

文章编号: 1000-8152(2009)06-0634-07

基于信赖域二次规划的非线性模型预测控制优化算法

赵敏, 李少远

(上海交通大学自动化系, 上海 200240)

摘要: 针对非线性预测控制如何在有限时域内有效的求解非凸非线性规划这一关键问题, 本文采用序列二次规划方法, 将非线性规划转化为一组二次子规划求解. 首先根据非线性规划联立方法将系统状态和控制量同时作为优化变量, 得到以控制量步长为优化变量, 只包含不等式约束的子二次规划问题, 并用它取代原SQP子规划, 减小了子问题的规模; 随后采用基于信赖域二次规划的方法求解子规划问题, 保证每次迭代的可行性; 同时采用一种能够保持SQP问题Hessian矩阵稀疏结构的更新方法, 也在一定程度上降低了算法的复杂程度. 最后的仿真结果表明了该方法的有效性.

关键词: 非线性预测控制; 非线性规划; 序列二次规划(SQP); 信赖域

中图分类号: TP273, O221.2 **文献标识码:** A

Nonlinear model predictive control optimization algorithm based on the trust-region quadratic programming

ZHAO Min, LI Shao-yuan

(Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: The nonlinear model predictive control(NMPC) requires the optimal or suboptimal solution of a nonlinear non-convex optimization problem at each sampling time, and the sequential-quadratic-programming(SQP) is the conventional algorithm for solving such a problem. By means of the simultaneous approach in nonlinear programming, an SQP sub-problem of NMPC is built, which considers the system state and the control as optimization variables simultaneously. Then, a new quadratic-programming(QP) sub-problem is established for which the step-length in each iteration is treated as an optimization variable and the linear inequalities are treated as constraints. After that, a trust-region-quadratic-programming approach is used to solve this sub-problem, and an update method that maintains the sparse structure for the Hessian matrix is used to reduce the computational complexity. Finally, simulation examples show the effectiveness of the presented approach.

Key words: nonlinear predictive control; nonlinear programming; sequential-quadratic-programming; trust-region approach

1 引言(Introduction)

模型预测控制(model predictive control, MPC)已被广泛应用于各个领域, 针对非线性系统的预测控制研究目前倍受关注^[1~3]. 对于非线性MPC, 如何在有限时间内有效地求解非凸非线性规划是需要解决的一个的关键问题^[4~8]. 非线性规划一般采用数值方法求解, 其中SQP算法是最常用方法之一^[9]. 采用SQP求解非线性预测控制的优化问题, 根据处理系统等式约束方法的不同, 可分为序列方法(sequential approach)和联立方法(simultaneous approach)^[10]. 序列方法寻优变量较少, 但会产生

稠密结构的Hessian矩阵, 当遇到不稳定模态时导致优化过程中止. 使用联立算法每次迭代无需求解状态方程, 减少了额外计算时间, 并能获得具有稀疏结构的Hessian矩阵, 使得SQP子问题易于求解^[11,12].

大多SQP类算法采用线搜索保证全局收敛性, 但求解效率并不高; 而信赖域方法能在确定方向的同时确定步长, 具有强收敛性, 强适应性和稳定性等优点^[13]. 传统信赖域方法往往预先给定一个常数作为信赖域半径, 而且信赖域半径的更新也无法充分利用可知的信息. 因此现在相继出现了一系列半径可自动调节的信赖域方法. 文献[14]研究了初始半径

收稿日期: 2007-03-25; 收修改稿日期: 2009-01-04.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60774015, 60534020); 国家“863”计划资助项目(2006AA04Z173); 高等学校博士点专项科研基金资助项目(20060248001).

的选取对算法有效性的影响, 通过近似模型和目标函数沿负梯度方向的近似程度调节信赖域半径; 文献[15,16]分别给出了信赖域半径关于上次迭代步长和目标函数梯度的函数表达形式; 文献[17]则提出了一种自适应信赖域方法, 每次迭代自动调整信赖域半径. 文献[19]讨论了针对一类带有非线性不等式约束的非线性预测控制问题, 基于SQP提出了一种优化算法. 在文献[20]中每次迭代求解无约束问题, 首先判断在解的作用下约束条件是否被破坏, 若约束不满足则增加一定的偏移量保证解可行, 之后再进行一次迭代.

