

# Julia集的广义同步

张永平<sup>1,2</sup>, 范玉军<sup>3</sup>

(1. 山东大学控制科学与工程学院, 山东 济南 250061;

2. 山东大学威海分校数学与统计学院, 山东 威海 264209; 3. 德州职业技术学院, 山东 德州 253034)

**摘要:** 研究了两个不同的Julia集耦合实现广义同步的问题. 不同于以往对Julia集的研究仅限于对一个独立的Julia集的性质, 制图等方面的讨论, 本文提出了两个不同的Julia集广义同步的思想, 并以经典的复二次多项式系统 $z_{n+1} = z_n^2 + c$ 为例, 分别采用线性和非线性耦合的方法对该系统不同参数的Julia集进行了广义同步. 仿真结果表明了方法的有效性.

**关键词:** Julia集; 广义同步; 分形

**中图分类号:** TB114.2, O231 **文献标识码:** A

## Generalized synchronization of Julia sets

ZHANG Yong-ping<sup>1,2</sup>, FAN Yu-jun<sup>3</sup>

(1. School of Control Sciences and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Shandong University at Weihai, Weihai Shandong 264209, China;

3. Dezhou Vocational and Technical College, Dezhou Shandong 253034, China )

**Abstract:** The generalized synchronization of two different Julia sets with coupling is investigated. Being different from the past studies on Julia set which were limited to the properties and the graph of a single Julia set, our work of generalized synchronization is concerned with two different Julia sets. The classical complex quadratic polynomial system  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  is taken as an example, to which we respectively apply the linear and nonlinear generalized synchronization methods and achieve the generalized synchronization of Julia sets with two different parameters. Simulation results show the efficacy of these methods.

**Key words:** Julia set; generalized synchronization; fractal

### 1 引言(Introduction)

自从分形诞生以来, 它作为一个有力的工具对自然界及众多研究领域中的现象和问题进行了有效的建模和描述: 从植物生长到海岸侵蚀, 从混沌系统到图像处理<sup>[1~3]</sup>. 利用分形的自相似性, 文[4]成功地建立了分形区域 $\mathbf{B}$ 上函数 $\phi$ 的Hausdorff积分:

$$\int_{\mathbf{B}} \phi d\mathcal{H}(\mathbf{B}) = \lim_{J \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m^J} \phi_i \lambda^{sJ} \mathcal{H}_0.$$

还得到了关于经典粒子力学的力学理论. 而Julia集是分形理论中的一个重要的具有自相似性的集合, 它在许多工程技术中有着广泛的应用. 例如, 文[5]基于粒子的动力学特征探讨了广义M-J集的物理意义, 发现广义M-J集的分形结构特征可形象地反映出粒子速度的变化规律, 并指出对于广义的系统 $z_{n+1} = z_n^r + c$ 的广义Julia集给出了速度空间中粒子的所有可能的不稳定周期轨道的闭包, 其中 $c$ 为复数,  $r > 2$ ; 作为复温度或域状态边界出现的分拆

函数零点的图像也非常好地与Biskup等的工作联系起来<sup>[6]</sup>, 他们研究了一类一般的一阶变化模型的Lee-Yang的奇异性.

另外, 混沌同步一直是倍受关注的课题, 人们在这方面作了大量的工作, 采用各种方法实现混沌同步<sup>[7~11]</sup>, 而广义同步控制是混沌控制的一个重要方法, 这方面的工作越来越受到人们的关注<sup>[12,13]</sup>.

而与混沌密切相关的分形的广义同步至今未曾见有讨论. 同时, 由于在技术中往往需要实现一定的技术目标, 因此对分形进行控制是一个十分重要的课题. 本文中, 分别采用线性与非线性的方法对分形理论中有着广泛应用的Julia集进行广义同步. 仿真结果表明了方法的有效性.

### 2 Julia集的广义同步(Generalized synchronization of Julia sets)

一般地, 广义同步是指两个耦合的系统 $\frac{dX}{dt} =$

$F(X; Y), \frac{dY}{dt} = G(X; Y), F, G$  可以是不同的函数,  $X \in \mathbb{R}^m, Y \in \mathbb{R}^m$ , 如果耦合的结果是经过一定的时间后,  $X, Y$  之间存在一个函数关系  $Y = \psi(X)$ , 则认为此时耦合的两系统实现了广义同步.

