

一类基于轨迹的稳定性及其在电力系统的验证分析

殷明慧^{1, 2}, 邹云¹, 薛禹胜²

(1. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094;

2. 国网电力科学研究院/南瑞集团公司, 江苏 南京 210003)

摘要: 本文基于已有的电力工程实用方法, 建立了一类基于轨迹的Lagrange稳定性的数学描述及其判定方法. 首先提出了轨迹稳定性和摆次平稳性的概念, 并给出了应用轨迹几何特征, 即动态鞍点, 来判断轨迹稳定性的充分条件. 其次, 通过大量的电力系统仿真计算, 验证了这一理论在电力系统工程上的有效性. 同时, 研究结果也为电力工程及其他领域的应急控制下的基于轨迹的稳定分析判定方法奠定了数学理论基础.

关键词: 轨迹稳定性; 暂态稳定性; 应急控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

A class of stability theory based on trajectories and its applications to power systems

YIN Ming-hui^{1,2}, ZOU Yun¹, XUE Yu-sheng²

(1. College of Automation Control, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;

2. State Grid Electric Power Research Institute/Nanjing Automation Research Institute, Nanjing Jiangsu 210003, China.)

Abstract: On the basis of the existing electrical power engineering methods, a class of mathematical descriptions and the criterion of Lagrange stability based on trajectories are proposed. Firstly, the concept of trajectory stability and swing steadiness are defined. The sufficient conditions for the trajectory stability in terms of the geometric characteristics, called the dynamical saddle points, are then presented. Finally, the proposed methodology is verified by simulations of power systems. It provides a mathematical foundation for the emergency control in electrical power engineering and other fields.

Key words: trajectory stability; transient stability; emergency control

1 引言(Introduction)

在网络互联的复杂大系统中, 由局部事件导致系统整体崩溃的危机变得日益突出, 如电力网络的崩溃^[1,2]. 在这类应急状态下, 常态下建立的系统模型常常因实际系统遭受大幅破坏而失去其有效的参考价值. 因此, 有必要探索如何在应急状态下, 直接通过测量到的实际运动轨迹, 而非重构系统模型来判定系统暂态意义下的运动稳定特性.

为此, 文献[3]提出了基于故障轨线分析的互补簇簇际能量壁垒准则(CCEBC)理论和扩展等面积准则(EEAC)方法. 不同于传统稳定性分析, 该方法有效的回避了准确建模的难题, 放弃模型转而利用轨迹来分析系统的稳定性. 文献[4,5]运用数学语言刻画了CCEBC中的物理概念, 文献[6~8]运用传统稳

定性理论分析研究了CCEBC. 这些文献都是在尝试运用Lyapunov稳定性理论分析研究CCEBC, 希望找到CCEBC所判定的稳定性与Lyapunov稳定性的关系, 获得了许多有益的结论. 本文将在文献[4,5]的工作基础上, 通过对CCEBC的进一步抽象, 在不借助于具体模型方程或参数的前提下, 提出了一类直接基于轨线的稳定性概念及其理论分析方法. 本文主要工作包括如下两个方面:

1) 抽象的建立了轨迹稳定、摆次稳定、以及动态鞍点的概念, 给出了利用轨迹几何特征、通过动态鞍点来判断轨迹稳定的充分条件及其有效性定理;

2) 通过电力系统仿真计算, 验证说明1)中提出的理论条件适用于电力系统暂态稳定分析.

2 基本概念(Concepts)

为了有效地从数学上抽象稳定分析工程方法的机理,须针对轨迹(而非系统的平衡点)定义稳定性.为此,本节将抽象出若干基本概念.

2.1 常规轨迹的定义(Definition of normal trajectory)

考虑时域上给定的函数:

$$x(t) \in \mathbb{R}, t \geq t_0, x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

不妨设 $t_0 = 0$. 函数(1)是一个从 $x(0) = x_0$ 出发的运动轨迹. 根据实际系统运动轨迹的基本特征,本文给出常规轨迹的定义(即前提假设),如下:

定义1 称式(1)是一支常规轨迹系指:

A1) $\dot{x}(t)$ 是连续的;

A2) $\ddot{x}(t)$ 是分段连续的,且在不连续点的集合中不存在有限的聚点;

A3) 对于任意 $t_0 > 0$,存在 $\varepsilon > 0$,使得若在 $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ 或 $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ 上, $\ddot{x}(t) \neq 0$,则对任意的 $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$ 或 $(t_0, t_0 + \varepsilon)$,均有 $\ddot{x}(t) \neq 0$.

显然,综合假设A2)和假设A3),可得如下引理:

引理1 $x(t), t \geq 0$ 是常规轨迹,对于任意 $t_0 > 0$,存在 $\varepsilon > 0$ 使得在 $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ 或 $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ 中,如果 $\ddot{x}(t)$ 不恒等于0,那么 $\ddot{x}(t)$ 或恒大于0,或恒小于0.

2.2 轨迹的稳定性(Trajectory stability)

考虑高维空间轨迹,亦即

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, x(0) = x_0. \quad (2)$$

定义2 对于轨迹 $x(t) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$,如果存在一有界正数 $L > 0$,使得对于所有 $t \geq 0, \|x(t)\| \leq L$,那么称轨迹(2)是Lagrange稳定(简称稳定的).这里 $\|\cdot\|$ 是 \mathbb{R}^n 空间的范数.