本文采用联立方法, 给出非线性预测控制SQP子问题的描述, 随后经过变量代换得到以控制量步长 Δu 为优化变量, 只包含线性不等式约束的子二次规划, 并通过半径可自动调整的信赖域二次规划的方法求解, 保证解的可行性; 同时采用一种能够保持Hessian矩阵稀疏结构的更新算法, 在一定程度上降低复杂度; 最后的仿真实例验证了算法的有效性.

2 半径可调信赖域二次规划算法(Quadratic programming algorithm with tunable trust region radius)

对于一般的约束非线性优化问题

$$\begin{cases} \min_x f(x), \\ \text{s.t. } C_E = 0, C_I \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $f(x), C_E = 0$ 和 $C_I \leq 0$ 是二次连续可微函数, Ω 为可行域. 在当前迭代点处求解信赖域二次规划子问题:

$$\begin{cases} \min_{d_i} \nabla f(x^i)^T d_i + \frac{1}{2} d_i^T B_i d_i, \\ \text{s.t. } C_E(x^i) + \nabla C_E(x^i)^T d_i = 0, \\ C_I(x^i) + \nabla C_I(x^i)^T d_i \leq 0, \\ \|d_i\| \leq r_i, \end{cases} \quad (2)$$

获得试探步 d_i , 并产生可行点序列 $\{x^i\}_{i=0,1,2,\dots}$, 其中 $x^{i+1} = x^i + d_i$, 记 $\varphi(d_i) = \nabla f(x^i)^T d_i + \frac{1}{2} d_i^T B_i d_i$.

定义 ρ_i 为问题(1)真实下降量与估计下降量之比:

$$\rho_i = \frac{f(x^i) - f(x^i + d_i)}{-\varphi(d_i)}. \quad (3)$$

通常根据 ρ_i 的大小来调整信赖域半径, 为提高算法的效率, 信赖域半径取为 $\nabla f(x^i)$ 和 B_i 的函数, 通过调节参数来调节信赖域半径. 考虑 ρ_i 中所包含目标函数的二次信息^[22], 采用一种半径可调整的信赖域二次规划方法, 保证每次 x^i 为成功迭代. 令

$$r_i = \frac{\|d_i\|}{\|\nabla f(x^i) - \nabla f(x^{i-1})\|} \|\nabla f(x^i)\|, \quad (4)$$

根据 ρ_i 调整信赖域半径 r_i , 具体算法如下:

算法 1

1) 初始化: 给定 x^0, B_0 , 终止条件 $\varepsilon > 0, 1 > \eta_2 > \eta_1 > 0, r_0 = \|\nabla f(x^0)\|$, 信赖域半径上限 $\bar{r}, \eta_3 = 0, i = 0$;

2) 若满足终止条件, 则停止, 否则求解子规划问题(2)获得 d_i ;

3) 求解式(3)获得 ρ_i , 并更新

$$x^{i+1} = \begin{cases} x^i + d_i, & \rho_i \geq \eta_1, \\ x^i, & \rho_i \leq \eta_1; \end{cases} \quad (5)$$

4) 调整信赖域半径:

若 $\rho_i \geq \eta_1$, 则 $\eta_3 = \frac{\|d_i\|}{\|\nabla f(x^{i+1}) - \nabla f(x^i)\|}$; 否则 $\eta_3 = \frac{\eta_3}{4}$, 信赖域半径更新为

$$r_{i+1} = \begin{cases} \min\{\eta_3 \|\nabla f(x^{i+1})\|, \bar{r}\}, & \rho_i \geq \eta_2, \\ \eta_3 \|\nabla f(x^{i+1})\|, & \rho_i < \eta_2; \end{cases} \quad (6)$$

5) 根据修正公式更新 B_{i+1} (详见第5部分), 令 $i = i + 1$, 返回2).

该算法的收敛性分析详见附录1.