对分形集 Julia 集而言, 两个系统的 Julia 集实现同步是指两个系统经过耦合后, 它们的 Julia 集相同; 若耦合后的两个系统的 Julia 集通过某种函数关系变换后相同, 则称两个系统的 Julia 集实现广义同步.

以经典复二次多项式系统

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \tag{1}$$

为例来讨论其 Julia 集的广义同步实现, 其中  $c$  为复数.

如果系统(1)中的  $c$  在心形线  $S = \{z : z = \frac{1}{2}e^{i\theta}(1 - \frac{1}{2}e^{i\theta}), (0 \leq \theta \leq 2\pi)\}$  内, 则系统(1)有一个吸引不动点, 即在一个根  $h_c(z) = z$  上,  $|h'_c(z)| < 1$ , 其中  $h_c(z) = z^2 + c$ . 事实上, 由(1)可得系统的不动点  $z^* = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$ , 因此

$$|h'_c(z^*)| = |2z^*| = |1 \pm \sqrt{1-4c}| < 1.$$

上式等价于

$$1 \pm \sqrt{1-4c} = \{z : z = ue^{i\theta}, 0 \leq u < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

从而可解得

$$c = \{z : z = \frac{1}{2}ue^{i\theta}(1 - \frac{1}{2}ue^{i\theta}), 0 \leq u < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

即可得到心形线  $S$ .

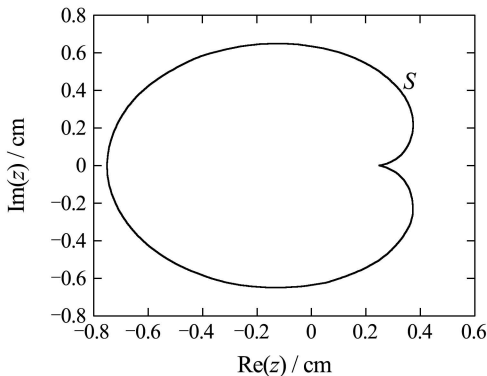


图1 心形线  $S$

Fig. 1 The cardioid  $S$

以两参数不同的复迭代映射(1)作为研究对象:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c_1, \tag{2}$$

$$w_{n+1} = w_n^2 + c_2, \tag{3}$$

其中  $c_1, c_2$  取不同的复数值.

对系统(2)进行耦合, 考虑

$$z_{n+1} = z_n^2 + c_1 + D[g(z_n, w_n)]^2, \tag{4}$$

$$w_{n+1} = w_n^2 + c_2, \tag{5}$$

其中  $D$  为耦合强度, 显然系统(4)受到系统(5)驱动. 引入记号

$$e_n = f(z_n, w_n), \tag{6}$$

希望利用(4), (5)这个耦合关系找到两个函数  $f(z_n, w_n)$  和  $g(z_n, w_n)$  使得(6)满足复迭代系统

$$e_{n+1} = e_n^2 + \mu. \tag{7}$$

通常  $\mu$  与  $c_1, c_2$  和  $D$  之间存在一个函数关系, 即  $\mu = \mu(c_1, c_2, D)$ . 如果在式(4)中能够找到一个适当的  $D$  值使  $\mu \in S$ , 则  $e_n$  将趋于一个吸引不动点  $e^*$ ,  $e^* = \frac{1 - \sqrt{1-4\mu}}{2}$ , 因此  $f(z_n, w_n) = \text{常数}$ ,  $z_n, w_n$  满足确定的函数关系, 实现了 Julia 集的广义同步.

### 3 Julia 集的线性与非线性广义同步实现 (Realization of linear and nonlinear generalized synchronization of Julia sets)

首先给出 Julia 集的线性广义同步分析. 令  $g(z_n, w_n) = z_n - w_n$ , 则耦合系统(4), (5)可写为

$$z_{n+1} = z_n^2 + c_1 + D(z_n - w_n)^2, \tag{8}$$

$$w_{n+1} = w_n^2 + c_2. \tag{9}$$

另一方面选取  $f(z_n, w_n) = \alpha z_n + \beta w_n$ , 并取

$$e_n = \alpha z_n + \beta w_n, \tag{10}$$

代式(8)~(10)进入式(7)得

$$\begin{cases} \alpha + \alpha D = \alpha^2, & \alpha D + \beta = \beta^2, \\ -2\alpha D = 2\alpha\beta, & \alpha c_1 + \beta c_2 = \mu. \end{cases}$$