考虑高维空间轨迹(2),令

$$y_k(t) = \alpha_k^T x(t), 1 \leq k \leq m, m \geq n. \quad (3)$$

其中 $\alpha_k \in \mathbb{R}^n$ 是常向量,且 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]$ 是行满秩矩阵.则称式(3)为轨迹(2)的一维投影轨迹.

定理1 维轨迹(2)稳定的充要条件是它的所有一维投影轨迹(3)稳定的.

证明可参见文[5],这里略去.由定理1可知,欲讨论 n 维轨线的稳定性,只需对一维轨迹的运动特性进行分析即可.因此,后续章节仅讨论 $n = 1$ 的轨迹(1).

2.3 摆次和动态鞍点(Swing and dynamic saddle point)

摆次是实际一维轨迹特有的,也是最为重要的运动特征.本节主要对摆次的性质进行分析和研究.

定义3 设 $t_2 > t_1 \geq 0$.如果轨迹(1)满足下述两个条件之一,那么 $x(t)$ 从 $x(t_1)$ 到 $x(t_2)$ 的运动过程称为 $x(t)$ 的摆次,记为 $(t_1, t_2)_{SW}$:

1) $\dot{x}(t) \equiv 0, t_1 \leq t \leq t_2$.对于任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\xi \in (t_1 - \varepsilon, t_1)$,使得 $\dot{x}(\xi) \neq 0$,且 $t_2 = \max\{\tau: \dot{x}(t) \equiv 0, t \in [t_1, \tau]\}$.满足该条件的摆次 $(t_1, t_2)_{SW}$ 称为停摆.

2) $\dot{x}(t) \neq 0, t_1 < t < t_2$.且若 $t_2 \neq \infty$,则 $\dot{x}(t_2) = 0$;若 $t_1 \neq 0$,则 $\dot{x}(t_1) = 0$.

如果 $t_2 < \infty$,则摆次 $(t_1, t_2)_{SW}$ 称为有穷历经摆次,简称为有穷摆次;如果 $t_2 = \infty$,则摆次 $(t_1, t_2)_{SW}$ 称为无穷历经摆次,简称为无穷摆次; $x(t_2)$ 为该摆次的最远点,简称为最远摆点.如果 $t_1 = 0$,则摆次 $(t_1, t_2)_{SW}$ 称为轨迹的首摆.

鉴于一维投影轨迹是一类非常广泛的函数.因此,在数学上首先必须回答,它一定会有摆次吗?它在任意有限时间内的运动一定可以由有限个摆次运动所构成吗?

引理2 $x(t), t \geq 0$ 是常规轨迹, $\dot{x}(T) = 0, T > 0$ 为有限时间,则存在正整数 $N < \infty$ 和

$$0 = s_1 \leq t_1 < s_2 \leq t_2 < \dots < s_N \leq t_N = T \quad (4)$$

使得 $\dot{x}(t) = 0, s_k \leq t \leq t_k, k = 1, 2, \dots, N$ 且 $\dot{x}(t) \neq 0, t_k < t < s_{k+1}, k = 1, 2, \dots, N - 1$.

证明请参见附录1.

推论1 设 $x(t), t \geq 0$ 是常规轨迹,则对于任意有限时间 $t_0 > 0$,存在 $\varepsilon > 0$ 使得在 $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ 或 $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ 中,如果 $\dot{x}(t)$ 不恒等于0,那么 $\dot{x}(t)$ 或是恒大于0,或是恒小于0.

证明很简单,这里略去.由引理2和定义3,可以直接得出如下结论.

定理2 设 $x(t), t \geq 0$ 是常规轨迹.对于任意有限时间 $T > 0$,轨迹 $x(t)$ 从 $x(0)$ 到 $x(T)$ 的运动过程将由有限个摆次构成,即存在整数 $N < \infty$ 和

$$0 \leq s_1 \leq t_1 < s_2 \leq t_2 < \dots < s_N \leq t_N = T \quad (5)$$

使得 $(s_k, t_k)_{SW}$ 和 $(t_k, s_{k+1})_{SW}$ 都是轨迹 $x(t)$ 的摆次.

由定理2可知,常规轨迹具有如下良好的性质,即它从初始点到任意有限时刻点的运动过程都是由有限个摆次构成,其中包括停摆.为符合工程意义并简化讨论,本文进一步给出如下合理假设:

A4) 一维系统轨迹中不会出现停止摆次.

定义4 设 $t_D > 0$.若

$$\dot{x}(t_D) = 0 \text{ 或 } \ddot{x}(t_D^-) \ddot{x}(t_D^+) \leq 0; \quad (6a)$$

存在 $\varepsilon > 0$,

$$\text{使得 } \ddot{x}(t) \dot{x}(t) < 0, t_D - \varepsilon < t < t_D. \quad (6b)$$

那么,称轨迹点 $x_{\text{DSP}} = x(t_D)$ 为轨迹的动态鞍点.