3 非线性预测控制问题描述(Description of nonlinear predictive control problem)

考虑一般离散非线性系统

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) + g(x_k)u_k, \\ y_k = Cx_k. \end{cases} \quad (7)$$

其中: $x_k \subseteq \mathbb{R}^n, u_k \subseteq \mathbb{R}^m$ 为状态和控制向量, 满足 $x_k \in X, u_k \in U; y_k \in \mathbb{R}^p$ 为输出向量, 设 $Cg(x_k) \neq 0$, 即系统(1)的相关度 $r = 1$ ^[18]. 每个采样时刻非线性MPC求解如下开环优化问题^[10,19]获得控制律:

$$\begin{cases} \min_{X,U} \sum_{i=1}^{N-1} (\|x_{k+i|k}\|_Q^2 + \|u_{k+i|k}\|_R^2) + \|x_{k+N|k}\|_P^2, \\ \text{s.t. } x_{k+i+1|k} = f(x_{k+i|k}) + g(x_{k+i|k})u_{k+i|k}, \\ \begin{bmatrix} D_x \\ D_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_x \\ d_u \end{bmatrix} \leq 0, i = 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (8)$$

其中: N 为预测时域, $Q_{n \times n}, R_{m \times m}$ 和 $P_{n \times n}$ 为正定矩阵. 求解式(8)取 $u_k = u_k^*$ 作用于对象, 并在下一采样时刻重复以上优化过程. 为简化描述, 令

$$z \triangleq [u_k^T \ x_{k+1}^T \ u_{k+1}^T \ \dots \ x_{k+N-1}^T \ u_{k+N-1}^T \ x_{k+N}^T]^T,$$

则在 k 时刻非线性MPC求解标准非线性规划问题:

$$\begin{cases} \min_z \phi(z) \\ \text{s.t. } C_I(z) \leq 0, C_E(z) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

其中:

$$\phi(z) = z^T \tilde{Q} z, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} R & & & \\ & Q & & \\ & & \ddots & \\ & & & R \\ & & & & P \end{bmatrix},$$

$$C_I(z) = \begin{bmatrix} D_x & & & \\ & D_u & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_x \\ & & & & D_u \end{bmatrix} \cdot z - \begin{bmatrix} d_x \\ d_u \\ \vdots \\ d_x \\ d_u \end{bmatrix},$$

$$C_E(z) = \begin{bmatrix} f(x_k) + g(x_k) u_k \\ f(x_{k+1}) + g(x_{k+1}) u_{k+1} \\ \vdots \\ f(x_{k+N-1}) + g(x_{k+N-1}) u_{k+N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ & 0 & -I \\ & & \ddots \\ & & & 0 & -I \end{bmatrix} \cdot z.$$

本文将在接下来的部分给出求解标准非线性规划问题(9)的具体算法.

4 非线性MPC中信赖域子规划问题的求解(Solution of trust region sub-programming problem of nonlinear MPC)

采用半径可调整的信赖域二次规划方法求解非线性MPC优化问题, 在第 l 次迭代求解如下信赖域子问题:

$$\begin{cases} \min_{\Delta z_l} \phi(\Delta z_l) = (\tilde{Q} z_l)^T \Delta z_l + \frac{1}{2} \Delta z_l^T H_l \Delta z_l, \\ \text{s.t. } C_E(z_l) + \nabla C_E(z_l)^T \Delta z_l = 0, \\ C_I(z_l) + \nabla C_I(z_l)^T \Delta z_l \leq 0, \\ \|\Delta z_l\| \leq r_l. \end{cases} \quad (10)$$

其中: r_l 为信赖域半径, $\Delta z_l = [\Delta u_k^{(l)T} \quad \Delta x_{k+1}^{(l)T} \quad \dots \quad \Delta x_{k+N-1}^{(l)T} \quad \Delta u_{k+N-1}^{(l)T} \quad \Delta x_{k+N}^{(l)T}]$ 为优化变量,

$$H_l = \begin{bmatrix} R_0 & & & & \\ & \hat{Q}_1 & \hat{M}_1 & & \\ & \hat{M}_1^T & \hat{R}_1^T & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \hat{Q}_{N-1} & \hat{M}_{N-1} \\ & & & & \hat{M}_{N-1}^T & \hat{R}_{N-1}^T \\ & & & & & & \hat{Q}_N \end{bmatrix}.$$

其中:

$$R_0 = \hat{R}_i = R,$$

$$\hat{Q}_i = Q + \lambda_i^T \left(\frac{\partial^2 f(x_{k+i}^{(l)})}{\partial (x_{k+i}^{(l)})^2} + \frac{\partial^2 g(x_{k+i}^{(l)})}{\partial (x_{k+i}^{(l)})^2} \right),$$

$$\hat{M}_i = \lambda_i^T \left(\frac{\partial g(x_{k+i}^{(l)})}{\partial x_{k+i}^{(l)}} \right), \quad \hat{Q}_N = P,$$

$$\nabla C_E(z_l) = \begin{bmatrix} B_0 & -I & & & \\ & A_1 & B_1 & -I & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_{N-1} & B_{N-1} & -I \end{bmatrix}.$$

