

文章编号: 1000-8152(2009)02-0209-06

控制时滞系统基于观测器的最优扰动抑制

唐功友¹, 雷 靖¹, 孙 亮²

(1. 中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266100; 2. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 研究在持续外界扰动作用下含有控制时滞线性系统的最优扰动抑制问题. 首先利用模型转换将控制时滞系统转化为无时滞系统. 然后证明最优控制律的存在唯一性, 并通过求解Riccati方程和Sylvester方程设计含前馈补偿器和控制记忆项的最优控制律, 其中的前馈控制项和控制记忆项分别补偿了扰动和控制时滞对系统的影响. 通过构造扰动状态观测器, 解决了前馈补偿器的物理不可实现问题. 仿真实例验证了所设计的最优控制律的有效性.

关键词: 时滞系统; 持续扰动; 前馈控制; 最优控制; 观测器

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Observer-based optimal disturbance-rejection for linear systems with time-delay in control action

TANG Gong-you¹, LEI Jing¹, SUN Liang²

(1. College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao Shandong 266100, China;
2. College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: The optimal disturbance-rejection for linear systems with time-delay in control action and external persistent disturbances is considered. By using the model transformation, this system is transformed into a non-delay one. The existence and uniqueness of the optimal control law are proved and the optimal control law with a feedforward compensator and a control memory term is derived from a Riccati equation and Sylvester equations. The feedforward control term and the control memory term compensate for the effects of disturbances and the time-delay in control action, respectively. A disturbance-observer is developed to make the approximate feedforward compensator physically realizable. Simulation results demonstrate the effectiveness of the designed control law.

Key words: time-delay systems; persistent disturbances; feedforward control; optimal control; observer

1 引言(Introduction)

一般的系统都是在外界持续扰动力作用下工作的. 按对扰动的了解程度分类, 大致可以分为未知扰动和已知系统动态特性的两类扰动. 对未知扰动的系统的研究中主要研究鲁棒扰动衰减控制, 如 H_∞ 控制^[1]等. 已知系统动态特性的扰动在实际系统中是常见的, 例如: 海洋平台振动的实时控制系统, 海洋结构物承受的风力或规则海浪力的正弦扰动力^[2,3], 纸张生产过程系统纸机受纸的重量和拉力的持续扰动^[4], 磁带驱动器转动由于振动产生的扰动^[5]等都是已知动态特性的. 对于已知系统动态特性的扰动抑制问题, 有几种可行的解决方法. 包括内模控制^[6~8], 自适应控制^[9,10], 预测控制^[11]及前馈反馈最优控制^[2,3,12~16]等. 到目前为止, 多数研究工作

还只是针对无时滞线性系统开展的^[2~6,9~13]. 最近, 唐功友等研究了非线性系统^[14]和状态含有时滞的系统^[7,8,15~17]的最优扰动抑制问题. 对于控制含有时滞的系统的扰动抑制问题, 多为在 H_∞ 意义下的控制器的优化设计问题^[1]. 至今笔者还没有见到针对控制含有时滞的系统研究正弦扰动抑制的论文发表.

本文研究在已知系统动态特性但未知初始条件的外部持续扰动作用下, 控制含时滞的线性系统的前馈反馈最优扰动抑制调节器设计问题. 首先利用模型转换将控制变量含时滞的系统转化为不含时滞的系统, 然后对转换后的无时滞系统设计前馈反馈最优扰动抑制调节器, 最后通过扰动观测器解决了前馈控制的物理不可实现问题.

2 问题描述(Problem description)

2.1 系统描述与转换(System description and transformation)

考虑受持续扰动的控制时滞线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau) + Dv(t), & t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制向量, $v(t) \in \mathbb{R}^p$ 为外部扰动向量, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 为常量矩阵, $\tau > 0$ 为已知的控制时滞. 取 $u(t) = 0, t \in [-\tau, 0)$.

外部扰动的动态特性由下列外系统确定:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = Gw(t), \\ v(t) = Fw(t). \end{cases} \quad (2)$$

其中: $w(t) \in \mathbb{R}^q$ 为扰动状态向量, $G \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $F \in \mathbb{R}^{p \times q}$ 为常量矩阵, $\text{rank} F = p$. 假设 (G, F) 是完全可观测的, 而外系统(2)的初始条件 $w(0)$ 是未知的. 外系统(2)描述了一般形式的持续扰动, 例如包括未知幅度的阶跃扰动和已知振荡频率但未知振幅和初相位的正弦扰动^[2,3,7~10,12,14]等.

