

基于谱分解的中立型时滞系统观测器

郝智红, 胡广大, 李华德, 祝 乔

(北京科技大学 信息工程学院, 北京 100083)

摘要: 针对线性中立型时滞系统, 利用线性算子半群的谱分解理论进行观测器设计. 在中立型项的范数小于一的条件下, 利用谱理论并结合投影算子, 将无穷维系统解的相空间分解为有限维不稳定广义特征子空间和无限维稳定子空间的直和. 进而利用线性算子半群的无穷小生成元得到具有积分微分形式的观测器方程, 并证明了观测器误差方程的渐近稳定性. 数值实验证实了所提设计方法的有效性.

关键词: 中立型时滞系统; 线性算子半群; 谱分解; 观测器

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Observer for neutral delay systems based on spectral decomposition

HAO Zhi-hong, HU Guang-da, LI Hua-de, ZHU Qiao

(School of Information Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: The observer design for linear neutral delay systems(NDSs) is investigated based on the spectral decomposition theory of linear operator semigroup. When the norm of the neutral term is less than one, by the spectral theory and projection operator, the infinite dimensional phase space of system solutions is decomposed into the direct sum of finite dimensional unstable generalized eigensubspace and the infinite dimensional stable subspace. The observer equation in integro-differential form of the system is obtained by the infinitesimal generator of linear operator semigroup; and the asymptotic stability of proposed observer error equation is proved. An illustrative example is used to demonstrate the validity of the proposed design approach.

Key words: neutral delay systems; linear operator semigroup; spectral decomposition; observer

1 引言(Introduction)

工程中时滞的存在会导致系统性能变差. 因此, 对其研究具有重要的理论价值和实际意义^[1~3].

目前, 研究主要集中于标准时滞系统, 由于中立型时滞系统的超越特征方程具有无穷根, 给研究带来难度. 中立型系统稳定化已取得一定进展^[4], 但结论和方法是在状态可观测的假设下得到的. 因此, 对状态不完全已知的中立型系统, 考虑其状态估计很有意义. 文献[5]针对中立型系统设计观测器, 但只与当前时刻输出有关. 文献[6]利用Lyapunov方法和线性矩阵不等式进行观测器设计. 然而, 由于模型变换可能引入的附加动态不稳定, 使结论有一定保守性.

本文针对具有有限个不稳定特征根的中立型时滞系统, 利用谱分解理论进行观测器设计, 该方法文献[7]中观测器设计对于中立型时滞系统的推广.

全文沿用如下记号: \mathbb{R}^n 表示 n 维实空间. $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ 表示将区间 $[-\tau, 0]$ 映入 \mathbb{R}^n 中的连续

函数所组成的Banach空间, 简记 $C_{n,\tau}$. $\text{Ker}(\cdot)$ 代表 (\cdot) 的零空间, $\mu[\cdot]$ 为矩阵测度, $\|\cdot\|$ 为矩阵范数.

2 系统描述(System statement)

针对线性中立型时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - G_1 \dot{x}(t - \tau) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau), \\ y(t) = Cx(t), \quad x(\xi) = \eta(\xi), \quad \forall \xi \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ 为输出向量, G_1, A_0, A_1 和 C 为适当维数的实常数矩阵, $\tau > 0$ 为时滞, $\eta(t) \in C_{n,\tau}$ 为初始函数. 系统特征方程为

$$\det(\lambda(I - G_1 e^{-\lambda\tau}) - A_0 - A_1 e^{-\lambda\tau}) = 0. \quad (2)$$

定义

$$E = \mu[A_0] + \|A_1\| + X,$$

$$F = \mu[-iA_0] + \|A_1\| + X.$$

其中

$$X = (\|G_1 A_0\| + \|G_1 A_1\|) / (1 - \|G_1\|).$$

引理 1^[1] 设 $\|G_1\| < 1$, λ 为系统(1)的特征根, 如果 $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, 且 $E \geq 0$, 则

$$0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq E \text{ 且 } -F \leq \operatorname{Im} \lambda \leq F. \quad (3)$$

注 1 一般中立型时滞系统特征方程是超越方程, 可能有无穷个不稳定特征根. 然而引理1表明, 若 $\|G_1\| < 1$, 则不稳定特征根个数有限, 且包含在有界闭区域内.