其中:

$$B_0 = g(x_k^{(l)}), \quad A_i = \frac{\partial f(x_k^{(l)})}{\partial x_{k+i}^{(l)}} + \frac{\partial g(x_{k+i}^{(l)})}{\partial x_{k+i}^{(l)}} u_{k+i}^{(l)},$$

$$B_i = g(x_{k+i}^{(l)}), \quad C_E(z_l) = 0,$$

$$\nabla C_l(z_l) = \begin{bmatrix} D_x & & & \\ & D_u & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_x \\ & & & & D_u \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

在当前迭代点 z_l 处, 定义

$$\rho_l = \frac{\varphi(z_l) - \varphi(z_l + \Delta z_l)}{-\phi(\Delta z_l)}, \quad (11)$$

$$r_l = \frac{\|\Delta z_{l-1}\|}{\|\nabla \varphi(z_l) - \nabla \varphi(z_{l-1})\|} \|\nabla \varphi(z_l)\|.$$

令 $Z_l = [x_l^T \quad u_l^T]^T$, $z_l = \mathbf{E} \cdot Z_l$, 其中 \mathbf{E} 为适当阶次的单位阵, 将式(10)表示为规范形式:

$$\psi(\Delta Z_l) = (\tilde{Q} z_l)^T \Delta(Z)_l + \frac{1}{2} \Delta Z_l^T \mathfrak{R}_l \Delta Z_l. \quad (12)$$

其中:

$$\mathfrak{R}_l = \begin{bmatrix} \hat{Q} & \hat{M} \\ \hat{M}^T & \hat{R} \end{bmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_1 & & & \\ & \hat{Q}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{Q}_N \end{bmatrix},$$

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{M}_1 & & & \\ & 0 & \hat{M}_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \hat{M}_{N-1} \\ & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{R} = \begin{bmatrix} R_0 & & & \\ & \hat{R}_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{R}_{N-1} \end{bmatrix}.$$

同时根据式(10)中的等式约束, 显然有

$$\Delta x_l = -\tilde{A}^{-1} \tilde{B} \Delta u_l. \quad (13)$$

$$\text{其中: } \tilde{A} = \begin{bmatrix} -I & & & \\ A_1 & -I & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{N-1} & -I \end{bmatrix} \text{为 } m \times N \text{ 维非奇异}$$

阵; $\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 & & & \\ & B_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{N-1} \end{bmatrix}$. 因此,

$$\Delta \mathcal{Z}_l = [-\tilde{B}\tilde{A}^{-T} \quad I]^T \Delta \mathbf{u}_l. \quad (14)$$

将式(13)代入式(10)和式(12)得到以 $\Delta \mathbf{u}_l$ 为优化变量的新优化问题:

$$\begin{cases} \min_{\Delta \mathbf{u}_l} = \mathcal{Q}^T \Delta \mathbf{u}_l + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}_l^T \mathfrak{R}_l \Delta \mathbf{u}_l, \\ \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} A_D \\ A_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}(k) + I \\ \mathbf{X}(k) - \tilde{A}^{-1} \tilde{B} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_l \leq 0, \\ \quad \quad \quad \left\| [-\tilde{B}\tilde{A}^{-T} \quad I]^T \Delta \mathbf{u}_l \right\|_\infty \leq r_l. \end{cases} \quad (15)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \mathbf{U}_k^T \Lambda_R - \mathbf{X}_k^T \Lambda_Q A^T B, \\ \mathfrak{R}_l &= \hat{R} + \tilde{B}^T \tilde{A}^{-T} \hat{Q} \tilde{A}^{-1} \tilde{B} - \\ &\quad (\hat{M} \tilde{A}^{-1} \tilde{B} + \tilde{B}^T \tilde{A}^{-T} \hat{M}^T), \\ \Lambda_R &= \begin{bmatrix} R & & \\ & \ddots & \\ & & R \end{bmatrix}, \quad \Lambda_Q = \begin{bmatrix} Q & & \\ & \ddots & \\ & & P \end{bmatrix}, \\ \Lambda_{D_x} &= \begin{bmatrix} D_x & & \\ & \ddots & \\ & & D_u \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$\mathbf{U}_k \in \mathbb{R}^{m \times N}$, $\mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^{n \times N}$ 分别为当前时刻系统的控制初值和状态初值.