下面将原控制时滞系统转化为无时滞系统. 系统(1)可以写成积分方程形式:

$$\begin{aligned} x(t) = & e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-h)}[Bu(h-\tau) + Dv(h)]dh = \\ & e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-h)}[e^{-A\tau}Bu(h) + Dv(h)]dh - \\ & \int_{t-\tau}^t e^{A(t-h)}e^{-A\tau}Bu(h)dh. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} B_1 &= e^{-A\tau}B, \\ z(t) &= x(t) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-h)}B_1u(h)dh, \end{aligned} \quad (3)$$

则系统(1)转化为系统

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + B_1u(t) + Dv(t), & t > 0, \\ z(0) = x_0, \\ x(t) = z(t) - \int_{t-\tau}^t e^{A(t-h)}B_1u(h)dh, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $z(t) \in \mathbb{R}^n$ 为转化后无时滞系统的状态变量.

2.2 二次型性能指标分析(Quadratic performance index analysis)

对于用式(1)和(2)描述的时滞系统的最优控制问题, 可以根据由外系统(2)描述的扰动是否稳定的特点, 将问题分为3种情形研究.

对于有限时域的最优控制问题, 对由外系统(2)

描述的扰动是否稳定没有任何限制, 可选择二次型性能指标

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}z^T(t_f)Q_fz(t_f) + \\ & \frac{1}{2}\int_0^{t_f} [(z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t))]dt, \end{aligned} \quad (5)$$

其中: t_f 为已知的末端时刻, $Q, Q_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为半正定矩阵, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为正定矩阵.

对于无限时域的最优控制问题, 针对由外系统(2)描述的扰动的不同情形, 可以选取不同的二次型性能指标. 如果外系统(2)渐近稳定, 可以选择如下无限时域的二次型性能指标:

$$J = \int_0^{\infty} [(z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t))]dt. \quad (6)$$

对于外系统(2)为稳定但非渐近稳定的情形. 如果选择(6)作为系统的性能指标, 由于在系统(4)中的扰动不能趋近于零, 所以无论如何选择控制律, 它必为不收敛的, 在这种情况下, 可以选取平均二次型性能指标

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [(z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t))]dt. \quad (7)$$

对于性能指标(6)和(7), 假设 (A, B) 是完全能控的, (A, C) 是完全能观测的, 其中 C 为 $Q = C^T C$ 的行满秩矩阵.

系统(1)关于二次型性能指标(5)(6)或(7)的最优控制问题, 就是寻找最优控制 $u^*(t)$, 使得二次型性能指标 J 取得极小值. 本文的目的就是根据外系统(2)的稳定性质, 分别研究系统(1)关于二次型性能指标(5)(6)或(7)的最优控制问题.

3 最优控制律的设计(Design of optimal control law)

3.1 有限时域最优控制律的设计(Design of finite-horizon optimal control law)

定理 1 考虑由式(1)(2)描述的线性系统, 关于二次型性能指标(5)的最优控制律, 为

$$\begin{aligned} u^*(t) = & -R^{-1}B_1^T[P(t)x(t) + P(t) \int_{t-\tau}^t e^{A(t-h)} \times \\ & B_1u(h)dh + P_1(t)v(t) + P_2(t)w(t)], \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为 Riccati 矩阵微分方程

$$\begin{cases} -\dot{P}(t) = A^T P(t) + P(t)A - P(t)SP(t) + Q, \\ t \in [0, t_f], \\ P(t_f) = Q_f \end{cases} \quad (9)$$

的唯一半正定解, $P_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $P_2(t) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ 分别

为下列矩阵微分方程的解:

$$\begin{cases} -\dot{P}_1(t) = [A - SP(t)]^T P_1(t) + P(t)D, \\ P_1(t_f) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} -\dot{P}_2(t) = [A - SP(t)]^T P_2(t) + P_2(t)G + \\ P_1(t)FG, \\ P_2(t_f) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

其中 $S = B_1 R^{-1} B_1^T$.

