

文章编号: 1000-8152(2008)01-0261-04

线性区间离散时滞系统的区域镇定

毛维杰, 张媛媛

(浙江大学 工业控制技术国家重点实验室, 先进控制研究所, 浙江 杭州 310027)

摘要: 针对线性离散时滞系统的区域镇定问题, 基于非奇异状态变换技术提出了区间不确定性系统区域可镇定的充分条件, 保证闭环系统的所有极点均位于给定的圆盘区域内. 所给条件可简化为LMI描述形式, 利用LMI工具求解非常方便. 所给实例表明了该方法用于判断线性区间离散时滞系统的区域可镇定性与设计区域镇定控制器的可行性.

关键词: 线性离散系统; 区间矩阵; 时滞; 区域镇定; 线性矩阵不等式(LMI)

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

D-stabilizing controller design for linear interval discrete time-delay systems

MAO Wei-jie, ZHANG Yuan-yuan

(State Key Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Advanced Process Control,
Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: The D-stabilizing problem of linear discrete time-delay systems is addressed. Based on the nonsingular state transformation, a sufficient condition of D-stabilizability is derived for interval systems. This condition guarantees all poles of the resulting closed-loop system to be placed in a specified circular region. The result can be reduced to the form of LMIs; the solution of which can be obtained by using the LMI toolbox. An illustrative example shows that the proposed method can be used to check the D-stabilizability and to design the D-stabilizing controller for linear interval discrete time-delay systems.

Key words: linear discrete system; interval matrix; time-delay; D-stabilizability; linear matrix inequality(LMI)

1 引言(Introduction)

线性系统的极点配置是控制领域的一个基本问题. 考虑到模型的不精确性和各种扰动的存在, 精确的极点配置往往是不可能的, 而且也是不必要的. 研究人员进一步提出, 将闭环系统的极点配置在复平面上的一个适当区域内, 就可以保证系统具有一定的动态和稳态特性^[1,2]. 该问题通常称为区域镇定或D-镇定问题. 对于离散系统, 比较典型的一个区域可以用 $D(\alpha, r)$ 圆盘来刻画, 即以 $\alpha + j0$ 为圆心、以 r 为半径的圆域, 其中 $|\alpha| + r < 1$. 已有学者将区域镇定问题推广到离散时滞系统^[3~8], 但相关结果主要针对区域稳定性分析, 对于区域镇定问题(使得闭环系统区域稳定的控制器综合问题)还很少涉及. 本文研究了具有区间矩阵不确定性的线性离散时滞系统的区域镇定问题, 提出了系统区域可镇

定的充分条件. 所给条件可简化为LMI描述形式, 利用LMI工具求解非常方便.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下的线性区间离散时滞系统:

$$x(k+1) = A_0x(k) + \sum_{i=1}^N A_i x(k-h_i) + Bu(k). \quad (1)$$

其中: $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^p$ 分别为系统(1)的状态和控制输入; $h_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 为正整数; $A_i (i = 0, 1, \dots, N)$, B 为具有合适维数的区间不确定矩阵. 记 $A_i^m = [a_{i,jl}^m]_{n \times n}$, $A_i^M = [a_{i,jl}^M]_{n \times n}$, 满足 $a_{i,jl}^m \leq a_{i,jl}^M (i = 0, 1, \dots, N)$; $B^m = [b_{jl}^m]_{n \times p}$, $B^M = [b_{jl}^M]_{n \times p}$, 满足 $b_{jl}^m \leq b_{jl}^M$, 则

$$[A_i^m, A_i^M] = \{[a_{i,jl}] : a_{i,jl}^m \leq a_{i,jl} \leq a_{i,jl}^M, 1 \leq j, l \leq n\}, \quad (2)$$

$$[B^m, B^M] = \{[b_{jl}] : b_{jl}^m \leq b_{jl} \leq b_{jl}^M, 1 \leq j \leq n, 1 \leq l \leq p\}, \quad (3)$$

其中 A^m, A^M 和 B^m, B^M 是已知的实矩阵. 若令

$$\bar{A}_i = \frac{1}{2}[A_i^M + A_i^m], \Delta A_i = \frac{1}{2}[A_i^M - A_i^m] \quad (4)$$

与

$$\bar{B} = \frac{1}{2}[B^M + B^m], \Delta B = \frac{1}{2}[B^M - B^m], \quad (5)$$