在SQP算法中, 若子问题的Hessian阵正定, 则优化问题是一个严格的凸二次规划, 子问题有唯一解.

定理 1 对于非线性系统(1), 若其子问题(10)的 H_l 是正定阵, 则按上述一系列变换后, 所得新优化问题(15)的Hessian阵 \mathfrak{R}_l 也是正定的.

证 证明见附录2.

在 k 时刻, 非线性MPC求解的SQP子问题由变量较多的式(10), 转化为以 $\Delta \mathbf{u}_l$ 为优化变量, 只包含不等式约束的式(15).

5 Hessian矩阵的更新算法(Updating method of the Hessian matrix)

SQP算法的收敛性及收敛速度在很大程度上依赖于原问题Lagrange函数的Hessian矩阵. SQP子问题(10)虽然是较大规模的优化问题, 但它的Hessian矩阵是稀疏矩阵, 因此采用保持该稀疏结构的更新算法, 能够降低计算的复杂程度.

考虑式(10)的 Hessian 矩阵, 已知第 l 次迭代的 Hessian 矩阵为

$$H_l = \begin{bmatrix} R_0 & & & & & \\ & \hat{Q}_1 & \hat{M}_1 & & & \\ & \hat{Q}_1^T & \hat{R}_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \hat{Q}_{N-1} & \hat{M}_{N-1} \\ & & & & \hat{M}_{N-1}^T & \hat{R}_{N-1} \\ & & & & & & \hat{Q}_N \end{bmatrix}. \quad (16)$$

假设经过 l 次迭代已得到 $\Delta \mathbf{u}_l$, $\Delta \mathbf{x}_l$ 和 \mathcal{Z}_{l+1} . 记

$$\begin{cases} p_u(i) = u_{k+i}^{(l+1)} - u_{k+i}^{(l)}, \\ p_x(i) = x_{k+i}^{(l)} - x_{k+i}^{(l)}, \\ q_u(i) = \nabla_{u_k} \varphi(x_{k+i}^{(l+1)}, u_{k+i}^{(l+1)}) - \nabla_{u_k} \varphi(x_{k+i}^{(l)}, u_{k+i}^{(l)}), \\ q_x(i) = \nabla_{x_k} \varphi(x_{k+i}^{(l+1)}, u_{k+i}^{(l+1)}) - \nabla_{x_k} \varphi(x_{k+i}^{(l)}, u_{k+i}^{(l)}), \\ i = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases} \quad (17)$$

根据DFP方法对式(6)Hessian矩阵分块更新:

$$\begin{cases} \tilde{H}_0^{(l+1)} = \\ \tilde{H}_0^{(l)} + \frac{q_u(0)q_u(0)^T}{q_u(0)^T p_u(0)} - \frac{\tilde{H}_0^{(l)} p_u(0)p_u(0)^T \tilde{H}_0^{(l)}}{p_u(0)^T \tilde{H}_0^{(l)} p_u(0)}, \\ \tilde{H}_k^{(l+1)} = \\ \tilde{H}_k^{(l)} + \frac{[q_x(i)^T \quad q_u(i)^T][q_x(i)^T \quad q_u(i)^T]^T}{[q_x(i)^T \quad q_u(i)^T]^T [p_x(i)^T \quad p_u(i)^T]^T} - \\ \frac{\tilde{H}_k^{(l)} [p_x(i)^T \quad p_u(i)^T][p_x(i)^T \quad p_u(i)^T]^T \tilde{H}_k^{(l)}}{[p_x(i)^T \quad p_u(i)^T]^T \tilde{H}_k^{(l)} [p_x(i)^T \quad p_u(i)^T]}, \\ \tilde{H}_N^{(l+1)} = \tilde{H}_N^{(l)} + \frac{q_x(N)q_x(N)^T}{q_x(N)^T p_x(N)} - \\ \frac{\tilde{H}_N^{(l)} p_x(N)p_x(N)^T \tilde{H}_N^{(l)}}{p_x(N)^T \tilde{H}_N^{(l)} p_x(N)}, \\ i = 1, \dots, N-1, \end{cases} \quad (18)$$

因此, 新优化问题(15)中 \mathfrak{R}_l 的更新算法为

$$\mathfrak{R}_{l+1} = [-\tilde{B}\tilde{A}^{-1} \quad I] \cdot \mathcal{Y} \cdot H_{l+1} \cdot \mathcal{Y}^T \cdot [-\tilde{B}\tilde{A}^{-T} \quad I]^T. \quad (19)$$