证 根据最优控制原理, 系统(1), (2)关于二次型性能指标(5)的最优控制问题导致求解如下两点边值问题:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) - S\lambda(t) + Dv(t), \\ -\dot{\lambda}(t) = Qz(t) + A^T \lambda(t), \\ z(0) = x_0, \lambda(t_f) = Q_f z(t_f), \end{cases} \quad (12)$$

并且, 最优控制律为

$$u^*(t) = -R^{-1} B_1^T \lambda(t). \quad (13)$$

令

$$\lambda(t) = P(t)z(t) + P_1(t)v(t) + P_2(t)w(t), \quad (14)$$

得到

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) = & [\dot{P}(t) + P(t)A - P(t)SP(t)]z(t) + [\dot{P}_1(t) + \\ & P(t)D - P(t)SP_1(t)]v(t) + [\dot{P}_2(t) + \\ & P_2(t)G + P_1(t)FG - P(t)SP_2(t)]w(t). \end{aligned} \quad (15)$$

利用式(12)和(15), 并考虑到对任意 $z(t), v(t), w(t)$ 均成立, 可导出 $P(t), P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 应分别满足矩阵微分方程(9), (10)和(11). 由于矩阵微分方程(9)~(11)满足解的存在唯一性条件, 即 $P(t), P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 存在且唯一. 将式(14)代入式(13), 得到最优控制律

$$u^*(t) = -R^{-1} B_1^T [P(t)z(t) + P_1(t)v(t) + P_2(t)w(t)]. \quad (16)$$

将式(3)中的 $z(t)$ 代入式(16), 得到系统(1)的最优控制律(8). 定理1得证.

3.2 无限时域最优控制律的设计(Design of infinite-horizon optimal control law)

笔者知道, 对于无限时域的二次型性能指标(6)和平均二次型性能指标(7), 其最优控制律以及它们的推导过程都是相同的, 所以可以一并研究.

定理 2 考虑由式(1)和(2)描述的受扰系统, 关于二次型性能指标(6)或(7)的最优控制律, 为

$$u^*(t) = -R^{-1} B_1^T [Px(t) + P \int_{t-\tau}^t e^{A(t-h)} \times$$

$$B_1 u(h) dh + P_1 w(t) - (A^T - PS)^{-1} PDv(t)], \quad (17)$$

其中 P 为 Riccati 矩阵方程

$$A^T P + PA - PSP + Q = 0 \quad (18)$$

的唯一正定解, P_1 为 Sylvester 方程

$$\begin{aligned} (A^T - PS)P_1 + P_1 G = \\ (A^T - PS)^{-1} P D F G \end{aligned} \quad (19)$$

的唯一解.

证 无限时域最优控制律的设计, 即系统(1)(2)关于二次型性能指标(6)或(7)的最优控制律的设计, 导致求解如下两点边值问题:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) - S\lambda(t) + Dv(t), \\ -\dot{\lambda}(t) = Qz(t) + A^T \lambda(t), \\ z(0) = x_0, \lambda(\infty) = 0, \end{cases} \quad (20)$$

并且, 最优控制律为

$$u^*(t) = -R^{-1} B_1^T \lambda(t). \quad (21)$$

令

$$\lambda(t) = Pz(t) + P_1 w(t) + P_2 v(t), \quad (22)$$

得到

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) = (PA - PSP)z(t) + (P_1 G + P_2 FG - \\ PSP_1)w(t) + (PD - PSP_2)v(t). \end{aligned} \quad (23)$$

将式(20)与(23)相加, 并考虑到对任意 $z(t), v(t), w(t)$ 均成立, 可导出 P 满足 Riccati 方程(18), 由 (A, B) 完全可控, 容易证明 (A, B_1) 也完全可控, 因此 Riccati 方程(18)有唯一正定解 P . 同时导出 P_1, P_2 是 Sylvester 方程

$$(A^T - PS)P_1 + P_1 G + P_2 FG = 0, \quad (24)$$

$$P_2 = -(A^T - PS)^{-1} PD \quad (25)$$

的解, 将式(25)代入式(24), 可得到求解 P_1 的 Sylvester 方程(19). 根据最优控制理论知 $[A - SP]$ 是 Hurwitz 矩阵, 即

$$\operatorname{Re} \mu_i(A^T - PS) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (26)$$

而外系统(2)是稳定的, 即

$$\operatorname{Re} \mu_j(G) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

故有

$$\mu_i(A^T - PS) + \mu_j(G) \neq 0, \quad (27)$$

所以, Sylvester 方程(19)有唯一解 P_1 ^[18]. 将式(22)代

入式(21), 得到最优控制律

$$u^*(t) = -R^{-1}B_1^T[Pz(t) + P_1w(t) + P_2v(t)]. \quad (28)$$

将式(3)(25)分别代入式(28), 得到系统(1)的最优控制律(17). 定理2得证.