3 中立型时滞系统的谱分解(Spectral decomposition of NDSs)

设 $x_t(\xi) = x(t + \xi)$, $\xi \in [-\tau, 0]$, 定义 $P: C_{n,\tau} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Px_t(\xi) = x_t(0)$. 设初始函数 $\eta \in C_{n,\tau}$, 系统(1)存在唯一解 $x_t \in C_{n,\tau}$, 定义 $x_t = T(t)\eta$, $T(t)$ 为解算子且是强连续半群, $T(t)$ 的无穷小生成元为 A . 那么

$$A\phi(\xi) = \begin{cases} \frac{d\phi(\xi)}{d\xi}, & \xi \in [-\tau, 0), \\ A_0\phi(0) + A_1\phi(-\tau) + G_1\dot{\phi}(-\tau), & \xi = 0. \end{cases} \quad (4)$$

其定义域为

$$D(A) = \{\phi : \phi \in C_{n,\tau}, \dot{\phi} \in C_{n,\tau}, \dot{\phi}(0) = A_0\phi(0) + A_1\phi(-\tau) + G_1\dot{\phi}(-\tau)\}.$$

假设初始函数 $\eta \in D(A)$, 则系统(1)等价于

$$\frac{d}{dt}x_t = Ax_t, \quad x_0 = \eta. \quad (5)$$

定义如下双线性形式:

$$\begin{aligned} \langle \psi, \phi \rangle = & \psi(0)\phi(0) + \int_{-\tau}^0 \psi(\xi + \tau)A_1\phi(\xi)d\xi + \\ & \left[\frac{d}{d\theta} \int_{\theta}^0 \psi(\xi - \theta)G_1\phi(\xi)d\xi \right]_{\theta=-\tau}. \end{aligned} \quad (6)$$

式中: $\phi \in C_{n,\tau}$, $\psi \in C_{n,\tau}^*$, 其中 $C_{n,\tau}^* = C([0, \tau], \mathbb{R}^{n*})$.

设 $\sigma(A)$ 为 A 的谱, $C_\lambda(A) = \operatorname{Ker}((\lambda I - A)^{k_\lambda})$ 是 $C_{n,\tau}$ 的广义特征子空间, 其中 k_λ 为充分大整数.

注 2 当 λ 为复数时, 需要通过适当变换, 将这对复共轭特征根所确定广义特征空间的基向量实数化.

令 ϕ_λ 为 $C_\lambda(A)$ 的基, ψ_λ 为 $C_\lambda(A^*)$ 的基. 定义

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda &= [\phi_{\lambda_1}, \dots, \phi_{\lambda_N}], \\ \Psi_\lambda &= [\psi_{\lambda_1}, \dots, \psi_{\lambda_N}]^T, \quad \langle \Psi_\lambda, \Phi_\lambda \rangle = I. \end{aligned}$$

引理 2^[3] 假设 $\Lambda = \{\lambda : \lambda \in \sigma(A), \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$, 且 $C_+ \triangleq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda(A)$ 是 $C_{n,\tau}$ 的一个有限维子空间,

存在其补子空间 C_- , 使得 $C_{n,\tau}$ 被分解为

$$C_{n,\tau} = C_+ \oplus C_-. \quad (7)$$

其中 C_+ 和 C_- 是 A 和 $T(t)$ 的不变子空间.

从空间 $C_{n,\tau}$ 到子空间 C_+ 的投影算子为 P_Λ , 满足

$$P_\Lambda(\cdot) = \Phi_\Lambda \langle \Psi_\Lambda, \cdot \rangle. \quad (8)$$

引理 3^[3] 针对子空间 C_+ (基向量为 Φ_Λ), 存在矩阵 A_Λ , 使得 $A\Phi_\Lambda = \Phi_\Lambda A_\Lambda$, 其中 $\sigma(A_\Lambda) = \Lambda$.