其中

$$(\mathcal{Y})_{ij} = \begin{cases} I, & \text{如果 } i = 1, 2, \dots, N, j = 1, \dots, 2N-1, \\ & \text{或者 } i = N+1, \dots, 2N, j = 2, \dots, 2N, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

6 基于信赖域二次规划的非线性MPC算法(Nonlinear MPC optimization algorithm based on trust region quadratic programming)

在 k 时刻, 非线性预测控制采用算法1迭代求解非线性规划获得控制律, 具体算法如下:

算法2

1) 给定初值 $\mathcal{Z}_0 (\mathcal{Z}_0 \in \Omega)$ 、矩阵 \mathbf{E} 、信赖域半径初值 $r_0 = \|\Delta\varphi(\mathcal{Z}_0)\|$, 信赖域半径上限值 $\bar{r} > 0$, 以及参数 $0 \leq \eta_1 \leq \eta_2 < 1$, 迭代次数 L , 取Hessian矩阵初值 $H_0 = \mathbf{E}$, $l = 0$;

2) 执行算法1, 迭代 L 次停止, 输出 $\mathcal{Z}_L, H_0 = H_L$, 其中由式(19)获得Hessian矩阵更新值 H_{l+1} , 根据式(18)得到 \mathfrak{R}_{l+1} ;

3) 取控制律 $u_k = [I \ 0 \ \dots \ 0] \mathcal{Z}_L$ 施加于系统, 并令 $\mathcal{Z}_0(1:(n+m), :) = [u_k^T \ x_{k+1}^T]^T$, $\mathcal{Z}_0((n+m) \times 1:(n+m) \times N, :)$, 置 $k = k + 1$, 返回1)。

7 仿真验证(Simulation)

将算法2应用于CSTR系统(连续搅拌釜)作仿真实例, 系统方程为^[20],

$$\begin{cases} \dot{C}_A = \frac{q}{V}(C_{Af} - C_A) - k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)C_A, \\ \dot{T} = \frac{q}{V}(T_f - T) + \frac{-\Delta H}{\rho C_p} k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)C_A + \\ \frac{UA}{V\rho C_p}(T_c - T). \end{cases} \quad (20)$$

其中: C_A 是生成物A的浓度(mol/l), 输出 T 是反应器温度(K), 输入 T_c 是冷却剂温度(K)且满足 $280 \text{ K} \leq T_c \leq 370 \text{ K}$. 系统参数取值同文献[20], 采样时间 $T_s = 0.1 \text{ min}$. 假设系统的平衡状态为 $C_A^{\text{eq}} = 0.5 \text{ mol/l}$, $T^{\text{eq}} = 350 \text{ K}$, $T_c^{\text{eq}} = 300 \text{ K}$, 控制目标使输出反应物温度跟踪设定值. 预测时域 $N = 30$, 加权矩阵分别为 $Q = I_{2 \times 2}$, $R = 0.5$. 每个采样时刻采用算法2迭代5次, 仿真结果如图1. 可见, 采用算法2非线性MPC可无论是响应速度还是跟踪性能, 都明显优于采用线性预测控制算法的结果, 且输入也满足约束条件. 用MATLAB6.5优化工具箱中的fmincon函数替换算法2中第2步求解非线性规划, 其中Hessian矩阵更新和采用默认值. 在Pentium IV 2.8GHz CPU, 512M Memory的PC机上作仿真. 预测时域 $N = 30$, 仿真时间为 $T = 80 \text{ min}$, 仿真结果如图2. 由图2(a)可看出, 采用算法2的非线性MPC跟踪效果优于采用fmincon函数的跟踪效果; 由图2(b)可看出, 采用fmincon求解非线性规划平均计算时间为3.76 s, 而采用算法2求解的平均计算时间则为1.87 s, 显然本文算法能够明显减少计算时间.