则区间不确定矩阵 $A_i \in [A_i^m, A_i^M] (i = 0, 1, \dots, N)$ 和 $B \in [B^m, B^M]$ 可表示为

$$A_i = \bar{A}_i + \sum_{j,l=1}^n e_j f_{i,jl} e_l^T, |f_{i,jl}| \leq \Delta a_{i,jl}, \quad (6)$$

$$B = \bar{B} + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^p e_j g_{jl} d_l^T, |g_{jl}| \leq \Delta b_{jl}. \quad (7)$$

其中: $\Delta a_{i,jl}, \Delta b_{jl}$ 为矩阵 $\Delta A_i, \Delta B$ 的元素; $e_l \in \mathbb{R}^n, d_l \in \mathbb{R}^p$ 表示第 l 元素为 1, 其余元素为 0 的列矢量.

定义 1 线性区间离散时滞系统(1)是 $D(\alpha, r)$ 稳定的, 如果特征方程

$$F(z) = \det(zI - A_0 - \sum_{i=1}^N A_i z^{-h_i}) = 0 \quad (8)$$

所有解 $z \in D(\alpha, r) = \{z : |z - \alpha| < r, |\alpha| + r < 1\}$; 线性区间离散时滞系统(1)是 $D(\alpha, r)$ 可镇定的, 如果存在状态反馈控制律

$$u(k) = K_0 x(k) + \sum_{i=1}^N K_i x(k - h_i) \quad (9)$$

使得闭环系统是 $D(\alpha, r)$ 稳定的, 其中 $K_i \in \mathbb{R}^{p \times n} (i = 0, 1, \dots, N)$.

注 1 状态反馈控制律(9)依赖于当前和过去状态. 如果仅依赖于当前状态, 可令 $K_i = 0 (i = 1, 2, \dots, N)$, 本文的结论经适当简化仍然有效, 但区域可镇定问题的可行域将缩小, 即控制器存在的可能性将减小.

引理 1 线性区间离散时滞系统(1)是 $D(\alpha, r)$ 稳定的, 当且仅当对所有 $z \notin D(\alpha, r)$ 满足 $F(z) \neq 0$.

3 标称系统的区域镇定(D-stabilizability of nominal systems)

首先考虑线性区间离散时滞系统(1)无不确定情形下的区域镇定问题, 即考虑如下线性离散时滞系统:

$$x(k+1) = \bar{A}_0 x(k) + \sum_{i=1}^N \bar{A}_i x(k - h_i) + \bar{B} u(k). \quad (10)$$

定理 1 线性离散时滞系统(10)是 $D(\alpha, r)$ 可镇定的, 如果存在 $\delta_i > 0 (i = 0, 1, \dots, N)$, 满足

$$\delta_0 + \sum_{i=1}^N \delta_i \tau^{-h_i} < r, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} -\delta_0 X & ((\bar{A}_0 - \alpha I)X + \bar{B}Z_0)^T \\ (\bar{A}_0 - \alpha I)X + \bar{B}Z_0 & -\delta_0 X \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} -\delta_i X & (\bar{A}_i X + \bar{B}Z_i)^T \\ \bar{A}_i X + \bar{B}Z_i & -\delta_i X \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

其中: $\tau = \min_{|v| \geq 1} |rv + \alpha|, X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为对称正定矩阵, $Z_i \in \mathbb{R}^{p \times n} (i = 0, 1, \dots, N)$ 为实矩阵; 而且, 状态反馈矩阵

$$K_i = Z_i X^{-1}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (14)$$

证 线性离散时滞系统(10)采用状态反馈控制律(9), 可得到闭环系统

$$x(k+1) = (\bar{A}_0 + \bar{B}K_0)x(k) + \sum_{i=1}^N (\bar{A}_i + \bar{B}K_i)x(k - h_i). \quad (15)$$

引入状态变换

$$x(k) = X^{\frac{1}{2}} \eta(k),$$

系统(15)变为

$$\eta(k+1) = (\tilde{A}_0 + \tilde{B}\tilde{K}_0)\eta(k) + \sum_{i=1}^N (\tilde{A}_i + \tilde{B}\tilde{K}_i)\eta(k - h_i), \quad (16)$$

