

# 一个三维非线性系统的混沌运动及其控制

袁地, 侯越

(安阳师范学院 物理学系, 河南 安阳 455000)

**摘要:** 通过数值计算、理论推导分析了一个三维类Lorenz混沌系统的基本动力学特性, 并通过数值仿真、相图、Poincare截面图和功率谱研究了该系统的混沌行为。然后, 构建一个受控系统并利用Lyapunov指数谱、分叉图分析了该系统混沌吸引子的形成机制, 通过对控制参数的改变, 系统的混沌运动可以得到有效控制。

**关键词:** 类Lorenz系统; 混沌; 控制参数; 形成机制

**中图分类号:** TP273; O415      **文献标识码:** A

## Chaotic movement and its control of a three-dimensional nonlinear system

YUAN Di, HOU Yue

(Department of Physics, Anyang Normal University, Anyang Henan 455000, China)

**Abstract:** Some basic dynamical properties of a three-dimensional Lorenz-like chaotic system are analyzed by means of numerical value calculation and theoretical deducing. The chaotic behaviors of the chaotic system is studied via numerical simulation, phase diagram, Poincare mapping and power spectrum. A controller of the Lorenz-like system is then constructed to study the forming mechanism of the chaotic attractor by Lyapunov exponent and bifurcation diagram. The chaotic movement of the Lorenz-like system can be well controlled by adjusting the control parameters.

**Key words:** Lorenz-like system; chaos; controls parameter; forming mechanism

### 1 引言(Introduction)

自1963年Lorenz<sup>[1]</sup>在一个三维自治系统中首次发现混沌吸引子以来, 混沌理论得到了迅速发展, 人们不断发现新的混沌系统<sup>[2~8]</sup>, 研究其分叉、混沌现象、混沌吸引子结构和混沌产生的条件等。

1999年, 在Lorenz系统的基础上, Chen和Ueta<sup>[2]</sup>利用混沌反控制的方法发现了一个新的三维混沌系统—Chen系统。不久, Lü和Chen<sup>[3]</sup>在2002年又通过混沌反控制的想法发现了Lü系统, 这个三维混沌系统在Lorenz系统和Chen系统之间架起了一座桥梁。

1996年, Vanecek和Celikovsky<sup>[9]</sup>提出三维自治方程组的动力学行为是由其线性部分 $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ 来决定的: 当 $a_{12}a_{21} > 0$ 时, 其动力学行为类似于Lorenz系统(称广义Lorenz系统族); 当 $a_{12}a_{21} < 0$ 时, 其动力学行为类似于Chen系统; 而Lü系统的动力学行为则满足 $a_{12}a_{21} = 0$ 。

在上述研究的基础上, 本文对一个三维类Lorenz混沌系统, 利用非线性动力学的方法, 通过数

值计算、理论推导分析了该系统的基本动力学特性, 并通过数值仿真、相图、Poincare截面图和功率谱研究了该系统的混沌运动。然后, 构建一个受控系统并利用Lyapunov指数谱<sup>[10~16]</sup>、分叉图<sup>[17~19]</sup>分析了该系统混沌吸引子的形成机制, 结果表明, 通过对控制参数 $e$ 的改变, 该系统的混沌运动可以得到有效控制, 系统的混沌吸引子可由两个卷形状演化为一个卷形状, 并最终通过倍周期分叉的过程演化为周期运动的形状。

### 2 三维非线性系统模型及基本动力学特性(Model and basic dynamical properties of the three-dimensional nonlinear system)

著名的Lorenz<sup>[1]</sup>系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = cx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (1)$$

当参数 $a = 10, b = 8/3, c = 28$ , 该系统呈现混沌状

态.

三维类Lorenz混沌系统的动力学方程为:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = c(x + y) - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (2)$$

为方便起见, 可以将方程(2)写成向量的形式

$$\frac{dX}{dt} = f(X), \quad (3)$$

式中  $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $f(X)$  是式(2)右端矢量场的向量形式,  $a, b, c$  为实常数. 当  $a = 25, b = 1.8, c = 18$  时系统(2)存在一个混沌吸引子, 如图1所示.