解方程组可得

$$\begin{cases} \alpha = 1 + D, & \beta = -D, \\ \mu = c_1 + D(c_1 - c_2). \end{cases}$$

这样  $e_n$  满足迭代关系  $e_{n+1} = e_n^2 + \mu$ . 由前部分叙述, 要保证其有吸引不动点, 则需  $\mu \in S$ . 记  $c_1 - c_2 = |c_1 - c_2|(\cos \phi + i \sin \phi)$ , 将  $S$  移动  $c_1$  个单位后, 在大小上再变为  $S$  的  $\frac{1}{|c_1 - c_2|}$  倍, 然后顺时针旋转  $\phi$  角度,

得到另一心形线  $S_1$ , 则耦合强度  $D$  的稳定区域就是  $S_1$  所围成的区域. 如取  $c_1 = -1, c_2 = -0.5 + 0.5i$ , 可得如图2所示的心形线  $S_1$ .

下面讨论 Julia 集线性广义同步的实现. 将  $\alpha =$

$1 + D, \beta = -D$ , 代入(10), 可解得

$$w_n = ((1 + D)z_n - e_n) / D,$$

与  $g(z_n, w_n) = z_n - w_n$  联立代入系统(4), 化简可得

$$z_{n+1} = \frac{D + 1}{D} \left( z_n - \frac{e_n}{D + 1} \right)^2 + c_1 + \frac{e_n^2}{D + 1}.$$

由  $e_{n+1} = e_n^2 + \mu, \mu = c_1 + D(c_1 - c_2)$  代入上式, 可得

$$z_{n+1} - \frac{e_{n+1}}{D + 1} =$$

$$\frac{D + 1}{D} \left( z_n - \frac{e_n}{D + 1} \right)^2 + \frac{c_2}{(D + 1)/D}. \quad (11)$$

令  $b_n = z_n - e_n / (D + 1)$ , 则式(11)化为

$$b_{n+1} = \frac{D + 1}{D} b_n^2 + \frac{c_2}{(D + 1)/D}. \quad (12)$$

根据前提假设  $e_n$  有吸引不动点  $e^*$ , 所以变换  $b_n = z_n - e_n / (D + 1)$  使得系统(11)的Julia集只是位置上的移动, 而系数  $(D + 1)/D$  是使系统(12)的Julia集发生伸缩变化<sup>[14]</sup>. 此时耦合系统的参数为  $c_2$ , 决定了耦合系统的Julia集广义同步的实现. 因所取  $D$  为复数值, 所以所得的广义同步Julia集可能会出现旋转等刚性变化情况, 但这不会影响对Julia集广义同步的本质.

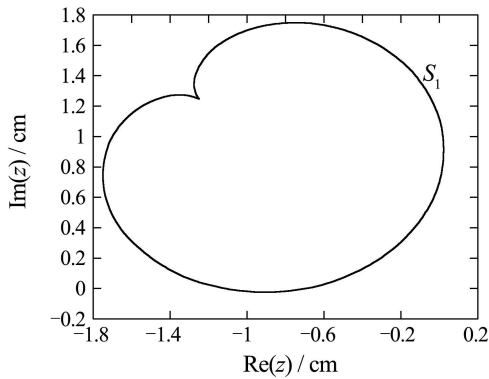
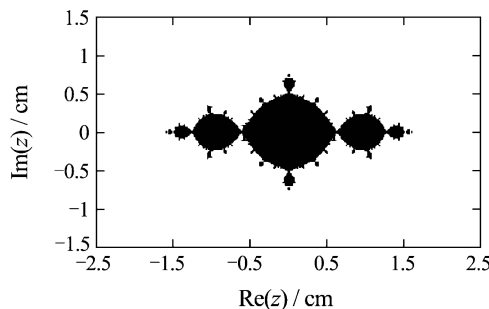
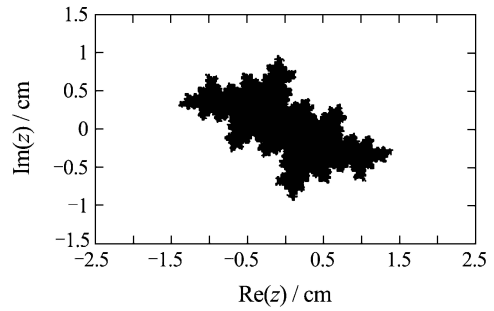


图 2 心形线  $S_1$   
Fig. 2 The cardioid  $S_1$

以一个例子来说明线性广义同步方法的有效性. 在系统(2), (3)中取  $c_1 = -1, c_2 = -0.5 + 0.5i$ , 其相应的Julia集图由图3所示.