这个定义的原型可参见文献[4].动态鞍点是轨迹上某个减速过程的结束点.该点之后,系统将维持原有的运动方向不改变,继而进入加速阶段.

3 动态鞍点与摆次的平稳性(Dynamic saddle point and swing steadiness)

3.1 摆次的平稳性(Swing steadiness)

在轨迹稳定性分析中,摆次作为动态鞍点与轨迹之间的中间环节,将其在稳定性方面的特征刻画清楚是非常必要的.

定义5 设 $x(t), t \geq 0$ 为常规轨迹.则称其中的一个摆次 $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$ 是平稳的(steady),系指其满足如下两个条件:

- 1) $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$ 是有穷摆次,即 $t_2 < \infty$;
- 2) $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$ 摆幅有界.亦即 $|x(t_2) - x(t_1)| < \infty$.

若 $t_2 = \infty$,且 $\lim_{t \rightarrow t_2} x(t) \rightarrow \infty$,则称 $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$ 是发散的.

引理3 设 $x(t), t \geq 0$ 为常规轨迹,其中的一个摆次 $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$.则

1) $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$ 是平稳的充要条件是, $t_2 < \infty$,且存在常数 $\varepsilon > 0$,使得 $\dot{x}(s) \dot{x}(t) < 0$,其中 $s \in (t_2 - \varepsilon, t_2), t \in (t_2, t_2 + \varepsilon)$.

2) 若 $x(t)$ 存在一个发散的摆次 $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$,则该轨迹是不稳定的.

证 这是引理1、推论1和定义5的直接推论.

3.2 动态鞍点与摆次的平稳性(Dynamic saddle point and swing steadiness)

定理3 设 $x(t), t \geq 0$ 为常规轨迹,其中出现的一个有穷摆次是 $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$,则

- 1) 若 $\ddot{x}(t_2^-) \ddot{x}(t_2^+) > 0$,则 $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$ 是平稳的;
- 2) 若 $(t_1, t_2]$ 内不存在 t_D ,使得 $x_{\text{DSP}} = x(t_D)$ 为动态鞍点,则 $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$ 是平稳的.

证 证明参见附录2.

定理3表明,动态鞍点可以作为判定有穷摆次平稳特性的特征点.

定义6 设 $x(t), t \geq 0$ 为常规轨迹.若存在 $t_0 \in (t_1, t_2)$,满足 $\ddot{x}(t)$ 在 $t = t_0$ 处连续,且 $\ddot{x}(t_0) \dot{x}(t_0) < 0$,则称区间 (t_1, t_2) 内轨迹存在减速阶段;若 $\ddot{x}(t)$ 在 $t = t_0$ 处连续,且 $\ddot{x}(t_0) \dot{x}(t_0) \geq 0$,则称区间 (t_1, t_2) 内轨迹存在加速阶段.

引理4 如果摆次 $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$ 是常规轨迹 $x(t), t \geq 0$ 非首摆的有穷摆次,那么存在有限时刻 \hat{t}_1, \hat{t}_2 和 $t_3, t_1 < \hat{t}_1 \leq \hat{t}_2 < t_2 < t_3 < \infty$,使得在 (t_1, \hat{t}_1) 内存在加速阶段,在 (\hat{t}_2, t_2) 内存在减速阶段,之后在 (t_2, t_3) 内存在再次加速阶段.

证 该引理可由定义5以及微分中值定理和假设A1)~A4)直接推导出来,类似于定理3的证明.

为了更加清晰的描述摆次内,加速运动和减速运动交替出现的运动特征,本文进一步给出如下定义:

定义7 设 $x(t), t \geq 0$ 为常规轨迹.如果存在 $t_D < t_A$,使得 $x(t)$ 在 (t_1, t_D) 内存在减速阶段,之后在 (t_A, t_2) 内存在加速阶段,则称系统轨迹是在 (t_1, t_2) 内交替驱动的.

由引理4可以直接推导出如下定理.

定理4 设 $x(t), t \geq 0$ 为常规轨迹,其中某一摆次为 $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$.如果 $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$ 是有穷摆次,则存在 $t_R > t_2$ 使得轨迹 $x(t)$ 在区间 (t_1, t_R) 内交替驱动.

定理4的物理意义非常清晰,即轨迹在完成一个有穷摆次的时刻 t_2 前后一定具有交替驱动的运动特征.一般而言,常规轨迹也可能不具有交替驱动的运动特征.

定义8 摆次 $(t_1, \infty)_{\text{SW}}$ 是常规轨迹 $x(t), t \geq 0$ 中出现的无穷摆次,如果无穷摆次内仅存在减速阶段,则称摆次 $(t_1, \infty)_{\text{SW}}$ 是拟平稳的(quasi-steady).

需要指出的是,拟平稳的摆次也可能包括有发散摆次.显然,如果无穷摆次内仅存在加速阶段,则摆次 $(t_1, \infty)_{\text{SW}}$ 显然是发散的.

定理5 设常规轨迹 $x(t), t \geq 0$ 在区间 (t_{R1}, t_{R2}) 内交替驱动,如果在区间 (t_{R1}, t_{R2}) 内不出现动态鞍点,那么一定存在时刻 $t_2 \in (t_{R1}, t_{R2})$ 和某个 $t_1 > 0$,使得 $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$ 是 $x(t)$ 的平稳摆次.