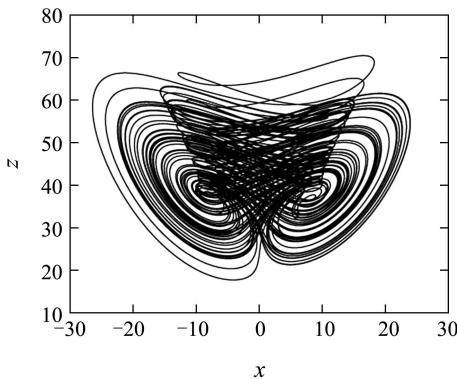


图1 当参数  $a = 25, b = 1.8, c = 18$  时系统(2)的典型混沌吸引子,  $x$ - $z$  平面相图

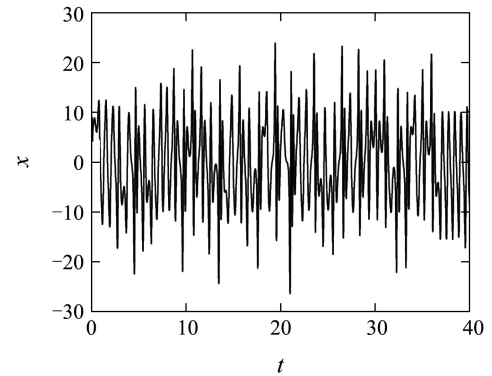
Fig. 1 Typical chaotic attractor of the system(2) with  $a = 25, b = 1.8, c = 18, x$ - $z$  plane phase portrait

### 3 系统的混沌运动及其控制(Chaotic movement and its control of the Lorenz-like chaotic system)

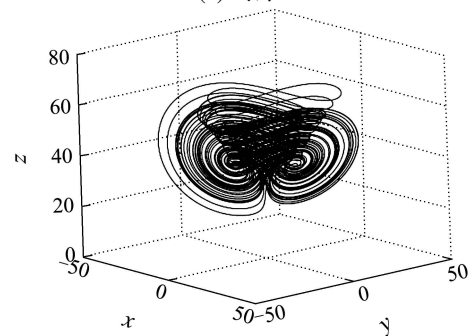
#### 3.1 典型的混沌运动状态(Typical chaotic movement state)

本文采用4阶Runge-Kutta方法数值模拟求解, 使用该方法时, 需要先给出初值和步长, 系统的初值选取为(2.2, 2.4, 28), 步长选取为0.0001, 通过数值模拟, 系统显示出具有丰富的混沌动力学行为, 在图1中已给出了系统(2)的混沌吸引子.

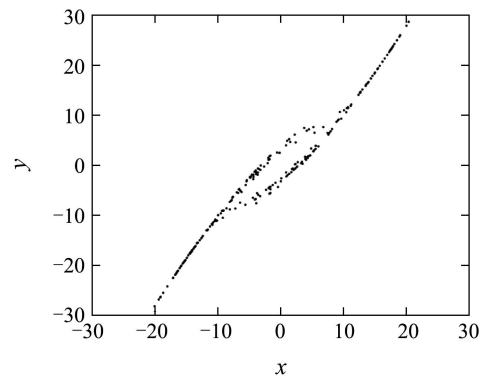
图2又分别给出了当参数  $a = 25, b = 1.8, c = 18$  时系统(2)的时序图、相图、Poincare截面图和功率谱图. Poincare截面有利于观察系统的动力学行为, 通过观察Poincare截面上截点的情况, 可以判断在这组参数下系统的运动是稳定的、周期的还是混沌的, 谱分析是研究振动和混沌的一个重要手段, 通过谱分析可以直观的看出系统是如何从倍周期走向混沌的.



