

基于传感器网络的远程状态估计

肖 力, 孙志刚, 胡晓娅, 陈绵云

(华中科技大学 控制科学与工程系 图像信息处理与智能控制教育部重点实验室, 湖北 武汉 430074)

摘要: 针对传感器网络中的远程状态估计, 提出一种多传感器切换的卡尔曼滤波器. 通过分析估计误差的统计特性, 证明估计误差的协方差具有边界, 采用线性矩阵不等式的形式给出了边界的收敛条件. 研究测量数据丢失对估计器性能的影响, 使用临界到达概率作为估计器的稳定性判据, 得到采用线性矩阵不等式求解临界到达概率的方法. 数值仿真证实了结论的正确性.

关键词: 传感器网络; 卡尔曼滤波; 修正的黎卡提方程; 临界到达概率

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Remote state estimation based on sensor networks

XIAO Li, SUN Zhi-gang, HU Xiao-ya, CHEN Mian-yun

(Key Laboratory of Ministry of Education for Image Processing and Intelligent Control, Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430074, China)

Abstract: A switched Kalman filter is proposed to realize the remote state-estimation in sensor networks. The stochastic properties of the estimation error are studied; and the covariance of the estimation error is proved to have bounds. Convergence conditions of the bounds are given in terms of linear matrix inequalities. The effects of packet-dropping are considered; and the critical arrival probability is used as the stability criterion of the estimator. The bounds of the critical arrival probability are obtained by using linear matrix inequality approach. The results are tested by numerical simulations.

Key words: sensor networks; Kalman filtering; modified Riccati equation; critical arrival probability

1 引言(Introduction)

利用无线传感器网络进行远程状态估计具有鲁棒性好, 可移动性和成本低等特点^[1], 并且通过将多个传感器的信息融合, 能提高状态估计器的性能. 在基于传感器网络的远程估计中, 常采用多个传感器对同一个过程进行检测, 各传感器的测量数据经过无线通信传送到远程估计器, 进而实现对系统状态的远程估计. 由于测量数据会在通信过程中丢失, 并且各传感器的测量误差和选择概率会不同, 这些都会影响远程估计器的性能. 在不确定网络条件下实现状态估计正成为当前研究的热点^[2~7]. 这些研究分析了测量数据丢失对估计器性能的影响, 提出了保证估计器稳定, 减少估计误差的策略. 然而这些结论适用于在网络条件下, 采用单个传感器数据的估计器, 不适用于基于传感器网络的状态估计. 因此需要研究如何设计基于多传感的状态估计器, 如何分析这种估计器的性能, 进而得到对系统状态更好的估计. 本文提出采用时变Kalman滤波器实现基于传感网络的远程估计, 分析估计误差的边界及其收敛

条件, 提出测量数据到达估计器的概率与远程估计器稳定性的关系, 得出了计算临界数据到达概率的方法, 通过数值仿真证明了结论的正确性.

2 远程估计器(Remote estimator)

线性系统的离散状态方程为

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \quad (1)$$

其中: $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态, $w(k)$ 是系统噪声. 初始状态 x_0 和 $w(k)$ 是零均值高斯白噪声, 协方差为 Q 和 P_0 . 传感器网络中 N 个传感器的测量方程为

$$y_i(k) = C_i x(k) + v_i(k), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

传感器 i 的测量噪声 $v_i(k)$ 是零均值, 协方差为 R_i 的高斯白噪声. 在采样时刻随机选择传感器发送测量数据^[1], 传感器选择序列 $\{s_k | s_k \in [1, N]\}$ 满足 $\Pr(s_k = i) = q_i$, 且 $\sum_{i=1}^N q_i = 1$. 在 k 时刻, 若选择传感器 i 测量系统输出, 用二值随机变量 $\gamma_{i,k}$ 表示测量数据是否被正确接收, 并且假设 $\gamma_{i,k}$ 是一致分布的 Bernoulli 过程, 分布概率为 $\Pr(\gamma_{i,k} = 1 | s_k = i) = \lambda_i$.