证 根据引理4,存在 t_{r1} 和 $t_{r2}, t_{R1} < t_{r1} < t_{R2} < t_{r2} < t_3 < \infty$,使得

$$\ddot{x}(t_{r1}) \dot{x}(t_{r1}) < 0, \ddot{x}(t_{r2}) \dot{x}(t_{r2}) \geq 0. \quad (7)$$

对于任意 $t \in [t_{r1}, t_{r2}]$,如果

$$\dot{x}(t) \neq 0, \quad (8)$$

那么,由 $\dot{x}(t)$ 的连续性和(7)可知,一定存在 $t_D \in [t_{r1}, t_{r2}]$,并满足 $\ddot{x}(t_D^-) \ddot{x}(t_D^+) \leq 0$.因此,根据定义4,式(8)的成立意味着在 (t_1, t_{R2}) 区间内会出现动态鞍点 $x_{\text{DSP}} = x(t_D)$.显然,这与不出现动态鞍点的条件矛盾.所以,存在 $\hat{t}_2 \in [t_{r1}, t_{r2}]$,满足 $\dot{x}(\hat{t}_2) = 0$.令

$$t_2 = \min \{t : \dot{x}(t) = 0, 0 \leq t \leq t_{R2}\}, \quad (9)$$

$$t_1 = \begin{cases} \max\{t : t \in \Omega(t)\}, & \Omega(t) \neq \phi, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (10)$$

其中 $\Omega(t) = \{t : \dot{x}(t) = 0, 0 \leq t < t_2\}$. 根据上述定义的 t_1 和 t_2 , 可得 $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$ 是有穷摆次. 再根据定理3, 可得摆次 $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$ 是平稳的. 证毕.

定理6 设 $x(t), t \geq 0$ 是常规轨迹, 其中某一摆次为 $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$. 如果在区间 $(t_1, t_2]$ 内不存在动态鞍点, 则

- 1) 若 $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$ 是有穷摆次, 则它是平稳的;
- 2) 若存在充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得 $x(t)$ 在 $(t_1, t_2 + \varepsilon)$ 内具有交替驱动的运动特征, 则 $(t_1, t_2)_{\text{SW}}$ 是平稳的;
- 3) 如果存在时刻 $t_0 > 0$, 使得 (t_0, ∞) 内的系统轨迹 $x(t)$ 不具有交替驱动的运动特征, 则轨迹在 (t_0, ∞) 内会出现一个无穷摆次, 它可能是拟平稳的也可能是发散的.

证 根据定理2~定理5、定理6结论1)~3)得证. 证毕.

定理6结论1)的有穷摆次的前提条件过强, 也没有利用轨迹的特征. 相比之下, 定理6结论2)更能说明问题, 其利用了交替驱动的轨迹特征作为限定条件, 描述了动态鞍点出现和摆次平稳性的关系. 此外, 定理6结论3)在充满干扰的应急情形下是不常见的, 至少在电力系统仿真实验中暂未见. 因此, 暂不对其作进一步讨论.

4 摆次平稳性与轨迹稳定性的关系(Relationship between swing steadiness and trajectory stability)

对于常规轨迹中摆次平稳性与轨迹稳定性之间的关系, 主要有如下两个问题:

- 1) 如果轨迹中的所有摆次都是平稳的, 系统轨迹是否稳定?
- 2) 如果系统轨迹中出现非平稳摆次, 系统轨迹是否失稳?

一个显然的结论是引理3的简单推论:

定理7 设 $x(t), t \geq 0$ 是常规轨迹. 若 $x(t)$ 出现发散摆次, 则 $x(t)$ 不稳定.

但事实上, 对于一般的常规轨迹而言, 摆次平稳性与轨迹稳定性之间的关系异常复杂^[4]. 为此, 下文将深入分析, 当驱动常规轨迹的系统满足什么样的特性时, 才能保证所有摆次平稳即意味着轨迹稳定.

在文献[4]的基础上, 本文将轨迹的交替驱动特征概念推广到常规轨迹的驱动系统, 即如下所示的一般非自治系统

$$m\ddot{x} = -F(t, x), t \geq 0. \quad (11)$$

该模型的引入是为了得到一组定性描述的条件, 用以定性地刻画出这样的一类系统: 其轨迹各摆次的平稳性即蕴涵着整个轨迹的稳定性. 与传统的Lyapunov方法不同, 这组条件只是类似于Lipschitz条件一样的作用, 与具体稳定性分析算法参数无关.

定义9 设 $x(t)$ 是系统(11)的任意轨迹. 称系统(11)在 (t_0, T) 内关于 (X_1, X_2) 是一致交替驱动的, 系指: 对于任意给定的 $T > t_0 \geq 0$, 若 $x(t_0) \in (X_1, X_2)$, 而 $x(T) \notin (X_1, X_2)$, 则 $x(t)$ 在 (t_0, T) 内是交替驱动的.