3.3 基于观测器的最优控制律的设计(Design of observe-based optimal control law)

注意到最优控制律(8)和(17)中都含有外系统(2)的状态 $w(t)$, 这是物理不可实现的. 为了得到物理可实现的控制律, 通过构造降维扰动观测器来解决这一问题.

考虑对外系统(2)引入线性非奇异变换, 选取 $H \in \mathbb{R}^{(q-p) \times q}$, 使得 $T^T = [F^T \ H^T]$ 是非奇异的, 记 $M = T^{-1} = [M_1 \ M_2]$, 则有 $\bar{F} = FT^{-1} = [I_p \ \mathbf{0}]$, 其中 I 为 p 阶单位矩阵, $\mathbf{0}$ 为零矩阵. 令 $\bar{w}(t) = Tw(t)$, 则

$$\begin{cases} \dot{\bar{w}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\bar{w}}_1(t) \\ \dot{\bar{w}}_2(t) \end{bmatrix} = \bar{G}\bar{w}(t) = \\ \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1(t) \\ \bar{w}_2(t) \end{bmatrix}, \\ v(t) = \bar{w}_1(t), \end{cases} \quad (29)$$

其中 $\bar{w}_i, \bar{G}_{ij}(i, j = 1, 2)$ 分别为适当维数的向量和矩阵. 构造降维扰动观测器

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = (\bar{G}_{22} - \bar{L}\bar{G}_{12})\eta(t) + [(\bar{G}_{22} - \bar{L}\bar{G}_{12})\bar{L} + \\ (\bar{G}_{21} - \bar{L}\bar{G}_{11})]v(t), \\ \hat{w}(t) = M_2\eta(t) + (M_1 + M_2\bar{L})v(t), \end{cases} \quad (30)$$

其中 \bar{L} 为观测器增益. 由假设容易得到 $(\bar{G}_{22}, \bar{G}_{12})$ 是可观测的, 因此通过选取观测器增益 \bar{L} 可使观测器极点配置到希望的左半根平面, 从而可保证观测器输出 $\hat{w}(t)$ 以要求指数规律趋近于扰动状态 $w(t)$. 分别在最优控制律(8)和(17)中以 $\hat{w}(t)$ 取代 $w(t)$, 可以得到在有限时域, 系统(1)关于性能指标(5)的动态控制律

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = (\bar{G}_{22} - \bar{L}\bar{G}_{12})\eta(t) + [(\bar{G}_{22} - \bar{L}\bar{G}_{12})\bar{L} + \\ (\bar{G}_{21} - \bar{L}\bar{G}_{11})]v(t), \\ u(t) = -R^{-1}B_1^T\{P(t)[x(t) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-h)} \times \\ B_1u(h)dh] + [P_1(t) + P_2(t)(M_1 + \\ M_2\bar{L})]v(t) + P_2(t)M_2\eta(t)\}; \end{cases} \quad (31)$$

以及在无限时域, 系统(1)关于性能指标(6)或(7)的动

态控制律

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = (\bar{G}_{22} - \bar{L}\bar{G}_{12})\eta(t) + [(\bar{G}_{22} - \bar{L}\bar{G}_{12})\bar{L} + \\ (\bar{G}_{21} - \bar{L}\bar{G}_{11})]v(t), \\ u(t) = -R^{-1}B_1^T\{Px(t) + P \int_{t-\tau}^t e^{A(t-h)} \times \\ B_1u(h)dh + [P_1(M_1 + M_2\bar{L}) - (A^T - \\ PS)^{-1}PD]v(t) + P_1M_2\eta(t)\}. \end{cases} \quad (32)$$

注 1 由于控制律(31)和(32)是含扰动观测器的动态控制律, 因此它们不是最优控制律. 为了使控制律(31)和(32)的控制效果尽量接近最优控制律(8)和(17), 可以通过配置观测器的极点的实部为尽量小的负数, 从而使观测器的输出 $\hat{w}(t)$ 以给定的指数速率趋近于 $w(t)$.