采用时变Kalman滤波器估计系统状态, k 时刻估计误差的协方差 $P_{k|k-1}$ 简记为 P_k . $P_{k+1|k,i}$ 表示 k 时刻选择传感器 i 的测量数据, 估计 $k+1$ 时刻状态时, 估计误差的协方差, 简记为 $P_{k+1,i}$. 由文献[3]的结论得到

$$\begin{aligned} P_{k+1,i} = & AP_k A^T + BQB^T - \gamma_{i,k} AP_k C_i^T (C_i P_k C_i^T + \\ & R_i)^{-1} C_i P_k A^T. \end{aligned} \quad (3)$$

由式(3)可知: $k+1$ 时刻估计误差的协方差是由传感器测量误差 R_i , 传感器选择序列 $\{s_k\}$ 和传感器数据包的到达序列 $\{\gamma_{i,k}\}$ ($i = 1, \dots, N$)确定的随机变量. \bar{P}_k 记为随机变量 P_k 的期望, 则有

$$\bar{P}_k = E[P_k] = \sum_{i=1}^N q_i E[P_{k,i}]. \quad (4)$$

传感器 i 的测量数据到达估计器的概率为 λ_i , 定义其修正的代数黎卡提方程为

$$g_i(X) = AXA^T + BQB^T - \lambda_i AX C_i^T (C_i X C_i^T + R_i)^{-1} C_i X A^T. \quad (5)$$

以下定理分别给出了 \bar{P}_k 的上边界和下边界.

定理 1 (上边界) 估计器的估计误差协方差的初始值为 P_0 . 估计误差协方差的期望的上边界为

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k+1} = & A\bar{P}_k A^T + BQB^T - \sum_{i=1}^N q_i \lambda_i [A\bar{P}_k C_i^T (R_i + \\ & C_i \bar{P}_k C_i^T)^{-1} C_i \bar{P}_k A^T], \end{aligned} \quad (6)$$

如果存在矩阵 K_1, K_2, \dots, K_N 和正定矩阵 \bar{P} 使得

$$\begin{aligned} \bar{P} > & \sum_{i=1}^N q_i [(1 - \lambda_i)(AXA^T + BQB^T) + \\ & \lambda_i (F_i X F_i^T + V_i)], \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $F_i = A + K_i C_i$, $V_i = K_i R_i K_i^T + BQB^T$. 则式(6)对所有初始误差 $P_0 \geq 0$ 收敛, 其极限是以下方程的唯一正半定解:

$$\begin{aligned} X = & AXA^T + BQB^T - \sum_{i=1}^N q_i \lambda_i A [X C_i^T (R_i + \\ & C_i X C_i^T)^{-1} C_i X] A^T. \end{aligned} \quad (8)$$

证 1) 由于对传感器的选择是独立的, 由式(3)(4)得到

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k+1} = & \sum_{i=1}^N q_i \{ \lambda_i E[f_{C_i}(P_k)] + \\ & (1 - \lambda_i) E[f_{\text{loss}}(P_k)] \}, \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} f_{C_i}(P_k) = & AP_k A^T + BQB^T - AP_k C_i^T (C_i P_k C_i^T + \\ & R_i)^{-1} C_i P_k A^T, \\ f_{\text{loss}}(P_k) = & AP_k A^T + BQB^T. \end{aligned}$$

根据Jensen's不等式^[8]得到

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k+1} \leq & \sum_{i=1}^N q_i \{ \lambda_i f_{C_i}(E[P_k]) + \\ & (1 - \lambda_i) f_{\text{loss}}(E[P_k]) \}, \end{aligned}$$

将式(4)代入上式, 整理后得到式(6)是估计误差协方差的上边界.

2) 对每个传感器定义操作函数

$$\begin{aligned} \phi_i(K_i, X) = & (1 - \lambda_i)(AXA^T + BQB^T) + \\ & \lambda_i (F_i X F_i^T + V_i), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

其中: $F_i = A + K_i C_i$, $V_i = K_i R_i K_i^T + BQB^T$. 操作函数和修正的黎卡提方程的期望为

$$\bar{g}(X) = \sum_{i=1}^N q_i g_i(X),$$

$$\bar{\phi}(K_1, \dots, K_N, X) = \sum_{i=1}^N q_i \phi_i(K_i, X).$$

利用上述方程, 将文献[3]中定理1的证明过程推广到采用多传感器的情形, 可以证明, 若满足式(7)中的条件, 则式(8)成立. 证毕.

定理 2 (下边界) 定义 $\bar{A} = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^N q_i \lambda_i} A$, 矩阵序列 $\{S_k | S_0 = 0, S_k = \bar{A} S_{k-1} \bar{A}^T + BQB^T\}$ 满足 $S_k \leq \bar{P}_k$. 若 (\bar{A}, C_i) 是稳定的, $(\bar{A}, BQ^{\frac{1}{2}})$ 是可控的, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 存在一个矩阵 \bar{S} , 使得 $\bar{P} > \bar{S}$.