定理 1 假设 x_t 是系统(1)的解, 因此根据式(7)可将 x_t 分解成 $x_t = x_t^1 + x_t^2$, 其中: $x_t^1 \in C_+$, $x_t^2 \in C_-$, 且 $x_t^1 = \Phi_\Lambda \langle \Psi_\Lambda, x_t \rangle$, 令 $x_1(t) = \langle \Psi_\Lambda, x_t \rangle$, 则有

$$\dot{x}_1(t) = A_\Lambda x_1(t), \quad x_1(0) = \langle \Psi_\Lambda, \eta \rangle, \quad (9)$$

$$y(t) = C_\Lambda x_1(t) + C_2 x_t^2. \quad (10)$$

这里:

$$C_\Lambda = C\Phi_\Lambda(0), \quad C_2 x_t^2 = CPx_t^2.$$

证 将式(5)两边进行投影 P_Λ 运算, 得

$$P_\Lambda \frac{d}{dt}x_t = P_\Lambda Ax_t.$$

因为

$$x_t = x_t^1 + x_t^2, \quad x_t^1 \in C_+, \quad x_t^2 \in C_-,$$

所以

$$Ax_t^1 \in C_+, \quad Ax_t^2 \in C_-,$$

并根据投影算子性质, 得

$$P_\Lambda Ax_t = P_\Lambda Ax_t^1 = Ax_t^1 = \Phi_\Lambda A_\Lambda x_1(t). \quad (11)$$

再根据投影算子 P_Λ 和双线性 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的定义, 得到

$$P_\Lambda \frac{d}{dt}x_t = \Phi_\Lambda \langle \Psi_\Lambda, \frac{d}{dt}x_t \rangle = \Phi_\Lambda \dot{x}_1(t). \quad (12)$$

综上, 式(9)得证. 并根据 $y(t) = Cx(t)$ 可得

$$y(t) = C\Phi_\Lambda(0)x_1(t) + CPx_t^2,$$

定义 $C_\Lambda = C\Phi_\Lambda(0)$, 且 $C_2 x_t^2 = CPx_t^2$, 式(10)得证. 证毕.

4 观测器设计(Observer design)

假设 (A_Λ, C_Λ) 可观测, 则存在常数矩阵 L , 使得

$$\sigma(A_\Lambda + LC_\Lambda) \subset C_-. \quad (13)$$

定义算子 $\tilde{L}: \mathbb{R}^q \rightarrow C_+$, 满足

$$\tilde{L}(y(t)) = \Phi_\Lambda Ly(t). \quad (14)$$

定义算子 $\tilde{A} = A + \tilde{L}CP$, 构造系统(5)的观测器方程

$$\frac{dz_t}{dt} = \tilde{A}z_t - \tilde{L}(y(t)), \quad z_0 = \gamma \in D(A). \quad (15)$$

z_t 为 x_t 的估计值. 根据 $\Phi_\Lambda Ly(t) = \Phi_\Lambda LCPx_t$, 可得

$$\Phi_\Lambda LCP = \tilde{L}CP. \tag{16}$$

因此

$$\tilde{A}z_t(\xi) = Az_t(\xi) + \Phi_\Lambda(\xi)LCz_t(0), \xi \in [-\tau, 0].$$

进一步地, 根据文中式(4), 可得

$$\tilde{A}z_t(\xi) = \begin{cases} \frac{dz_t(\xi)}{d\xi} + \Phi_\Lambda(\xi)LCz_t(0), & \xi \in [-\tau, 0), \\ A_0z_t(0) + A_1z_t(-\tau) + G_1\dot{z}_t(-\tau) + \Phi_\Lambda(0)LCz_t(0), & \xi = 0. \end{cases} \tag{17}$$