4 仿真示例(Simulation examples)

考虑由式(1)和(2)描述的持续扰动的控制时滞线性系统, 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ x(0) = [0 \ 0]^T, F = [1 \ 0], w(0) = [1 \ 0]^T. \quad (33)$$

最优控制的性能指标分别由式(6)或(7)描述, 其中:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 1.$$

如果

$$G = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.5 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

即扰动为渐近稳定的, 选取二次型性能指标为式(6), 分别取 $\tau = 0.1, 0.4, 0.6$ 时, 系统的状态变量 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 、最优控制变量 $u^*(t)$ 、性能指标 J 的仿真曲线如图1~图4所示, 性能指标如表1所示.

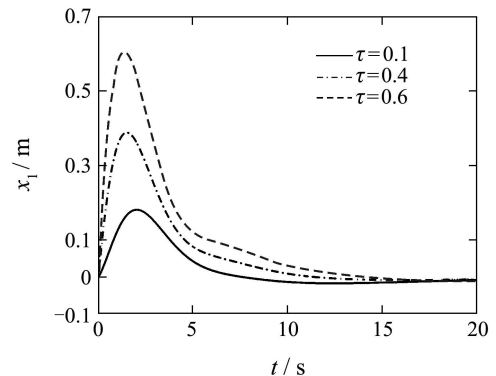


图1 衰减扰动不同时滞下状态 x_1 的仿真曲线
Fig. 1 State x_1 curves of different control delays under attenuation disturbances

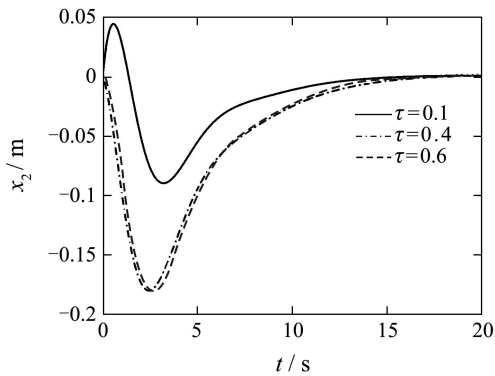


图 2 衰减扰动不同时滞下状态 x_2 的仿真曲线
Fig. 2 State x_2 curves of different control delays under attenuation disturbances

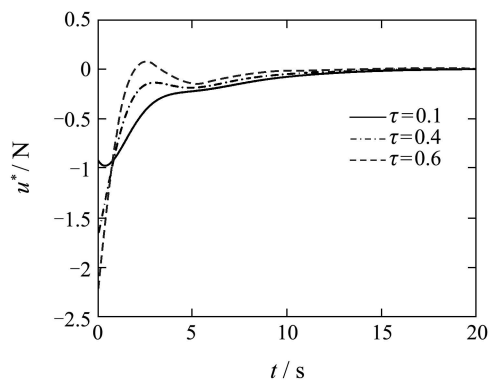


图 3 衰减扰动不同时滞下的最优控制律 u^*
Fig. 3 Optimal control u^* curves of different control delays under attenuation disturbances

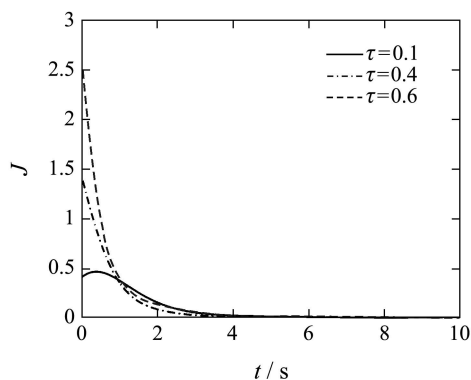


图 4 衰减扰动不同时滞下的性能指标 J
Fig. 4 Performance indexes J of different control delays under attenuation disturbances

表 1 衰减扰动不同时滞下的性能指标 J
Table 1 Performance indexes J of different control delays under attenuation disturbances

τ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
J	0.0947	0.1006	0.1071	0.1182	0.1355	0.1604