证 由以上定义可知 $\bar{P}_0 = P_0 \geq S_0 = 0$. 假设 $\bar{P}_k \geq S_k$ 成立, 根据文献[3]中引理1可知

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k+1} \geq & \sum_{i=1}^N q_i [(1 - \lambda_i)(A\bar{P}_k A^T + BQB^T) + \lambda_i BQB^T] = \\ & \sum_{i=1}^N q_i (1 - \lambda_i) A \bar{S}_k A^T + BQB^T = S_{k+1}, \end{aligned}$$

因此对于所有 $k > 0$, $\bar{P}_k \geq S_k$. 若 (\bar{A}, C_i) 稳定, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 序列 S_k 收敛, 其极限 \bar{S} 是Lyapunov方程 $X = \bar{A} X \bar{A}^T + BQB^T$ 的解, 当 $(\bar{A}, BQ^{\frac{1}{2}})$ 可控时Lyapunov方程存在一个正定解. 证毕.

3 临界到达概率(Critical arrival probability)

当系统不稳定时, 测量数据的丢失会使估计误差趋于无穷大^[3], 并且存在临界到达概率 $\lambda_c \in [0, 1)$, 当 $0 < \lambda \leq \lambda_c$ 且 $P_0 > 0$ 时, $E[P_k]_{k \rightarrow \infty} = +\infty$; $\lambda > \lambda_c$ 且 $P_0 > 0$ 时, 对任意 $k > 0$, 存在由 P_0 确定的矩阵 M_0 , 使得 $E[P_k] \leq M_0$. 对于基于传感器网络的远程估计器, 若各传感器数据到达概率均为 λ , 则有

定理 3 临界到达概率 λ_c 的边界 $\underline{\lambda} \leq \lambda_c \leq \bar{\lambda}$ 为
1) $\underline{\lambda} = \arg \inf_{\lambda} [\exists S | S = (1 - \lambda) A S A^T + BQB^T] = 1 - \frac{1}{\alpha^2}$, 其中 $\alpha = \max_i |\sigma_i|$, σ_i 是矩阵 A 的特征值.

$$2) \bar{\lambda} = \arg \inf_{\lambda} [\exists X | X > \bar{g}(X)].$$

证 1) 令 $\lambda_i = \lambda (i = 1, \dots, N)$, 由定理2可知, 要使迭代 $S = (1-\lambda)ASA^T + BQB^T$ 收敛, (A, C_i) 必须稳定, 即 $\max_i |\sigma_i(\bar{A})| < 1$. 令 $\alpha = \max_i |\sigma_i|$, 得到 $\lambda > 1 - \frac{1}{\alpha^2}$.

2) 直接由定理1的结论可以得到.

证毕.

定理 4 若 $(A, BQ^{\frac{1}{2}})$ 可控, (A, C_i) 可检测, 各传感器的选择概率满足 $\sum_{i=1}^N q_i = 1$. 则以下说法等价:

1) $\exists K_1, K_2, \dots, K_N, X$ 满足定理1.

2) $\exists K_1, K_2, \dots, K_N, X$ 使得 $X > \bar{\phi}(K_1, \dots, K_N, X)$

3) $\exists Z_1, Z_2, \dots, Z_N$ 和 $0 < Y \leq I$, 使得 $\Xi_{\lambda}(Y, Z_1, \dots, Z_N) > 0$. 其中:

$$\Xi_{\lambda}(Y, Z_1, \dots, Z_N) = \begin{bmatrix} Y & \Delta(Y, Z_1) \cdots \Delta(Y, Z_N) & \Pi(Y) \\ \Delta(Y, Z_1)^T & Y & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \Delta(Y, Z_N)^T & 0 & 0 & Y & 0 \\ \Pi(Y) & 0 & 0 & 0 & Y \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\Delta(Y, Z_i) = \sqrt{\lambda q_i}(YA + Z_i C_i),$$

$$Y = X^{-1}, Z_i = X^{-1} K_i.$$

证 1) $\Leftrightarrow 2)$. 由定理1及其证明过程得到.

2) $\Leftrightarrow 3)$. 根据 $\bar{\phi}(\cdot)$ 的定义, 若条件2)成立, 等价于 $X > (1-\lambda)AXA^T + BQB^T + \lambda K_i R K_i^T + \lambda \sum_{i=1}^N q_i (A + K_i C_i) X (A + K_i C_i)^T$.