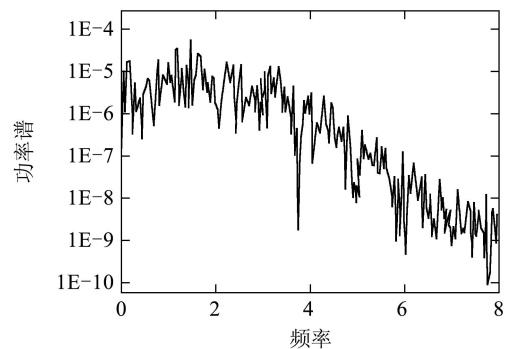
(a) 时序



(b) 相图



(c) Poincare截面图



(d) 功率谱图

图2 当参数  $a = 25, b = 1.8, c = 18$  时系统(2)的时序图、相图、Poincare截面图和功率谱图

Fig. 2 Time-series diagram, phase portrait, Poincare mapping and power spectrum of the system(2) with parameters  $a = 25, b = 1.8, c = 18$

从图2(a)中可以看出, 其变量 $x$ 随时间变化的波形已没有了规律性, 由图2(b)知道, 其轨线已形成了奇怪吸引子, 图2(c)上的点不再是少数离散的, 而是由一些密集点连成的弧线, 在图2(d)上表现的是连续谱, 而不是分离谱. 由这些方法所刻画的特性可知, 系统(2)此时是处于混沌状态的.

### 3.2 受控系统 与 混沌吸引子的形成机制(controller of the Lorenz-like system and forming mechanism of the chaotic attractor)

为了揭示系统(2)所描述的混沌吸引子结构的形成机制, 本文给出了系统(2)的一种受控系统, 这一受控系统具有如下的微分方程组形式

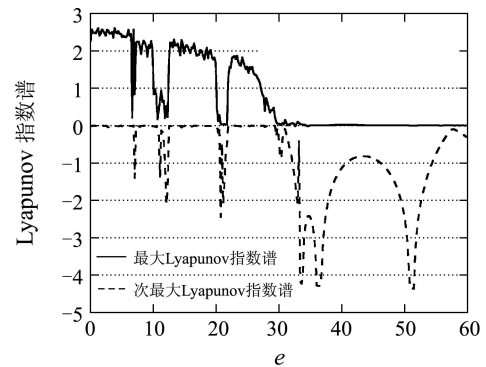
$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + e, \\ \dot{y} = c(x + y) - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (4)$$

在这一受控系统中,  $e$ 为控制参数, 它的取值可以在一定范围内进行改变, 随着控制参数 $e$ 的变化, 系统(2)得混沌行为可以得到有效的控制. 数值计算中, 初始条件和其它参数的取值与前面保持一致, 首先考虑控制参数 $e$ 由0逐渐增大的过程.

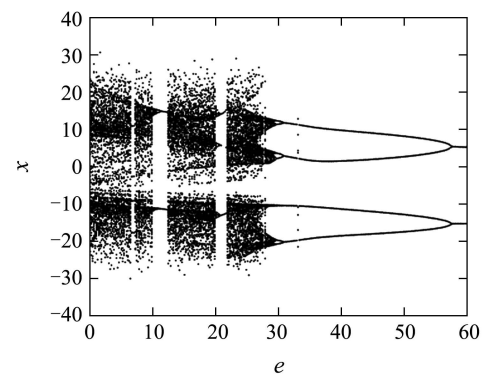
#### 3.2.1 固定参数 $a = 25, b = 1.8, c = 18$ , 改变控制参数 $e, e \in [0, 60]$ (Fixing the parameters $a = 25, b = 1.8, c = 18$ and varying controls parameter $e, e \in [0, 60]$ )

当控制参数 $e$ 在 $[0, 60]$ 变化时, 系统(2)的Lyapunov 指数谱、分叉图如图 3 所示, 我们知道, 从Lyapunov指数谱、分叉图可以比较直观地反映非线性动力学系统随参数变化的动态特性, 当有一个Lyapunov指数大于0的时候, 系统处于混沌状态. 由图3(a)可见, 随着参数 $e$ 的变化, 系统的最大Lyapunov指数谱(实线为最大Lyapunov指数谱, 点线为次最大Lyapunov指数谱)是从大于0变化到等于0, 也就是说系统先是出现混沌解, 然后变化为周期解, 从分叉图(图3(b))可以清楚地看出, 系统是从混沌通过倍周期分叉走向周期运动的.