如果

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

即扰动输入为正弦特性, 选取二次型性能指标(7), 分别取不同的时滞 $\tau = 0.1, 0.4, 0.6$, 系统的状态变量 $x_1(t), x_2(t)$ 、最优控制变量 $u^*(t)$ 、性能指标 J 的仿真曲线如图 5~图 8 所示, 性能指标如表 2 所示。

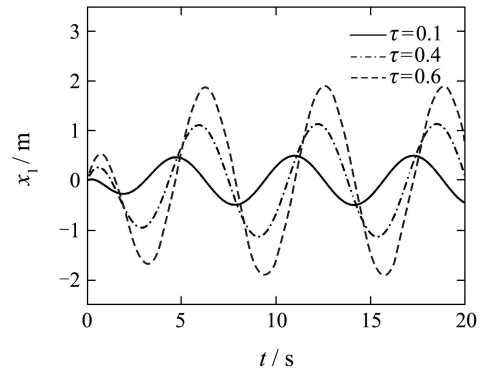


图 5 正弦扰动不同时滞下状态 x_1 的仿真曲线
Fig. 5 State x_1 curves of different control delays under sinusoidal disturbances

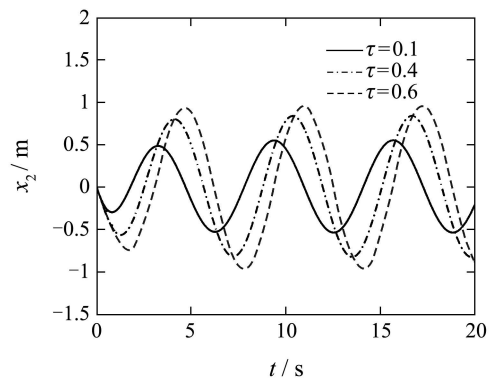


图 6 正弦扰动不同时滞下状态 x_2 的仿真曲线
Fig. 6 State x_2 curves of different control delays under sinusoidal disturbances

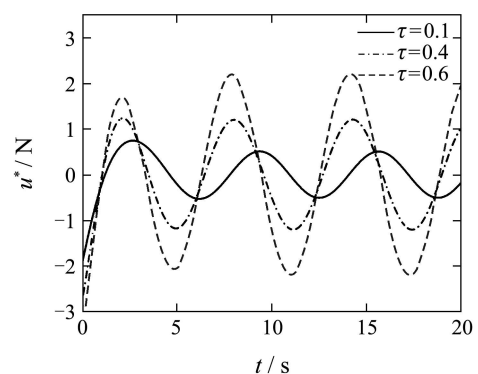
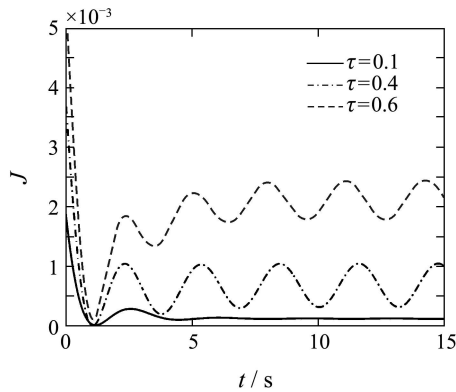


图 7 正弦扰动不同时滞下的最优控制律 u^*
Fig. 7 Optimal control u^* curves of different control delays under sinusoidal disturbances

图8 正弦扰动不同时滞下的性能指标 J Fig. 8 Performance indexes J of different control delays under attenuation disturbances表2 正弦扰动不同时滞下的性能指标 J Table 2 Performance indexes J of different control delays under sinusoidal disturbances

τ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
J	0.3224	0.4164	0.7387	1.3769	2.4154	3.9269

由以上示例的仿真结果可以看出,本文提出的关于控制含有时滞系统的最优扰动抑制控制律的设计方法是有效的。

5 结论(Conclusion)

本文研究了受确定动态特性的持续外部扰动、控制时滞线性系统的最优扰动抑制问题.在控制时滞系统转化为无时滞系统的基础上,将无穷维系统的解简化为求解矩阵方程,利用记忆控制和前馈控制分别补偿了时滞和扰动对系统的影响,通过设计扰动观测器解决前馈控制的物理不可实现问题.仿真实例表明,运用模型转换方法设计控制时滞受扰系统的最优控制律是一个有效的方法,该控制律对抑制外界确定扰动具有良好的鲁棒性,且容易实现,便于计算.