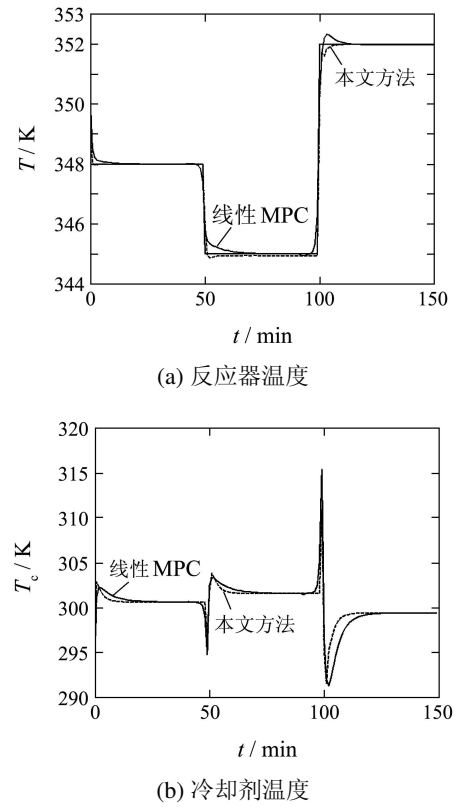


图1 输出及控制输入轨迹

Fig. 1 Trajectories of output and control law

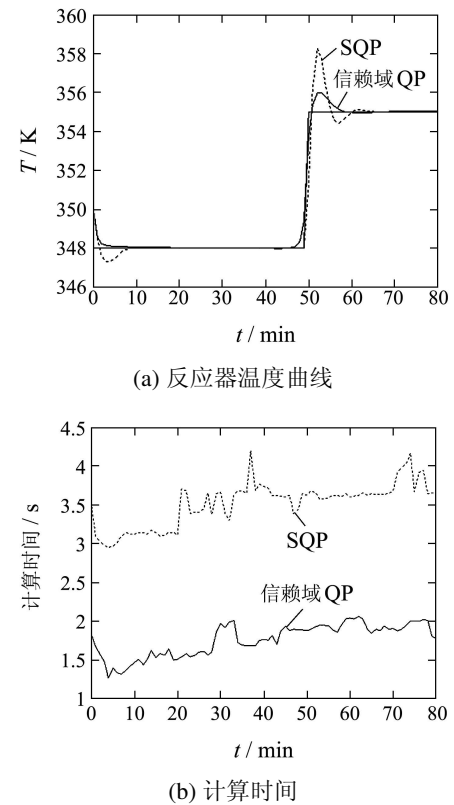


图2 SQP算法与信赖域算法仿真结果

Fig. 2 Simulation results of SQP algorithm and trust region algorithm

8 结论(Conclusion)

对非线性MPC中所要求解的非线性规划问题, 采用基于信赖域二次规划的SQP算法求解保证获得可行解. 根据联立方法, 首先确定以状态和控制同时作为优化变量的SQP子问题描述; 随后利用序列方法求解SQP二次规划, 获得以控制量的步长向量作为优化变量且只包含线性不等式约束的子问题, 并通过基于信赖域二次规划的方法求解, 保证每次迭代的可行性; 同时采用一种能够保持SQP问题Hessian矩阵的稀疏结构的更新方法, 在一定程度上降低了算法的复杂度. 最后的数字仿真验证了文中算法的有效性. 本文采用了联立方法, 将状态与控制变量同时作为优化变量, 当系统变量增加时将会抵消信赖域算法快速性和更新Hessian矩阵稀疏性的优势, 因此当变量增加时可适当减小预测时域来保证算法的快速性, 即, 通过牺牲一部分最优性, 用次优解代替最优解来保证算法的快速性. 在未来的研究中将着重考虑如何平衡多个优化变量与算法快速性之间的矛盾.

参考文献(References):