在控制参数 $e$ 由0逐渐增大的过程中, 当 $e = 26$ 时, 系统(2)对应的相图如图4所示, 左右两边的卷形具有明显的不对称性; 当 $e = 28$ 时, 系统(2)对应的相图如图5所示, 此时, 吸引子经过演化变为仅有单边的卷形, 继续增大控制参数 $e$ 至 $e = 30$ , 系统(2)混沌吸引子将演化出倍周期分叉的过程, 图6显示了系统(2)的2周期运动.



(a) Lyapunov指数谱



(b) 分叉图

图 3 当参数  $a = 25, b = 1.8, c = 18$ , 改变控制参数  $e$  时, 系统(2)的Lyapunov指数谱和分叉图

Fig. 3 Lyapunov exponent spectrum and bifurcation diagram of the system(2) with parameters  $a = 25, b = 1.8, c = 18$  and varying controls parameter  $e$

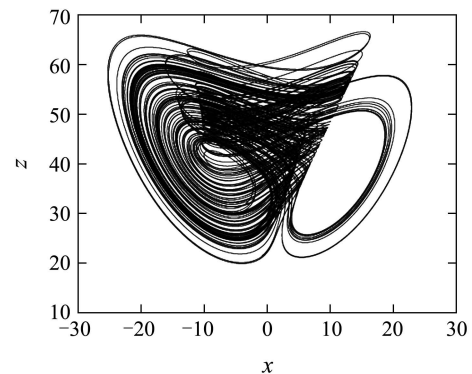


图 4 当参数  $a = 25, b = 1.8, c = 18, e = 26$  时, 系统(2)的  $x-z$  平面相图

Fig. 4  $x-z$  plane phase portrait of the system(2) with parameters  $a = 25, b = 1.8, c = 18, e = 26$

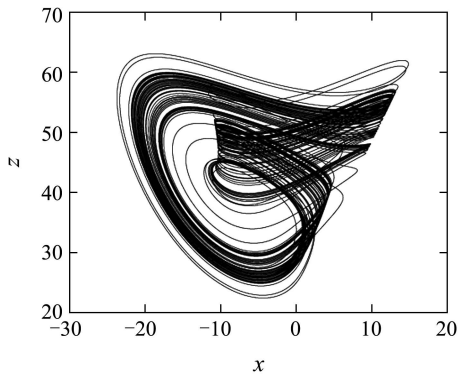


图5 当参数 $a = 25, b = 1.8, c = 18, e = 28$ 时,系统(2)的 $x$ - $z$ 平面相图

Fig. 5  $x$ - $z$  plane phase portrait of the system(2) with parameters  $a = 25, b = 1.8, c = 18, e = 28$

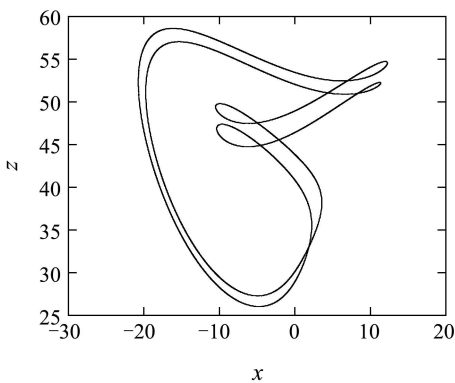


图6 当参数 $a = 25, b = 1.8, c = 18, e = 30$ 时,系统(2)的2周期 $x$ - $z$ 平面相图

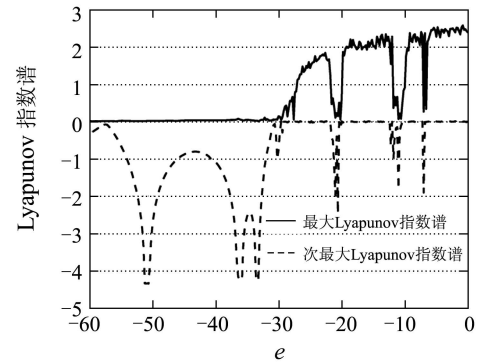
Fig. 6  $x$ - $z$  plane phase portrait of period 2 of the system(2) with parameters  $a = 25, b = 1.8, c = 18, e = 30$

