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ijj})$为一元标准正态分布的概率密度函数.

当$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_J)^{\mathrm{T}}$和$y$服从式(4)的混合分布时, 比较式(1)和式(7), 可得出如下定理:

定理 1　若下列条件满足, 则式(1)和式(7)等价:

1) 区间T2-TSK-FM的规则数等于UGMM的组件数, 即$M=C$;

2) UGMM的系数P_i是常数, 且$P_i=\dfrac{1}{C}$;

3) 前件含有J个变量, 即$P=J$;

4) $\tilde{S}_i$是常数, 且$S_{il}=S_{ir}=1$;

5) $\tilde{\mu}_{i(J+1)}$和$\tilde{\sigma}_{imn}$是常数, 即$\mu_{yil}=\mu_{yir},\sigma_{imnl}=\sigma_{imnr}$;

6) $\tilde{C}^i_j(j=1,\cdots,J)$为模糊单值;

7) $W_i=\prod\limits_{j=1}^{J}N_1(x_j;\tilde{\mu}_{ij},\tilde{\sigma}_{ijj})$;

8)

$$\tilde{C}^i_0=\tilde{\mu}_{yi}+\frac{\sum\limits_{j=1}^{J}\tilde{\mu}_{ij}\tilde{\sigma}^{ij(J+1)}}{\tilde{\sigma}^{i(J+1)(J+1)}},$$

$$\tilde{C}^i_1=\frac{\tilde{\sigma}^{i1(J+1)}}{\tilde{\sigma}^{i(J+1)(J+1)}},\cdots,$$

$$\tilde{C}^i_J=\frac{\tilde{\sigma}^{iJ(J+1)}}{\tilde{\sigma}^{i(J+1)(J+1)}}\ (\ i=1,\cdots,M(C)\ );$$

9) T2-TSK-FM采用乘法T-范式算子和蕴含且是可加性的.

如果任何一个有J个相互独立输入变量的多输入单输出系统的输入和输出服从式(4)所描述的高斯混合分布, 则一定会存在一个唯一确定的区间T2-TSK-FM与之对应. 在一定的条件下, UGMM的条件期望值和区间T2-TSK-FM的输出是等价的. 这样, 我们就在概率模型和二型模糊系统之间建立了一个桥梁, 可以从概率的角度解释模糊系统, 反之亦然.

4 Mackey-Glass混沌时间序列预测(Mackey-Glass chaotic time series prediction)

利用定理1可以得出一种训练区间二型TSK模糊模型的新方法. 首先利用任何概率密度估计方法, 如EM算法等, 确定UGMM的参数; 然后利用定理1可得出相应的区间T2-TSK-FM, 即高斯混合模型的组件数为模糊系统的规则数, 高斯混合模型的组件为模糊系统相应的隶属度函数, 高斯混合模型条件期望输出的线性函数部分为模糊系统规则的后件.

下面利用UGMM确定的区间T2-TSK模糊模型(UGMM-T2-TSK-FM)对Mackey-Glass混沌时间序列进行预测[4], 并与文献[4]的结果进行比较.

Mackey-Glass混沌时间序列是时间序列预测问题中的benchmark问题之一[7], 方程如下:

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{0.2s(t-\tau)}{1+s^{10}(t-\tau)}-0.1s(t). \tag{8}$$

用Euler方法将式(8)离散:

$$f(s,n)=\frac{0.2s(n-\tau)}{1+s^{10}(n-\tau)}-0.1s(n). \tag{9}$$

于是$s(n+1)=s(n)+hf(s,n)$.

其中$\tau\geqslant 17$, 因为$\tau\geqslant 17$, 方程表现出了混沌特征[7]. 为了能与文献[4]的工作对比, 令$h=1$, $\tau=30$,$s(n)(n\leqslant 30)$的初值随机选取, $n(k)$为均匀分布的加法性噪声, 对$x(k)=s(k)+n(k)$进行数值模拟实验. 通过方程(9)产生1000个点, 并且加上噪声. 取前500个点用于训练, 后500个点用于测试, 采用均方根误差, 运行300次取平均, 运行时间也取平均, 将所得结果与文献[4]进行对比, 如表1.

表 1 Mackey-Glass时间序列预测结果比较

Table 1 Comparison of the forecasting results of Mackey-Glass chaotic time series

所用模糊系统	所需时间/s	误差
Type-1 SFLS[4]	10.7490	0.1272
Type-1 NSFLS[4]	14.6560	0.1230
Type-2 SFLS[4]	23.9110	0.1129
Type-2 NSFLS-1[4]	25.3510	0.1121
Type-2 NSFLS-2[4]	34.1720	0.1115
UGMM-T2-TSK-FM	20.2970	0.1031

以上6种系统采用得均是高斯隶属度函数, 由表1可以看出UGMM-T2-TSK-FM的精度高于其他5种系统, 速度快于其他3种二型模糊系统, 仅比2种一型模糊系统慢.