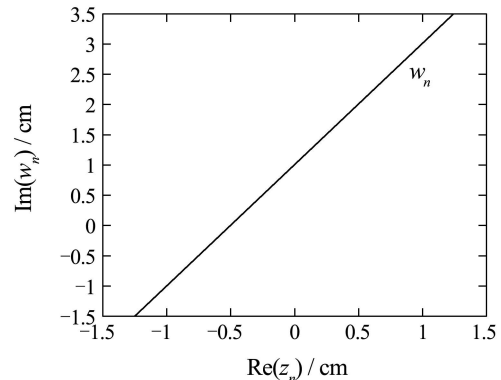


(a)  $c_1 = -1$ 时, 系统(1)的Julia集

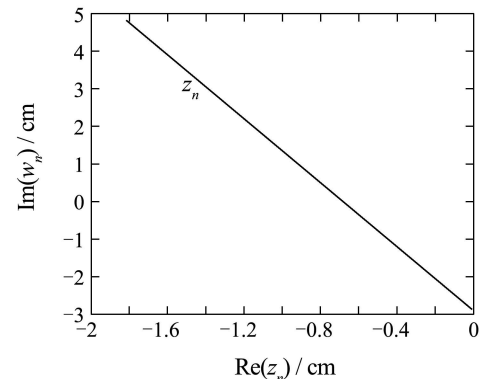


(b)  $c_2 = -0.5 + 0.5i$ 时, 系统(1)的Julia集  
图 3 系统(1)的Julia集  
Fig. 3 Julia sets of system (1)

注意到耦合强度  $D$  需要满足的条件, 可取  $D = -1.1 + 1.1i$ , 则  $z_n, w_n$  满足线性关系, 如图4所示. 此时,  $\mu = c_1 + D(c_1 - c_2) = 0.1$ , 新的系统为  $e_{n+1} = e_n^2 + 0.1$ , 由此  $z_n$  和  $w_n$  达到广义同步, 这由图5所证实.



(a)  $w_n$ 图



(b)  $z_n$ 图

图 4  $z_n$  与  $w_n$  的线性关系图

Fig. 4 The linear graph of  $z_n$  and  $w_n$

下面给出Julia集的非线性广义同步分析. 令  $g(z_n, w_n) = z_n - w_n^2 - c_2$ , 则耦合系统(4),(5)可写为

$$z_{n+1} = z_n^2 + c_1 + D(z_n - w_n^2 - c_2)^2, \quad (13)$$

$$w_{n+1} = w_n^2 + c_2. \quad (14)$$

另一方面选取  $f(z_n, w_n) = \alpha z_n + \beta w_n^2 + \gamma$ , 并取

$$e_n = \alpha z_n + \beta w_n^2 + \gamma. \quad (15)$$

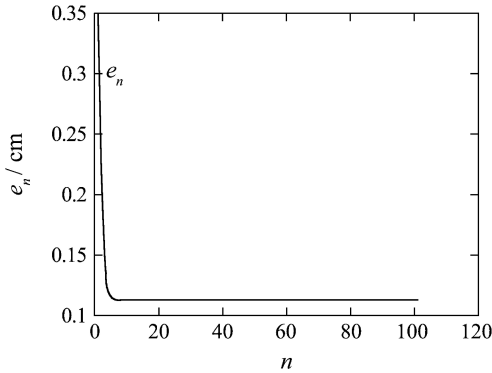
代式(13)~(15)进入式(7)得

$$\begin{cases} \alpha + \alpha D = \alpha^2, & \alpha D + \beta = \beta^2, \\ -2\alpha D = 2\alpha\beta, & 2\alpha D c_2 + 2\beta c_2 = 2\beta\gamma, \\ -2\alpha D c_2 = 2\alpha\gamma, & \\ \alpha c_1 + \alpha D c_2^2 + \beta c_2^2 + \gamma = \gamma^2 + \mu. & \end{cases}$$