令 $F_i = A + K_i C_i$, 由于 $BQB^T + \lambda K_i R K_i^T > 0$, 根据上式可以推得

$$X - (1-\lambda)AXA^T - \lambda \sum_{i=1}^N q_i F_i X F_i^T > 0,$$

两次利用Schur补得到^[9]

$$\begin{bmatrix} X & \sqrt{\lambda q_1} F_1 & \cdots & \sqrt{\lambda q_N} F_N & \sqrt{1-\lambda} A \\ \sqrt{\lambda q_1} F_1^T & X^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\lambda q_N} F_N^T & 0 & \cdots & X^{-1} & 0 \\ \sqrt{1-\lambda} A^T & 0 & \cdots & 0 & X^{-1} \end{bmatrix} > 0,$$

对以上矩阵不等式分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{X^{-1} \ 0 \ \dots \ 0\}$, 并令 $Y = X^{-1}$, $Z_i = X^{-1} K_i$, 由于 $\Xi_{\lambda}(\alpha Y, \alpha Z_1, \dots, \alpha Z_N) = \alpha \Xi_{\lambda}(Y, Z_1, \dots, Z_N)$, 限制 $Y \leq I$ 可得到式(9). 证毕.

推论 1 临界到达概率的上边界 $\bar{\lambda}$ 可以通过求解以下优化问题得到

$$\bar{\lambda} = \arg \min_{\lambda} \Xi_{\lambda}(Y, Z_1, \dots, Z_N) > 0, \ 0 < Y \leq I.$$

利用定理4和推论1可以分别求解临界到达概率的上边界 $\bar{\lambda}$ 和下边界 $\underline{\lambda}$.

4 仿真结果(Simulation results)

X - Y 平面中匀速运动的目标采用常速度模型(constant-velocity model)描述^[1,10]. 系统的状态向量为 $\mathbf{x} = [p_x, v_x, p_y, v_y]^T$, 其中 p_x 和 p_y 表示两个方向上的位置, v_x 和 v_y 表示速度. 系统矩阵为

$$A = \text{diag}\{A_v \ A_v\}, \ B = \text{diag}\{B_v \ B_v\},$$

其中:

$$A_v = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B_v = \begin{bmatrix} h^2/2 \\ h \end{bmatrix},$$

h 是采样步长, 当 $h = 0.2$ s 时系统噪声的协方差为

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0.25 & 1 \end{bmatrix},$$

采用两个传感器测量系统输出, 测量矩阵和测量噪声的协方差分别为

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 2.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \ R_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 1.4 \end{bmatrix}.$$

图1是当 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ 和 $\lambda_1 = 0.9, \lambda_2 = 0.8$ 时估计误差协方差的上边界. 采用矩阵的迹来描述矩阵的大小. 可以看到随着测量数据丢失, 状态估计误差变大. 图1中两个上边界都存在最小值, 对应的概率称为最优传感器选择概率. 采用梯度搜索算法求得上边界1的最优概率是0.37, 上边界2的最优概率为0.45.

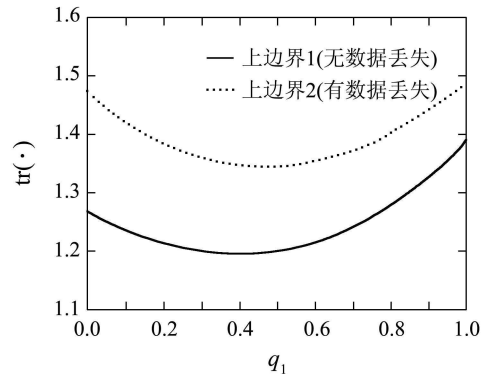


图1 测量数据丢失对误差边界的影响

Fig. 1 Effects of measurements dropping to error bounds

图2是在没有测量数据丢失时, 采用不同传感器选择概率得到的估计误差. 可以看到使用最优选择概率来规划传感器的选择序列, 估计器的性能是最优的.

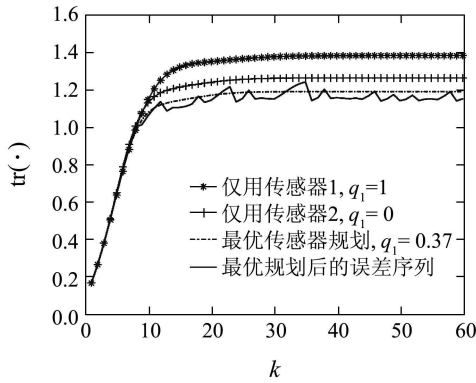


图2 不同传感器选择概率的误差边界
Fig. 2 Error bounds of different sensor selection probability

下例说明估计器的稳定性与临界到达概率的关系. 系统具有不稳定模态, 其系统矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 7 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}, B = [1 \ 1 \ 1]^T.$$