其中: $\tilde{A}_i = X^{-\frac{1}{2}} \bar{A}_i X^{\frac{1}{2}}, \tilde{B} = X^{-\frac{1}{2}} \bar{B}, \tilde{K}_i = K_i X^{\frac{1}{2}}, i = 0, 1, \dots, N$. 显然, 系统(16)和系统(15)具有相同的特征值, 系统(16)的特征方程为

$$F(z) = \det(zI - (\tilde{A}_0 + \tilde{B}\tilde{K}_0) - \sum_{i=1}^N (\tilde{A}_i + \tilde{B}\tilde{K}_i)z^{-h_i}) = 0.$$

令 $v = (z - \alpha)/r$ (即 $z = rv + \alpha$), 上述特征方程等价于

$$\det(vI - \frac{\tilde{A}_0 + \tilde{B}\tilde{K}_0 - \alpha I}{r} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^N (\tilde{A}_i + \tilde{B}\tilde{K}_i)(rv + \alpha)^{-h_i}) = 0. \quad (17)$$

因此, 下面只需证明特征方程(17)的解满足 $|v| < 1$. 令 $Z_i = K_i X (i = 0, 1, \dots, N)$, 由式(12)可导出

$$\begin{bmatrix} -\delta_0 I & (\tilde{A}_0 + \tilde{B}\tilde{K}_0 - \alpha I)^T \\ \tilde{A}_0 + \tilde{B}\tilde{K}_0 - \alpha I & -\delta_0 I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & X^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} -\delta_0 X & X(\bar{A}_0 + \bar{B}K_0 - \alpha I)^T \\ (\bar{A}_0 + \bar{B}K_0 - \alpha I)X & -\delta_0 X \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & X^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} < 0,$$

则

$$(\tilde{A}_0 + \tilde{B}\tilde{K}_0 - \alpha I)^T(\tilde{A}_0 + \tilde{B}\tilde{K}_0 - \alpha I) < \delta_0^2 I.$$

同理, 由式(13)可导出

$$(\tilde{A}_i + \tilde{B}\tilde{K}_i)^T(\tilde{A}_i + \tilde{B}\tilde{K}_i) < \delta_i^2 I.$$

上述不等式等价于

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}_0 + \tilde{B}\tilde{K}_0 - \alpha I\|_2 &< \delta_0, \\ \|\tilde{A}_i + \tilde{B}\tilde{K}_i\|_2 &< \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

进一步, 由式(11)可导出, 对任意 $|v| \geq 1$, 有

$$\|\tilde{A}_0 + \tilde{B}\tilde{K}_0 - \alpha I +$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N (\tilde{A}_i + \tilde{B}\tilde{K}_i)(rv + \alpha)^{-h_i}\|_2 \leq \\ &\|\tilde{A}_0 + \tilde{B}\tilde{K}_0 - \alpha I\|_2 + \\ &\sum_{i=1}^N \|\tilde{A}_i + \tilde{B}\tilde{K}_i\|_2 |rv + \alpha|^{-h_i} < \\ &\delta_0 + \sum_{i=1}^N \delta_i \tau^{-h_i} < r. \end{aligned}$$

上式表明, 对任意 $|v| \geq 1$, 特征方程(17)无解, 则根据引理1, 系统(16)是 $D(\alpha, r)$ 稳定的, 也即系统(15)是 $D(\alpha, r)$ 稳定的, 定理得证.

4 区间系统的区域镇定(D-stabilizability of interval systems)

定理 2 线性区间离散时滞系统(1)是 $D(\alpha, r)$ 可镇定的, 如果存在 $\delta_i > 0$ ($i = 0, 1, \dots, N$), 满足

$$\delta_0 + \sum_{i=1}^N \delta_i \tau^{-h_i} < r, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} -\delta_0 X & ((\bar{A}_0 - \alpha I)X + \bar{B}Z_0)^T & U_1 & U_{0,2} \\ (\bar{A}_0 - \alpha I)X + \bar{B}Z_0 & (-\delta_0 X + \sum_{j,l=1}^n \lambda_{0,jl} \Delta a_{0,jl}^2 e_j e_j^T + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^p \theta_{0,jl} \Delta b_{jl}^2 e_j e_j^T) & 0 & 0 \\ U_1^T & 0 & -V_{0,1} & 0 \\ U_{0,2}^T & 0 & 0 & -V_{0,2} \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} -\delta_i X & (\bar{A}_i X + \bar{B}Z_i)^T & U_1 & U_{i,2} \\ (\bar{A}_i X + \bar{B}Z_i) & -\delta_i X + \sum_{j,l=1}^n \lambda_{i,jl} \Delta a_{i,jl}^2 e_j e_j^T + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^p \theta_{i,jl} \Delta b_{jl}^2 e_j e_j^T & 0 & 0 \\ U_1^T & 0 & -V_{i,1} & 0 \\ U_{i,2}^T & 0 & 0 & -V_{i,2} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (20)$$