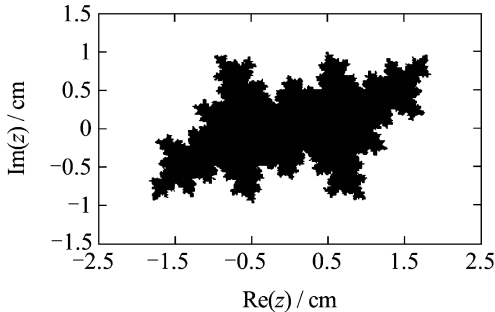
解方程组可得

$$\begin{cases} \alpha = 1 + D, & \beta = -D, \\ \gamma = -D c_2, & \mu = c_1 + D(c_1 - c_2). \end{cases}$$

这样  $e_n$  满足迭代关系  $e_{n+1} = e_n^2 + \mu$ . 由前部分叙述, 要保证其有吸引不动点, 则需  $\mu \in S$ . 记  $c_1 - c_2 = |c_1 - c_2|(\cos \phi + i \sin \phi)$ , 将  $S$  向左移动  $c_1$  个单位后, 在大小上再变为  $S$  的  $1/|c_1 - c_2|$  倍, 然后顺时针旋转  $\phi$  角度, 得到令一心形线  $S_2$ , 则耦合强度  $D$  的稳定区域就是  $S_2$  所围成的区域. 同线性部分的分析类似.



(a)  $z_n, w_n$  达到广义同步



(b) Julia集实现广义同步

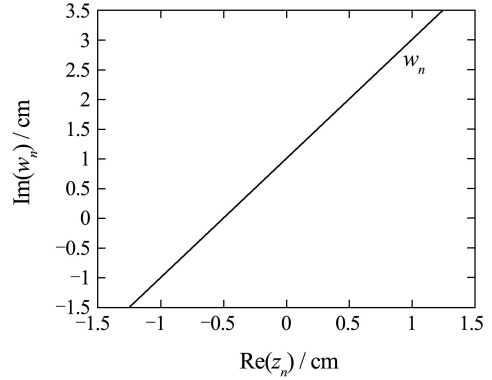
图5 Julia集的线性广义同步

Fig. 5 The linear generalized synchronization of Julia set

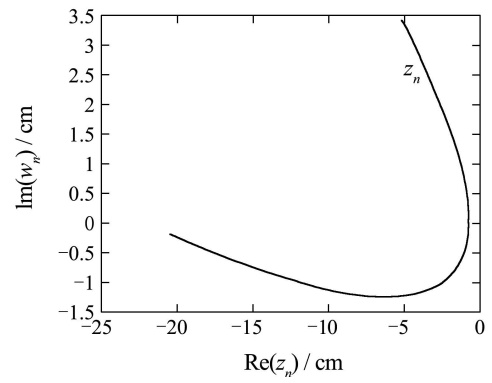
Julia集的非线性广义同步的实现分析与线性广义同步分析类似.

仍以上述的例子来说明非线性同步方法的有效性. 在系统(2)(3)中取  $c_1 = -1, c_2 = -0.5 + 0.5i$ , 注意到耦合强度  $D$  需要满足的条件, 可取  $D = -1.1 + 1.1i$ , 则  $z_n, w_n$  满足非线性关系, 如图6所示. 此时  $\mu = c_1 + D(c_1 - c_2) = 0.1$ , 新的系统为  $e_{n+1} = e_n^2 + 0.1$ ,

由此  $z_n$  和  $w_n$  达到广义同步, 这由图7所证实.