系统噪声的协方差为 $Q = 20 \times I_3$. 用两个传感器测量系统输出, $C_1 = C_2 = [1 \ 0 \ 2]$, 测量噪声的协方差分别为 $R_1 = 2.5$ 和 $R_2 = 3$. 假设测量数据到达估计器的概率相同. 由定理3得到临界到达概率的下边界 $\underline{\lambda} = 0.36$. 临界到达概率的上边界 $\bar{\lambda}$ 可以通过求解推论1的优化问题得到. 图3是估计误差的上下边界与数据到达概率关系图, 可以看到当测量数据的到达概率接近临界到达概率时, 估计误差将趋于无穷. 这与文献[3]中采用单传感器得到的临界概率是一致的, 即采用多传感器规划, 并不会改变临界到达概率.

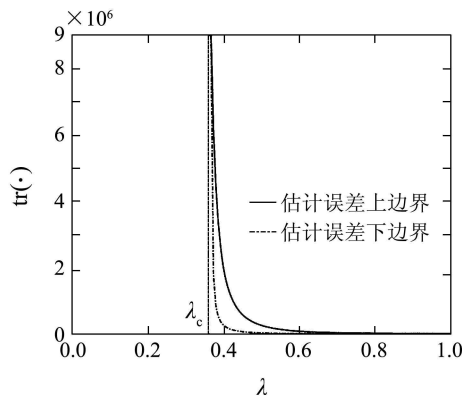


图3 临界到达概率与误差边界

Fig. 3 Critical arrival probability and error bounds

5 结论(Conclusions)

本文研究了传感器网络条件下的远程状态估计. 得到以下结论, 数据包丢失会使估计误差变大, 这时

要根据传感器的测量噪声、测量数据包的到达率确定传感器选择概率; 如果不稳定系统是可控和可检测的, 并且各传感器测量数据的到达概率相同, 则存在临界到达概率. 传感器测量数据到达概率大于临界到达概率时, 估计器的估计误差收敛, 否则估计误差将发散. 临界到达的概率的边界可以通过矩阵不等式方法求解.

参考文献(References):

- [1] GUPTA V, CHUNG T H, HASSIBI B, et al. On a stochastic sensor selection algorithm with applications in sensor scheduling and sensor coverage[J]. *Automatica*, 2006, 42(2): 251 – 260.
- [2] SIMTH S, SEILER P. Estimation with lossy measurements: jump estimators for jump systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(12): 2163 – 2171.
- [3] SINOPOLI B, SCHENATO L, et al. Kalman filtering with intermittent observations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1453 – 1464.
- [4] LIU X, GOLDSMITH A. Kalman Filtering with Partial Observation Losses[C] // *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2004: 4180 – 4186.
- [5] JIN Z, GUPTA V, HASSIBI B, et al. State estimation utilizing multiple description coding over lossy networks[C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*. New York, American: IEEE, 2005: 872 – 878.
- [6] HUANG M, DEY S. Stability of Kalman filtering with Markovian packet losses[J]. *Automatica*, 2007, 43(4): 598 – 607.
- [7] ASTROM K J, WITTENMARK B. *Computer Controlled Systems: Theory and Design*[M]. Third Edition. New York, American: Prentice Hall, 1997.
- [8] BERTSEKAS D P, NEDIC A, OZDAGLAR A E. *Convex Analysis and Optimization*[M]. Belmont, MA, American: Athena Scientific, 2003.
- [9] BOYD S, GHAOULI L E L, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*[M]. Philadelphia, PA, American: SIAM, 1994.
- [10] LI X R, JILKOV V P. Survey of maneuvering target tracking part I: dynamic models[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System*, 2003, 39(4): 1333 – 1363.

作者简介:

肖力 (1973—), 男, 讲师, 博士研究生, 目前研究方向为传感器网络与网络控制系统, E-mail: wh_xl@163.com;

孙志刚 (1969—), 男, 副教授, 目前研究方向为网络控制系统与实时信号处理, E-mail: zgsun@mail.hust.edu.cn;

胡晓娅 (1974—), 女, 讲师, 博士, 目前研究方向为无线网络通信与网络控制系统, E-mail: cindyhuxiaoya@sina.com;

陈绵云 (1937—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为不确定系统与一般系统理论, E-mail: mychen@mail.hust.edu.cn.