- [1] MAYNE D Q, RAWLINGS J B, RAO C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789 – 814.
- [2] HESSON M A. Nonlinear model predictive control: Current status and future directions[J]. *Computers and Chemical Engineering*, 1998, 23(2): 187 – 202.
- [3] IMSLAND L, BAR N, FOSS B. More efficient predictive control[J]. *Automatica*, 2005, 41(8): 1395 – 1403.
- [4] HU B, LINNEMANN A. Toward infinite-horizon optimality in nonlinear model predictive control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(4): 679 – 682.
- [5] 陈虹, 刘志远, 解小华. 非线性模型预测控制的现状与问题[J]. *控制与决策*, 2001, 16(4): 385 – 391.
(CHEN Hong, LIU Zhiyuan, XIE Xiaohua. Nonlinear model predictive control: The state and open problems[J]. *Control and Decision*, 2001, 16(4): 385 – 391.)
- [6] DU X N, XI Y G, LI S Y. A computationally efficient aggregation optimization strategy of model predictive control[J]. *High Technology Letters*, 2002, 8(2), 68 – 71.
- [7] 丁宝苍, 邹涛, 李少远. 时变不确定系统离线鲁棒预测控制[J]. *控制理论与应用*, 2006, 23(2): 240 – 244.
(DING Baocang, ZOU Tao, LI Shaoyuan. Varying-horizon off-line robust predictive control for time-varying uncertain systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(2): 240 – 244.)
- [8] LONG C E, POLISETTY P K, GATZKE E P. Nonlinear model predictive control using deterministic global optimization[J]. *Journal of Process Control*, 2006, 16(6): 635 – 643.
- [9] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
(YUAN Yaxiang, SUN Wenyu. *Theory and Method of Optimization*[M]. Beijing: Science Press, 2001.)
- [10] MARK C. Efficient nonlinear model predictive control algorithms[J]. *Annual Reviews in Control*, 2004, 28(2): 229 – 237.
- [11] BIEGLER L T. Simultaneous dynamic optimization strategies: Recent advances and challenges[J]. *Computers and Chemical Engineering*, 2006, 30(10–13): 1560 – 1575.
- [12] BIEGLER L T, CERVANTES A M, WACHTER A. Advances in simultaneous strategies for dynamic process optimization[J]. *Chemical Engineering Science*, 2002, 57(4): 575 – 593.
- [13] PENG Y H, YAO S B. A feasible trust-region algorithm for inequality constrained optimization[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 173(1): 513 – 522.
- [14] STARTENAER A. Automatic determination of an initial trust region in nonlinear programming[J]. *SIAM Journal of Science Compute*, 1997, 18(2): 1788 – 1803.
- [15] LONG H. A self-adaptive trust region algorithm[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2003, 21(2): 229 – 236.
- [16] FAN J Y, YUAN Y. A new trust region algorithm with trust region radius converging to zero[C] // *Proceedings of the 5th International Conference on Optimization: Techniques and Applications*. Hongkong: HK press.
- [17] LIAO L Z, ZHANG J L, ZHANG X G. An adaptive trust region method and its convergence[J]. *Science in China(Series A)*, 2002, 45(5): 620 – 631.
- [18] 杨青, 李树荣. 基于Backstepping设计的不确定非线性系统的预测控制[J]. *控制理论与应用*, 2007, 24(4): 525 – 529.
(YANG Qing, LI Shurong. Model predictive control for nonlinear systems with uncertainty by using backstepping design[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(4): 525 – 529.)
- [19] MARTINSEN F, BIEGLER L T, FOSS B A. A new optimization algorithm with application to nonlinear MPC[J]. *Modeling, Identification and Control*, 2005, 26(1): 2 – 22.
- [20] TENNY M J, WRIGHT S J, RAWLINGS J B. Nonlinear model predictive control via feasibility-perturbed sequential quadratic programming[J]. *Computational Optimization and Applications*, 2004, 28(1): 87 – 121.
- [21] WU F. LMI-based robust model predictive control and its application to an industrial CSTR problem[J]. *Journal of Process Control*, 2001, 11(6): 649 – 659.
- [22] 李改弟. 一个自动确定信赖域半径的信赖域方法[J]. *工程数学学报*, 2006, 23(5): 843 – 848.
(LI Gaidi. A trust region method with automatic determination of the trust region radius[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2006, 23(5): 843 – 848.)

附录1 算法1的全局收敛性分析(Appendix 1

The global convergence analysis of Algorithm 1)

假设 1 对于初始可行点 z_0 , 水平集 $\mathcal{L}_0 \triangleq \{x | C_I(x) \leq 0, C_E(x) = 0, f(x) \leq f(x_0)\} \subset \Omega$ 有界, 且 f, C_I, C_E 2阶连续可微.

假设 2 矩阵 H_l 一致有界, 即存在 $M > 0$, 使得

$$\|H_l\| \leq M. \quad (A1)$$

引理 1 x^i 是算法1产生的点列, x^* 是其聚点, 存在一个指标集 \mathcal{K} , 当 $\lim_{i \in \mathcal{K}} x^i = x^*$ 时, $\lim_{i \in \mathcal{K}} d_i = 0$.

证 可行点 $x^i \in \mathcal{L}_0$. 当 $x = x^i$ 时, 信赖域子问题在 d_i 处的K-T条件为