### 3.2.2 固定参数 $a = 25, b = 1.8, c = 18$ , 改变控制参数 $e, e \in [-60, 0]$ (Fixing the parameters $a = 25, b = 1.8, c = 18$ and varying controls parameter $e, e \in [-60, 0]$ )

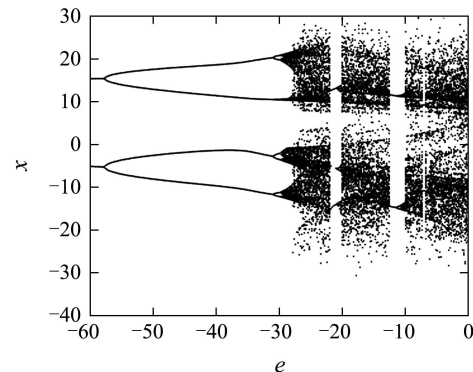
类似的, 研究控制参数 $e$ 为负值的情况, 数值模拟表明, 在控制参数 $e$ 由0逐渐减小的过程中, 系统(2)的演化规律与 $e$ 由0逐渐增大的过程是相似的. 当 $e$ 在 $[-60, 0]$ 的变化过程中, 系统(2)的Lyapunov指数谱、分叉图如图7所示, 由图7(a)可见, 随着控制参数 $e$ 的变化, 系统的最大Lyapunov指数(实线为最大Lyapunov指数谱, 点线为次最大Lyapunov指数谱)是从等于0变化到大于0, 这就是说系统先是出现周期解, 然后变化为混沌解, 从分叉图(图7(b))可以清楚地看出, 系统是从周期运动通过倍周期分叉走向混沌的.

由上述分析可知, 当控制参数 $|e|$ 足够大时, 系统(2)的混沌吸引子将消失, 呈现周期运动; 当控制参

数 $|e|$ 足够小时, 系统(2)将出现混沌运动的行为; 在控制参数 $|e|$ 由小变大的过程中, 系统(2)的混沌吸引子将由两个卷形状演化为一个卷形状, 并最终通过倍周期分叉的过程演化为周期运动的形状.



(a) Lyapunov指数谱



(b) 分叉图

图7 当参数 $a = 25, b = 1.8, c = 18$ , 改变控制参数 $e$ 时, 系统(2)的Lyapunov指数谱和分叉图

Fig. 7 Lyapunov exponent spectrum and bifurcation diagram of the system(2) with parameters  $a = 25, b = 1.8, c = 18$  and varying controls parameter  $e$

## 4 结论(Conclusion)

本文对一个三维自治类Lorenz混沌系统, 利用非线性动力学的方法, 通过数值计算得到系统的定态解, 并分析了定态解的稳定性, 又分别从对称性、耗散性方面对系统的动力学特性加以分析. 然后通过数值模拟、时序图、相图、Poincare截面图和功率谱分析了系统的混沌行为. 最后, 构建一个受控系统并分析了该系统混沌吸引子的形成机制, 通过对控制参数 $e$ 的改变, 从Lyapunov指数谱、分叉图发现系统具有丰富的动力学行为, 可以处于周期运动以及混沌状态, 并且在控制参数 $|e|$ 由小变大的过程中, 系统的混沌运动可以得到有效控制, 系统(2)的混沌吸引子将由两个卷形状演化为一个卷形状, 并最终通过倍周期分叉的过程演化为周期运动的形状.