定理8 设系统(11)关于 (X_1, X_2) 是一致交替驱动的, 且其轨迹是常规的. 如果从 $x(t_0) \in (X_1, X_2)$ 出发的系统轨迹 $x(t)$ 不出现动态鞍点, 那么系统轨迹 $x(t)$ 的所有摆次是平稳的即蕴涵着系统轨迹 $x(t)$ 是稳定的.

证 这是定义2、定义8与定理6的直接推论.

定理8阐述了非自治系统中, 轨迹摆次平稳性与轨迹稳定性之间的关系. 但对于一般的实际系统, 仅仅根据定义8是较难检验非自治系统的一致交替驱动特性的. 为了理论上的完整性, 下面分别针对非自治的 $F(t, x)$ 和自治的 $F(x)$ 给出系统(11)一致交替驱动的两组解析条件.

引理5 设系统(11)的轨迹是常规的. $\infty > X_2 > X_1 > -\infty$ 为常数. 若对任意的 $T > 0$, 存在 $\delta_T > 0$, 和 $X_2 > X_{2T} > X_{1T} > X_1$, 使得当 $t \in (0, T)$ 时,

$$F(t, X_{1T}) = F(t, X_{2T}) = 0, \quad (12a)$$

$$\begin{cases} F(t, x)(x - X_{kT}) < 0, \\ x \in (X_{kT} - \delta_T, X_{kT} + \delta_T) \setminus \{X_{kT}\}. \end{cases} \quad (12b)$$

其中 $k = 1, 2$, 则系统(11)是关于 (X_1, X_2) 一致交替驱动的.

证 假设定理条件成立. 若存在 $T > t_0 > 0$, 使得 $x(t_0) \in (X_1, X_2)$ 且 $x(T) = X_2$, 则由轨迹的连续性, 必存在时刻 τ 使得

$$\tau = \min\{t : x(t) = X_{2T}, t_0 < t < T\}. \quad (13)$$

于是由推论1, 式(13)意味着存在充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\dot{x}(t) > 0, t \in (\tau - \varepsilon, \tau). \quad (14)$$

另一方面, 由式(11)(12)可得 $\dot{x}(\tau) = 0$, 且对充分小的 $\varepsilon > 0$,

$$\ddot{x}(t) < 0, t \in (\tau - \varepsilon, \tau), \quad (15a)$$

$$\ddot{x}(t) > 0, t \in (\tau, \tau + \varepsilon). \quad (15b)$$

综合式(14)(15), 由定义6即可知 $x(t)$ 在 $t = \tau$ 附近是交替驱动的. 同理可证若存在 $T > 0$ 使得 $x(T) = X_1$ 的情形. 由定义9, 引理证毕.

推论 2 设系统 (11) 是自治的, 亦即 $m\ddot{x} = -F(x)$, 其轨迹是常规的. 如果存在 $\infty > X_2 > X_1 > -\infty$ 和 $\delta > 0$, 使得 $F(x)$ 在 $x = X_1$ 和 $x = X_2$ 处连续, 且

$$F(X_1) = F(X_2) = 0, \tag{16a}$$

$$\begin{cases} F(x)(x - X_k) < 0, \\ x \in (X_k - \delta, X_k + \delta) \setminus \{X_k\}, \end{cases} \tag{16b}$$

其中 $k = 1, 2$, 则系统(11)关于 (X_1, X_2) 是一致交替驱动的. 这里式(16)也可以被替换为 $F(x)$ 分段连续, 且 $F(X_k^-)F(X_k^+) \leq 0, k = 1, 2$.

定理 9 设系统(11)的轨迹是常规的, 且满足(12)(或者定常时满足(16)). 如果从 $x(t_0) \in (X_1, X_2)$ 出发的系统轨迹 $x(t)$ 不出现动态鞍点, 那么系统轨迹 $x(t)$ 的所有摆次是平稳的即蕴涵着系统轨迹 $x(t)$ 是稳定的.

综合本节分析可知: 若系统满足交替驱动特性, 则

- 1) 如果轨迹不出现动态鞍点, 其所有摆次平稳, 系统轨迹稳定.
- 2) 如果轨迹出现不稳定摆次, 则摆次内会出现动态鞍点, 而系统轨迹失稳.

结论1)排除了所有摆次平稳而轨迹失稳的可能情况. 同时, 该结论也说明了如果系统轨迹失稳, 则轨迹内一定会出现动态鞍点. 结论2)指出了轨迹失稳的一种常见特征, 即轨迹中出现时间无穷、位置无界的发散摆次, 在该摆次中也一定会出现动态鞍点.

5 电力系统中的仿真验证(Simulation verification in power systems)

对于一致交替驱动系统, 可以把定理9作为动态鞍点是轨迹失稳判据的理论基础. 如果能够进一步验证电力系统中一维投影轨迹的驱动系统具有一致交替驱动的特性, 那么也就为CCEBC理论和EEAC方法应用动态鞍点作为轨迹失稳判据奠定了一个新的数学理论基础.

CCEBC/EEAC中, 一维投影轨迹的驱动系统被称为映象系统^[3,9]. 但 n 台机组组成的电力系统理论上存在 $2^{n-1} - 1$ 个映象系统. 为此, CCEBC/EEAC充分利用电力系统实际暂态过程中表现出的两机群分离为主导的动态特征^[3,10~15], 将待分析的映象系统范

围缩小为几个, 称之为主导映象^[3]. 本文也仅选择主导映象作为待验证的映象系统.