笔者认为, 与文献[4]的结果相比, 本文方法取得较好性能的主要原因在于: 使用高斯混合模型确定参数的区间二型TSK模糊模型更为准确地抓住了系统的局部特性, 正是由于这种局部特性, 使得在学习过程中, 参数的更新不仅有利于减小当前样本的输出误差, 而且还最大限度地降低了对已学到的“知识”的干扰. 因此, 学习过程波动小, 抗噪能力强.

5 结论(Conclusion)

本文研究的是最简单的情况—均值不确定. 本文建立了不确定高斯混合模型的条件期望输出和二型TSK模糊系统的输出的等价关系. 这样, 在二者之间搭起了一座桥梁, 可充分发挥概率有坚实的数学理论基础和模糊有很好的解释性和抗噪性[1]的优势, 互为补充, 相得益彰. 基于此, 一种设计二型模糊系统的新方法被提出, 即通过设计不确定高斯混合模型来设计二型模糊系统. 仿真实验结果表明利用UGMM设计的模糊系统抗噪性强、速度快.

(下转第192页)

参考文献(References):

[1] 赵碧蓉, 江明辉, 沈轶. 随机时滞神经网络的全局指数稳定性[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(5): 799 – 801.
(ZHAO Birong, JIANG Minghui, SHENG Yi. Globally exponential stability of stochastic neural networks with delay[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(5): 799 – 801.)

[2] LIAO X X, WANG J. Algebraic criteria for global exponential stability of cellular neural networks with multiple time delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2003, 50(2): 268 – 275.

[3] 冯昭枢, 王建, 刘洪伟, 等. 随机Hopfield神经网络的稳定性分析[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(3): 345 – 348.
(FENG Zhaoshu, WANG Jian, LIU Hongwei, et al. Stability Analysis of Random Hopfield Neural Networks[J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(3): 345 – 348.)

[4] CAO J, WANG J. Global asymptotic and robust stability of recurrent neural networks with time delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* I, 2005, 52(2): 417 – 426.

[5] PECORA L M, THOMAS L C. Synchronization in chaotic systems[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8): 821 – 824.

[6] SUN Y H, CAO J D, WANG Z D. Exponential synchronization of stochastic perturbed chaotic delayed neural networks[J]. *Neurocomputing*, 2007, 70(13): 2477 – 2485.

[7] CHEN W H, GUAN Z H, LU X M. Delay-dependent exponential stability of uncertain stochastic systems with multiple delays: an LMI approach[J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(13): 547 – 555.

作者简介:

张　皓 (1979—), 女, 同济大学讲师, 目前研究方向为网络控制系统、复杂网络, E-mail: zhang_hao@mail.tongji.edu.cn;

严怀成 (1977—), 男, 香港中文大学博士后, 目前研究方向为网络控制系统、时滞系统, E-mail: hcyan@ee.cuhk.edu.hk;

陈启军 (1966—), 男, 同济大学教授, 目前研究方向为机器人控制与智能控制, E-mail: qjchen@mail.tongji.edu.cn.

(上接第188页)

参考文献(References):

[1] MENDEL J M. *Uncertain Rule-based Fuzzy Logic System: Introduction and New Direction*[M]. New York: Prentice Hall, 2000.

[2] MENDEL J M, JOHN R I, LIU F L. Interval type-2 fuzzy logic systems made simple[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, 4(6): 808 – 821.

[3] LIANG Q L, MENDEL J M. An introduction to type-2 TSK fuzzy logic systems[C]//*Proceedings of IEEE International Fuzzy Systems Conference*. South Korea, Seoul: IEEE Press, 1999, 3: 1534 – 1539.

[4] LIANG Q L, MENDEL J M. Interval type-2 fuzzy logic systems: theory and design[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, 8(5): 535 – 550.

[5] EVERITT B S, HAND D J. *Finite Mixture Distributions*[M]. London, UK: Chapman and Hall, 1981.

[6] GAN M T, HANMANDLU M, TAN A H. From a Gaussian mixture model to additive fuzzy systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2005, 13(3): 303 – 316.

[7] 刘涵, 刘丁. 基于模糊Sigmoid核的支持向量机回归建模[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(2): 204 – 208.
(LIU Han, LIU Ding. Support vector regression based on fuzzy sigmoid kernel[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(2): 204 – 208.)

作者简介:

张钦礼 (1972—), 男, 博士, 副教授, 主要研究领域包括模式识别、机器学习和小波分析等, E-mail: zhangql1972@yahoo.com.cn;

王士同 (1964—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域包括人工智能、神经网络、模式识别和模糊系统等;

谭左平 (1981—), 女, 博士研究生, 主要研究领域包括神经网络、模式识别和模糊系统等.