$$U_1 = [X e_1 \cdots X e_n \cdots X e_1 \cdots X e_n] = \underbrace{[X \cdots X]}_n, \quad (21)$$

$$U_{i,2} = [Z_i^T d_1 \cdots Z_i^T d_p \cdots Z_i^T d_1 \cdots Z_i^T d_p] = \underbrace{[Z_i^T \cdots Z_i^T]}_n, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (22)$$

$$V_{i,1} = \text{diag}\{\lambda_{i,11} \cdots \lambda_{i,1n} \cdots \lambda_{i,n1} \cdots \lambda_{i,nn}\}, \quad (23)$$

$$V_{i,2} = \text{diag}\{\theta_{i,11} \cdots \theta_{i,1p} \cdots \theta_{i,n1} \cdots \theta_{i,np}\}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (24)$$

其中: $\tau = \min_{|v| \geq 1} |rv + \alpha|$; $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为对称正定矩阵; $Z_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ($i = 0, 1, \dots, N$) 为实矩阵; $\lambda_{i,jl}$ ($j, l = 1, 2, \dots, n; i = 0, 1, \dots, N$), $\theta_{i,jl}$ ($j = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, p; i = 0, 1, \dots, N$) 为正实数. 而且, 状

态反馈矩阵

$$K_i = Z_i X^{-1}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (25)$$

证 对任意正实数 $\lambda_{0,jl}$ ($j, l = 1, 2, \dots, n$), $\theta_{0,jl}$ ($j = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, p$), 有

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -\delta_0 X & X(A_0 - \alpha I + BK_0)^T \\ (A_0 - \alpha I + BK_0)X & -\delta_0 X \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} -\delta_0 X & X(\bar{A}_0 - \alpha I + \bar{B}K_0)^T \\ (\bar{A}_0 - \alpha I + \bar{B}K_0)X & -\delta_0 X \end{bmatrix} + \\ &\sum_{j,l=1}^n \left(\begin{bmatrix} 0 \\ e_j \end{bmatrix} f_{0,jl} [e_l^T X \quad 0] + \begin{bmatrix} X e_l \\ 0 \end{bmatrix} f_{0,jl} \begin{bmatrix} 0 & e_j^T \end{bmatrix} \right) + \\ &\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^p \left(\begin{bmatrix} 0 \\ e_j \end{bmatrix} g_{jl} [d_l^T K_0 X \quad 0] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} X K_0^T d_l \\ 0 \end{bmatrix} g_{jl} [0 \quad e_j^T] \leq \\ & \begin{bmatrix} -\delta_0 X & X(\bar{A}_0 - \alpha I + \bar{B} K_0)^T \\ (\bar{A}_0 - \alpha I + \bar{B} K_0) X & -\delta_0 X \end{bmatrix} + \\ & \sum_{j,l=1}^n (\lambda_{0,jl} \Delta a_{0,jl}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ e_j \end{bmatrix} [0 \quad e_j^T] + \\ & \frac{1}{\lambda_{0,jl}} \begin{bmatrix} X e_l \\ 0 \end{bmatrix} [e_l^T X \quad 0]) + \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^p (\theta_{0,jl} \Delta b_{jl}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ e_j \end{bmatrix} [0 \quad e_j^T] + \\ & \frac{1}{\theta_{0,jl}} \begin{bmatrix} X K_0^T d_l \\ 0 \end{bmatrix} [d_l^T K_0 X \quad 0]) < 0. \end{aligned}$$

令 $Z_0 = K_0 X$, 上述不等式的右边不等号 (< 0) 可由式(19)的Schur补导出. 同理, 由式(20)的Schur补可导出

$$\begin{bmatrix} -\delta_i X & X(A_i + BK_i)^T \\ (A_i + BK_i) X & -\delta_i X \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

因此, 根据定理1, 对任意 $A_i \in [A_i^m, A_i^M]$ ($i = 0, 1, \dots, N$) 和 $B \in [B^m, B^M]$ 构成的线性离散时滞系统(1)都是 $D(\alpha, r)$ 可镇定的.