由定义8可知, 仿真验证映象系统具有一致交替驱动特性的关键是, 确定一个有限的边界位置 θ_{AD} , 使得映象系统的所有单方向运动轨迹, 即摆次, 在越过时便出现交替驱动的特征. 为此, 本文几乎遍历新英格兰仿真系统(10机39母线)的母线三相故障, 共计得到算例249个. 其中, 平稳摆次12468个, 不稳定摆次225个. 虽然仅通过仿真数据对主导映象的一致交替驱动特性进行了验证, 但仿真算例选取的全面性和充分性可以很大程度上保证验证结果的正确性.

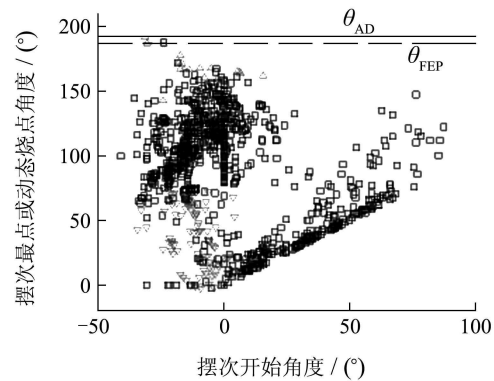


图1 一致交替驱动特性的正方向边界值(划分A)
Fig. 1 Boundary of uniformly alternating-driven characteristic(separation mode A)

仿真中发现3种主要的主导映象系统, 它们对应的划分分别是A为 $\{(5), (1 \sim 4, 6 \sim 10)\}$, B为 $\{(9), (1 \sim 8, 10)\}$ 和C为 $\{(1 \sim 9), (10)\}$. 图1~图3分别给出了这3个主导映象轨迹中的所有正向摆次的位置信息. 图中, 以“□”标识不出现动态鞍点的平稳摆次, 其横坐标为摆次的初始角度, 纵坐标为摆次的结束角度, 即最远点角度; 以“△”和“▽”分别标识出现动态鞍点的不稳定摆次和平稳摆次, 它们的横坐标为摆次的初始角度, 纵坐标为摆次出现第一个动态鞍点的角度. 根据仿真数据及图1~3, 可得

1) 所有失稳算例中, 主导映象轨迹都出现了正向的不稳定摆次. 因此, 本文的仿真算例只能够验证主导映象在正方向上是否存在边界值.

2) 对于所有出现动态鞍点的摆次, 主要是正向的不稳定摆次, 它们出现第一个动态鞍点的位置保持在一个有界的范围内, 将它们的最大值记为 θ_{DSP} . 对于不出现动态鞍点的平稳摆次 $(t_1, t_2)_{SW}$, 它们最远点的最大值记为 θ_{FEP} (图1~3中用虚线标识). θ_{FEP} 与 θ_{DSP} 在数值上是接近的. 如果 $\theta_{FEP} < \theta_{DSP}$, 则可将 θ_{AD} 取值为 θ_{DSP} ; 如果 $\theta_{FEP} > \theta_{DSP}$,

则可将 θ_{AD} 取值为稍大于 θ_{FEP} 的某个值. 两种取值方法都可以保证, 对于所有仿真获得的轨迹, 在越过正方向边界值 θ_{AD} (图1~3中实线所示)后, 都会出现动态鞍点, 从而具有交替驱动的特征. 因此验证了主导映象系统在正方向上具有一致交替驱动特性.

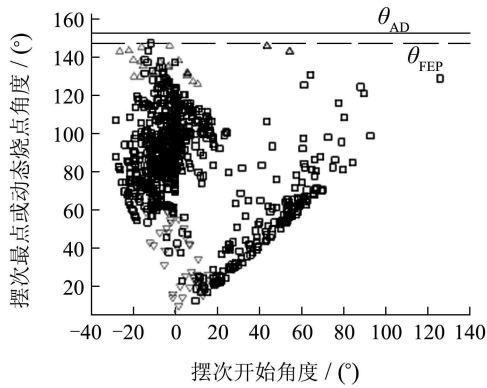


图2 一致交替驱动特性的正方向边界值(划分B)

Fig. 2 Boundary of uniformly alternating-driven characteristic(separation mode B)

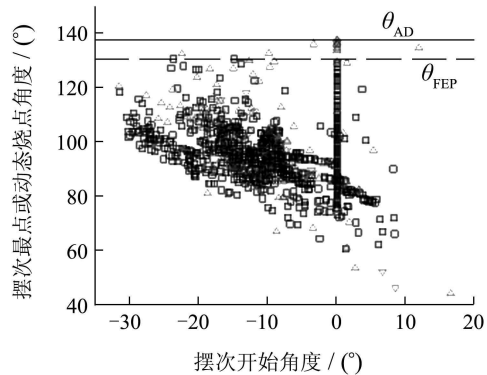


图3 一致交替驱动特性的正方向边界值(划分C)

Fig. 3 Boundary of uniformly alternating-driven characteristic(separation mode C)

6 结论(Conclusion)

本文的主要工作可总结如下:

1) 明确提出了一种基于轨迹的稳定性概念, 即轨迹稳定性. 该稳定性区别于传统的Lyapunov稳定性理论. 两种稳定性的本质的区别在于对于数学模型的依赖性. 如果无从获取准确的数学模型、甚至没有具体模型时, 只能利用系统的实时轨迹特征来分析、评估系统的稳定性, 这便是轨迹稳定性提出的基本思想. 这个情形在应急状态下经常会发生.