参考文献(References):

- [1] YUE D, HAN Q L, LAM J. Network-based robust H_∞ control of systems with uncertainty[J]. *Automatica*, 2005, 41(6): 999 – 1007.
- [2] MA H, TANG G Y, ZHAO Y D. Feedforward and feedback optimal control for offshore structures subjected to irregular wave forces[J]. *Ocean Engineering*, 2006, 33(8/9): 1105 – 1117.
- [3] WANG W, TANG G Y. Feedback and feedforward optimal control for offshore jacket platforms[J]. *China Ocean Engineering*, 2004, 18(4): 515 – 526.
- [4] ORCCOTOMA J A, PARIS J, PERRIER M. Paper machine controllability: effect of disturbances on basis weight and first-pass retention[J]. *Journal of Process Control*, 2001, 11(4): 401 – 408.
- [5] JOSE J, TAYLOR R J, DE CALLAFON R A, et al. Characterization of lateral tape motion and disturbances in the servo position error signal of a linear tape drive[J]. *Tribology International*, 2005, 38(6-7): 625 – 632.
- [6] RICHARD R, GEORGE W. Internal model based tracking and disturbance rejection for stable well-posed systems[J]. *Automatica*, 2003, 39(9): 1555 – 1569.
- [7] TANG G Y, ZHANG S M, ZHANG B L. Optimal tracking control with zero steady-state error for time-delay systems with sinusoidal disturbances[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 299(3): 633 – 644.
- [8] TANG G Y, ZHANG S M. Optimal rejection with zero steady-state error to sinusoidal disturbances for time-delay[J]. *Asian Journal of Control*, 2006, 8(2): 117 – 123.
- [9] BODSON M. Performance of an adaptive algorithm for sinusoidal disturbance rejection in high noise[J]. *Automatica*, 2001, 37(7): 1133 – 1140.
- [10] MARINE R, SANTOSUOSSO G L, TOMEI P. Robust adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency[J]. *Automatica*, 2003, 39(10): 1755 – 1761.
- [11] CHISCI L, ROSSITER J A, ZAPPA G. Systems with persistent disturbances: Predictive control with restricted constraints[J]. *Automatica*, 2001, 37(7): 1019 – 1028.
- [12] TANG G Y. Feedforward and feedback optimal control for linear systems with sinusoidal disturbances[J]. *High Technology Letters*, 2001, 7(4): 16 – 19.
- [13] LINDQUIST A, YAKUBOVICH V A. Optimal damping of forced oscillations in discrete-time systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(6): 786 – 802.
- [14] TANG G Y, GAO D X. Approximation design of optimal controllers for nonlinear systems with sinusoidal disturbances[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2007, 66(2): 403 – 414.
- [15] TANG G Y, SUN H Y, LIU Y M. Optimal tracking control for discrete time-delay systems with persistent disturbances[J]. *Asian Journal of Control*, 2006, 8(2): 135 – 140.
- [16] TANG G Y, ZHAO Y D. Optimal control for nonlinear time-delay systems with persistent disturbances[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2007, 132(2): 307 – 320.
- [17] TANG G Y, LI C, ZHAO Y D. Approximate design of optimal tracking controller for time-delay systems[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2006, 51(17): 2158 – 2163.
- [18] LANCASTER P, LERER L, TISMENETSKY M. Factored forms for solutions of $AX - XB = C$ and $X - AXB = C$ in companion matrices[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2002, 16(4): 469 – 482.

作者简介:

唐功友 (1953—),男,中国海洋大学信息科学与工程学院教授,博士生导师,主要研究方向为时滞系统、非线性系统及网络控制的分析与设计等, E-mail: gtang@ouc.edu.cn;

雷靖 (1969—),女,中国海洋大学信息科学与工程学院博士研究生,主要研究方向为时滞系统的分析与设计, E-mail: jinglei@ouc.edu.cn;

孙亮 (1979—),男,博士,在华南理工大学自动化科学与工程学院作博士后研究工作,主要研究方向为时滞系统与非线性系统的分析与设计等, E-mail: sunliang@ouc.edu.cn.