注 2 在定理1和定理2中, 如果给定参数 δ_i ($i = 0, 1, \dots, N$), 则相应的矩阵不等式均成为LMI描述形式, 可利用LMI工具对其它所有变量进行求解. 根据定理2, 可判断线性区间离散时滞系统的区域可镇定性, 并进一步设计区域镇定控制器.

5 数值实例(Numerical example)

考虑线性区间离散时滞系统

$$x(k+1) = A_0 x(k) + A_1 x(k-1) + A_2 x(k-2) + Bu(k), \quad (26)$$

其中不确定区间矩阵 A_i ($i = 0, 1, 2$) 和 B 由如下的上下界矩阵确定:

$$\begin{aligned} A_0^m &= \begin{bmatrix} 0.05 & 1 \\ 0.05 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad A_0^M = \begin{bmatrix} 0.15 & 1 \\ 0.05 & 0.9 \end{bmatrix}, \\ A_1^m &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.08 \end{bmatrix}, \quad A_1^M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.12 \end{bmatrix}, \quad A_2^m = \begin{bmatrix} 0.08 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_2^M &= \begin{bmatrix} 0.12 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^m = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.57 \end{bmatrix}, \quad B^M = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.63 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

判断线性区间离散时滞系统(26)是否 $D(0.2, 0.7)$ 可镇定.

开环系统显然是不稳定的. 根据定理2, $\tau = 0.5$,

令 $\delta_0 = 0.24, \delta_1 = 0.1, \delta_2 = 0.054$, 满足 $\delta_0 + \delta_1 \tau^{-1} + \delta_2 \tau^{-2} < 0.7$. 利用LMI工具, 不等式(19)和(20)有可解, 存在如下状态反馈控制律:

$$\begin{aligned} u(k) &= [0.0432 \quad -1.0000] x(k) + \\ & [0 \quad -0.0456] x(k-1) + \\ & [-0.0861 \quad 0] x(k-2), \end{aligned}$$

使得线性区间离散时滞系统(26)是 $D(0.2, 0.7)$ 可镇定的.

6 结论(Conclusions)

本文针对具有多重状态时滞和区间不确定性参数的线性离散系统提出了其区域镇定条件, 该条件不仅可用于判断线性区间离散时滞系统的区域可镇定性, 还可进一步设计区域镇定控制器, 保证闭环系统的所有极点均位于给定的圆盘区域内. 通过预设某些参数, 相关结果可简化为LMI描述形式, 利用LMI工具求解非常方便.

参考文献(References):

- [1] FURUTA K, KIM S B. Pole assignment in a specified disk[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, 32(5): 423 - 427.
- [2] 刘满, 井元伟, 张嗣瀛. 区域极点配置问题的研究方法[J]. *控制与决策*, 2005, 20(3): 241 - 245.
(LIU Man, JING Yuanwei, ZHANG Siying. Research approaches on pole assignment in specified region[J]. *Control and Decision*, 2005, 20(3): 241 - 245.)
- [3] LEE C H, LI T H S, KUNG F C. D-stability analysis for discrete systems with a time delay[J]. *Systems & Control Letters*, 1992, 19(3): 213 - 219.
- [4] HSIAO F H, HWANG J D, PAN S P. D-stability analysis for discrete uncertain time-delay systems [J]. *Applied Mathematics Letters*, 1998, 11(2): 109 - 114.
- [5] SU T J, SHYR W J. Robust D-stability for linear uncertain discrete time-delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(2): 425 - 428.
- [6] SU T J, CHEN Y C, SHYR W J, et al. Correction to "Robust D-stability for linear uncertain discrete time-delay systems" [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(4): 709.
- [7] CHANG Y H, WISE G L. Robust D-stability for discrete time systems with time delays[C] // *Proceeding of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA, USA: IEEE, 1995: 395 - 400.
- [8] HUANG C G, SU T J. Pole-placement design for perturbed discrete systems with time-delay[C] // *Proceeding of IEEE Conference System, Man and Cybernetics*. Le Touquet, France: IEEE, 1993, 3: 582 - 587.

作者简介:

毛维杰 (1969—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为鲁棒控制、时滞系统控制、解耦控制等理论与应用, E-mail: wjmiao@iipc.zju.edu.cn;

张媛媛 (1985—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为鲁棒控制、时滞系统控制等理论与应用, E-mail: yzhang@iipc.zju.edu.cn.