## 参考文献(References):

- [1] LORENZ E N. Deterministic nonperiodic flow[J]. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, 20(1): 130 – 141.
- [2] CHEN G R, UETA T. Yet another chaotic attractor[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9(7): 1465 – 1466.
- [3] LÜ J H, CHEN G R. A new chaotic attractor coined[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(3): 659 – 661.
- [4] LIU C X, LIU L, LIU T, et al. A new butterfly-shaped attractor of Lorenz-like system[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 28(5): 1196 – 1203.
- [5] 宋运忠, 赵光宙, 齐冬莲. 混沌吕系统的约束控制[J]. *控制理论与应用*, 2007, 24(5): 795 – 798.  
(SONG Yunzhong, ZHAO Guangzhou, QI Donglian. Constrained control of chaotic Lü system[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(5): 795 – 798.)
- [6] 王杰智, 陈增强, 袁著祉. 一个新的混沌系统及其性质研究[J]. *物理学报*, 2006, 55(8): 3956 – 3963.  
(WANG Jiezhi, CHEN Zengqiang, YUAN Zhuzhi. A new chaotic system and analysis of its properties[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(8): 3956 – 3963.)
- [7] 王光义, 丘水生, 许志益. 一个新的三维二次混沌系统及其电路实现[J]. *物理学报*, 2006, 55(7): 3295 – 3301.  
(WANG Guangyi, QIU Shuisheng, XU Zhiyi. A new three-dimensional quadratic chaotic system and its circuitry implementation[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(7): 3295 – 3301.)
- [8] 王琳, 倪樵, 刘攀, 等. 一种新的类Lorenz系统的混沌行为与形成机制[J]. *动力学与控制学报*, 2005, 3(4): 1 – 6.  
(WANG Lin, NI Qiao, LIU Pan, et al. Chaos and its forming mechanism of a new Lorenz-like system[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 1 – 6.)
- [9] VANECEK A, CELIKOVSKY S. *Control Systems: from Linear Analysis to Synthesis of Chaos*[M]. London: Prentice-Hall, 1996: 32 – 41.
- [10] OSELEDEC V I. A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems[J]. *Transactions Moscow Mathematical Society*, 1968, 19(1): 197 – 231.
- [11] ECKMANN J P, RUELLE D. Ergodic theory of chaos and strange attractors[J]. *Reviews of Modern Physics*, 1985, 57(3): 617 – 656.
- [12] WOLF A, SWIFT J, SWINNEY H, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series[J]. *Physica D*, 1985, 16(3): 285 – 317.
- [13] OIWA N N, FIEDLER-FERRARA N. A fast algorithm for estimation Lyapunov exponents from time series[J]. *Physics Letters A*, 1998, 246(1): 117 – 121.
- [14] BLAZEJCZYK-OKOLEWSKA B, KAPITANIAK T. Co-existing attractors of impact oscillator[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1998, 9(8): 1439 – 1443.
- [15] UDWADIA F E, VON BREMEN H F. An efficient stable approach for computation Lyapunov characteristic exponents of continuous dynamics systems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2001, 121(2): 219 – 259.
- [16] SILVIO L T DE SOUZA, IBERE L. Caldas Calculation of Lyapunov exponents in systems with impact[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 19(3): 569 – 579.
- [17] VENKATESAN A, LAKSHMANAN M. Different routes to chaos via strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced system[J]. *Physical Review E*, 1998, 58(3): 3008 – 3016.
- [18] WEN G L, XU D L. Control algorithm for creation of Hopf bifurcations in continuous time systems of arbitrary dimension[J]. *Physics Letters A*, 2005, 337(1): 93 – 100.
- [19] JING Z, HUANG J. Bifurcation and chaos in a discrete genetic toggle switch system[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 23(3): 887 – 908.

## 作者简介:

袁地 (1981—), 男, 目前主要研究方向是非线性系统的理论分析与模拟控制研究, E-mail: yuandi@aynu.edu.cn;

侯越 (1968—), 女, 讲师, 研究方向: 非线性系统的理论分析、混沌动力学与非线性光学研究, E-mail: hy9639@sina.com.