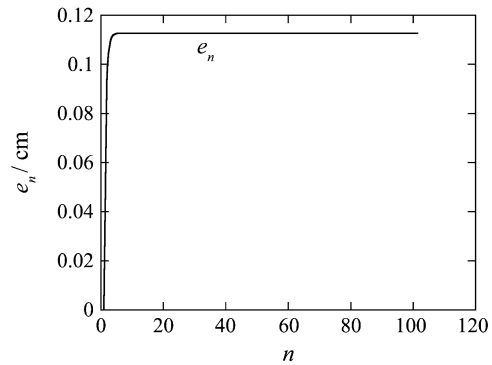
(a)  $w_n$  图



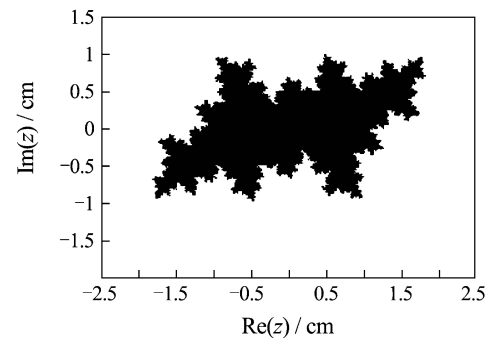
(b)  $z_n$  图

图6  $z_n$  与  $w_n$  的非线性关系图

Fig. 6 The nonlinear graph of  $z_n$  and  $w_n$



(a)  $z_n, w_n$  达到广义同步



(b) Julia集实现广义同步

图7 Julia集的非线性广义同步

Fig. 7 The nonlinear generalized synchronization of Julia set

## 4 结论(Conclusion)

本文中,我们将控制的思想和方法引入到分形理论中,并以系统 $z_{n+1} = z_n^2 + c$ 为例,对该系统的不同参数的Julia集分别采用线性和非线性的方法进行了广义同步,仿真结果表明该方法是有用的,可行的.这些理论分析必将有助于我们进一步加深分形Julia集在各领域中的理解及应用.

文中的广义同步项是针对经典复二次多项式系统(1)所取的,对其它形式的系统该方法不一定有效,但所取的 $g(z_n, w_n)$ 与 $f(z_n, w_n)$ 并不是唯一的,比如取 $g(z_n, w_n) = k(z_n - w_n)$ .事实上,只要 $[g(z_n, w_n)]^2$ 的展开式中含有 $z_n^2, w_n^2$ 项,就有可能找到一个函数 $f(z_n, w_n)$ ,其定义的 $e_n$ 的迭代关系符合经典复二次多项式系统(1),进而得到 $z_n$ 和 $w_n$ 更为复杂的Julia集的广义同步方式.

## 参考文献(References):

- [1] DARKOPOULOS V. Schroder iteration functions associated with a one-parameter family of biquadratic polynomials[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2002, 13(2): 233 – 243.
- [2] GOVIN M, JAUSLIN H R. Julia sets in iterative KAM methods for eigenvalue problem[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1998, 9(11): 1835 – 1846.
- [3] BENTLEY P J. Fractal proteins[J]. *Genetic Programming and Evolvable Machines*, 2004, 5(1): 71 – 101.
- [4] MARCELO E, JEDRZEJ S. Fractal mechanics[J]. *Physica D*, 2006, 220(1): 54 – 68.
- [5] 王兴元, 孟庆业. 基于Langevin问题探讨广义M-J集的物理意义[J]. *物理学报*, 2004, 53(2): 388 – 395.
- (WANG Xingyuan, MENG Qingye. Study on the physics meaning for generalized Mandelbrot-Julia sets based on the Langevin problem[J]. *Acta Physica Sinica*, 2004, 53(2): 388 – 395.)
- [6] BISKUP M, BORGS C, CHAYES J T, et al. General theory of Lee-Yang zeros in models with first-order phase transitions[J]. *Physical Review Letters*, 2000, 84(21): 4794 – 4797.
- [7] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8): 821 – 824.
- [8] AMRITKAR R E, GUPTA N. Synchronization of chaotic orbits: the effect of a finite time step[J]. *Physical Review E*, 1993, 47(6): 3889 – 3895.
- [9] PARLITZ U, KOCAREV L, STOJANOVSKI T, et al. Encoding messages using chaotic synchronization[J]. *Physical Review E*, 1996, 53(5): 4351 – 4361.
- [10] CHEN G, DONG X. *From chaos to order, Perspectives, Methodologies, and Applications*[M]. Singapore: World Scientific, 1998.
- [11] YANG J Z, HU G, XIAO J H. Chaos synchronization in coupled chaotic oscillators with multiple positive Lyapunov exponents[J]. *Physical Review Letters*, 1998, 80(3): 496 – 499.
- [12] PARLITZ U, JUNGE L, KOCAREV L. Subharmonic entrainment of unstable period orbits and generalized synchronization[J]. *Physical Review Letters*, 1997, 79(17): 3158 – 3161.
- [13] KOCAREV L, PARLITZ U. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems[J]. *Physical Review Letters*, 1996, 76(11): 1816 – 1819.
- [14] SUI S G, LIU S T. Control of Julia set[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, 26(4): 1135 – 1147.

## 作者简介:

张永平 (1979—), 男, 讲师, 研究领域为分形的控制及应用等,  
E-mail: ypzhangsd@126.com;

范玉军 (1961—), 女, 副教授, 研究领域为计算数学、统计学等.