2) 深入分析了动态鞍点、摆次平稳性及轨迹稳定性之间的关系, 确定了一类能够使用动态鞍点作为轨迹失稳特征的系统. 如果系统是一致交替驱动的, 那么轨迹不出现动态鞍点则稳定; 轨迹失稳必定出现动态鞍点. 此时, 轨迹稳定性的判定基于轨迹

的几何特征, 即是否出现动态鞍点, 而非基于系统模型. 这为基于动态鞍点的轨迹稳定性判定分析方法在一般动力学系统理论方面的进一步拓广奠定了数学理论基础, 并明确了该方法的适用范围.

一致交替驱动本身是对系统性质的约束, 但与Lyapunov稳定性分析方法相比, 轨迹稳定性分析方法在对系统性质的要求掌握程度上是不同的. 它不需要较为精确的定量模型, 只需要知道一个总体上定性的性质.

3) 通过大量仿真计算, 验证说明了电力系统中主导映象系统具有一致交替驱动的特性, 为CCEBC理论和EEAC方法应用动态鞍点作为轨迹失稳判据奠定了一个新的数学理论基础.

参考文献(References):

- [1] 薛禹胜. 综合防御由偶然故障演化为电力灾难—北美8.14大停电的警示[J]. 电力系统自动化, 2003, 37(18): 1-5.
(XUE Yusheng, The way from a simple contingency to system-wide disaster—Lessons from the eastern interconnection blackout in 2003[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2003, 37(18): 1-5.)
- [2] US-Canada Power System Outage Task Force. *Final report on the August 14, 2003 blackout in the United States and Canada: causes and recommendation*[R]. 2004.
- [3] 薛禹胜. 运动稳定性量化学理论—非自治非线性多刚体系统的稳定性分析[M]. 南京: 江苏科学技术出版社, 1999.
(XUE Yusheng. *Quantitative Study of General Motion Stability and an Example on Power System Stability*[M]. Nanjing: Jiangsu Science and Technology Press, 1999.)
- [4] 邱志鹏, 邹云, 薛禹胜. 非线性系统同步稳定分析的互补簇际能量壁垒准则的数学描述[J]. 非线性动力学学报, 2002, 9(3/4): 120-131.
(QIU Zhipeng, ZOU Yun, XUE Yusheng. On the mathematical description of complementary cluster energy barrier criterion for the synchronous stability of nonlinear systems[J]. *Nonlinear Dynamics in Science and Technology*, 2002, 9(3/4): 120-131.)
- [5] 邹云, 邱志鹏, 薛禹胜. 非自治系统的同步稳定性[J]. 应用数学学报, 2001, 24(1): 155-157.
(ZOU Yun, QIU Zhipeng, XUE Yusheng. Synchronous stability of nonautonomous dynamic systems[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2001, 24(1): 155-157.)
- [6] 廖浩辉, 唐云. 电力系统中CCEBC/EEAC方法的数学描述[J]. 电力系统自动化, 2003, 27(7): 12-16.
(LIAO Haohui, TANG Yun. Mathematical Descriptions of CCEBC/EEAC method in power systems[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2003, 27(7): 12-16.)
- [7] 廖浩辉, 唐云. CCEBC/EEAC方法的定性分析[J]. 中国科学E辑, 2004, 34(7): 818-831.
(LIAO Haohui, TANG Yun. Qualitative analysis of the CCEBC/EEAC method[J]. *Science in China Series (Technological Sciences)*, 2004, 34(7): 818-831.)
- [8] TANG Y. Synchronous stability of multi-machine systems[C] // *Proceedings of the 3rd WSEAS Symposium on Mathematical Methods and Computational Techniques in Electrical Engineering*. Wisconsin: WSEAS Press, 2001: 5181-5184.
- [9] 薛禹胜. 滑步与发散, 运动系统与一般动力学系统—兼谢廖浩辉和唐云先生[J]. 电力系统自动化, 2003, 27(7): 17-21.
(XUE Yusheng. Pole-slip vs divergence, motion system vs general

- dynamic system[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2003, 27(7): 17–21.)
- [10] 余贻鑫, 王成山. 电力系统稳定性理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
(YU Yixin, WANG Chengshan. *Theory and Method of Power System Stability*[M]. Beijing: Science Press, 1999.)
- [11] FOUAD A A, VITTAL V. *Power System Transient Stability Analysis Using the Transient Energy Function Method*[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1991.
- [12] MARIA G A, TANG C, KIM J. Hybrid transient stability analysis[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 1990, 5(2): 384–393.
- [13] 刘笙. 暂态能量函数方法的新近进展[J]. 电力系统自动化, 1998, 22(9): 19–24.
(LIU Sheng. The recent progress of the transient energy function method[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 1998, 22(9): 19–24.)
- [14] 房大中, 张尧, 宋文南, 等. 修正的暂态能量函数及其在电力系统稳定性分析中的应用[J]. 中国电机工程学报, 1998, 18(3): 200–203.
(FANG Dazhong, ZHANG Yao, SONG Wennan, et al. Corrected transient energy function and its application to power system transient stability assessment[J]. *Proceedings of the Chinese Society for Electrical Engineering*, 1998, 18(3): 200–203.)
- [15] FANG D Z, CHUNG T S, ZHANG Y, et al. Transient stability limit conditions analysis using a corrected transient energy function approach[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2000, 15(2): 804–810.

附录1 引理2的证明(Appendix 1 Proof of Lemma 2)

由假设A1)(即 $\dot{x}(t)$ 是连续的)和 $\dot{x}(T) = 0$, 可知

$$s_1 = \min \{s \geq 0 : \dot{x}(s) = 0\} \quad (\text{A1})$$

是有定义的, 且 s_1 满足 $0 \leq s_1 \leq T$. 因此, 根据假设A1), 存在 $t_1 \leq T$ 使得

$$t_1 = \max \{t : \dot{x}(s) = 0, t \geq s \geq s_1\}. \quad (\text{A2})$$

如果 $t_1 = T$, 则证明完毕. 否则, 再次根据假设A1), 存在 $t_1 < s_2 < T$, 使得

$$s_2 = \max \{s : \dot{x}(t) \neq 0, t_1 < t < s\}. \quad (\text{A3})$$

同理, 针对区间 $[s_2, T]$ 重复上述过程, 可以得到 t_2, s_3 . 以此类推, 最终可得到一个区间序列如下:

$$0 = s_1 \leq t_1 < s_2 \leq t_2 < \dots < s_n \leq t_n \leq T. \quad (\text{A4})$$

其中: $\dot{x}(t) = 0, s_k \leq t \leq t_k, k = 1, 2, \dots, n$ 且 $\dot{x}(t) \neq 0, t_k < t < s_{k+1}, k = 1, 2, \dots, n-1$.

再根据假设A2)和微分中值定理, 存在 $t_{k1}, t_{k2} \in [t_k, s_{k+1}]$, 满足

$$\ddot{x}(t_{k1}) > 0 \text{ 且 } \ddot{x}(t_{k2}) < 0. \quad (\text{A5})$$

假设不存在一个有限整数 N 使得 $t_N = T$, 那么

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (s_{k+1} - t_k) = 0. \quad (\text{A6})$$

令 $t_0 = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \{t_k\}$. 根据式(A6), 可以得到 $t_0 = \sup\{s_k, t_k : k = 1, 2, \dots\}$ 是对于所有 $t_k \leq T$ 的一个聚点. 综合式(A5)和引理1可知, 该结论不满足假设A3). 因此, 存在一个有限整数 N 使得 $t_N = T$. 证毕.

附录2 定理3的证明(Appendix 2 Proof of theorem 3)

假设 $\dot{x}(t_2^-)\dot{x}(t_2^+) > 0$ 成立. 根据常规轨迹的定义和推论1, 不失一般性的假定 $\dot{x}(t) > 0, t \in (t_1, t_2)$. 设结论1)成立, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\ddot{x}(t) \dot{x}(t) < 0, t \in (t_2 - \varepsilon, t_2). \quad (\text{A7})$$

否则, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta \in (t_2 - \varepsilon, t_2)$ 使得

$$\ddot{x}(\eta) \geq 0, \eta \in (t_2 - \varepsilon, t_2). \quad (\text{A8})$$

另一方面, 对于充分小的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\xi \in (t_2 - \varepsilon, t_2)$ 使得

$$0 = \dot{x}(t_2) = \dot{x}(t_2 - \varepsilon) + \ddot{x}(\xi)\varepsilon. \quad (\text{A9})$$

因此

$$\ddot{x}(\xi) < 0, \xi \in (t_2 - \varepsilon, t_2). \quad (\text{A10})$$

由引理1可知, 式(A8)和(A10)与假设A3)矛盾. 所以, 式(A7)成立. 这样, 由定理假设条件与假设A2)即可知, 存在充分小的 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\ddot{x}(t) < 0, t \in (t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon) \quad (\text{A11})$$

因此, $\dot{x}(t) = \dot{x}(\zeta)(t - t_2) < 0, t \in (t_2, t_2 + \varepsilon)$, 其中 $\zeta \in (t_2, t)$. 根据引理3, 结论1)得证. 由式(A7)可知, $x(t_2)$ 满足式(6b), 进而联合结论1)即得结论2). 证毕.

作者简介:

殷明慧 (1978—), 男, 博士研究生, 研究方向为电力系统暂态稳定分析, E-mail: ymhui@21cn.com;

邹云 (1962—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为奇异系统、应急控制、阻隔控制和电力系统暂态稳定;

薛禹胜 (1941—), 男, 博士生导师, 中国工程院院士, 总工程师, 主要从事电力系统自动化方面的研究工作.