代式(17)到式(15)中, 令 $\tilde{z}(t, \xi) = z_t(\xi)$, $\xi \in [-\tau, 0]$ 可得

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{z}(t, \xi)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{z}(t, \xi)}{\partial \xi} + \Phi_\Lambda(\xi)L[C\tilde{z}(t, 0) - y(t)], & \xi \in [-\tau, 0), \\ A_0\tilde{z}(t, 0) + A_1\tilde{z}(t, -\tau) + G_1\dot{\tilde{z}}(t, -\tau) + \Phi_\Lambda(0)L[C\tilde{z}(t, 0) - y(t)], & \xi = 0. \end{cases} \tag{18}$$

令 $t + \xi = c$, 进而当 $\xi \in [-\tau, 0)$ 时:

$$\frac{d\tilde{z}}{d\xi}(c - \xi, \xi) = \Phi_\Lambda(\xi)L[y(c - \xi) - C\tilde{z}(c - \xi, 0)].$$

上式两边取 $[0, \theta]$ 上的积分, 令 $c = t + \theta$, 且 $\theta = -\tau$, 得

$$\tilde{z}(t, -\tau) = \int_0^\tau \Phi_\Lambda(\xi - \tau)L[C\tilde{z}(t - \xi, 0) - y(t - \xi)]d\xi + \tilde{z}(t - \tau, 0). \tag{19}$$

将式(19)代入式(18)第2个方程. 根据 $\tilde{z}(t, \xi) = z_t(\xi)$ 和 $\tilde{z}(t + \theta, 0) = z(t + \theta)$ 得

$$\tilde{z}(t, 0) = z(t), \tilde{z}(t - \tau, 0) = z(t - \tau).$$

进而得出式(15)的具体表达形式:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & A_0z(t) + \Phi_\Lambda(0)L[Cz(t) - y(t)] + \\ & A_1 \int_0^\tau \Phi_\Lambda(\xi - \tau)L[Cz(t - \xi) - y(t - \xi)]d\xi + \\ & G_1 \frac{d}{dt} \left(\int_0^\tau \Phi_\Lambda(\xi - \tau)L[Cz(t - \xi) - y(t - \xi)]d\xi \right) + A_1z(t - \tau) + G_1\dot{z}(t - \tau). \end{aligned} \tag{20}$$

定理 2 算子 \tilde{A} 是强连续渐近稳定半群的无穷小生成元, 观测方程(15)式渐近估计系统(5)的状态.

证 分析算子 $\tilde{L}CP$ 对子空间 C_+ 和 C_- 的影响.

针对 $x_t \in D(A)$, 根据式(11)及 \tilde{A} 的定义, 可得

$$P_\Lambda \tilde{A}x_t = \Phi_\Lambda(A_\Lambda + LC_\Lambda)x_1(t) + \Phi_\Lambda LC_2x_t^2. \tag{21}$$

根据式(21),

$$(I - P_\Lambda)\tilde{A}x_t = Ax_t^2 = (I - P_\Lambda)Ax_t.$$

上式表明算子 $\tilde{L}CP$ 对子空间 C_- 中的解没有影响. 而针对子空间 C_+ 中的投影, 由式(21)可得

$$\dot{x}_t^1 = \Phi_\Lambda(A_\Lambda + LC_\Lambda)x_1(t) + \Phi_\Lambda LC_2x_t^2.$$

化简可得

$$\dot{x}_1(t) = (A_\Lambda + LC_\Lambda)x_1(t) + LC_2x_t^2. \tag{22}$$

分析式(22), $(A_\Lambda + LC_\Lambda)$ 稳定, 由文献[2]可知, x_t^2 指数有界, 因此 $x_1(t)$ 指数有界. \tilde{A} 是强连续渐近稳定半群的无穷小生成元. 结合式(5)(15)得观测误差方程:

$$\frac{de_t}{dt} = \tilde{A}e_t, e_t = x_t - z_t, e_0 = \eta - \gamma \in D(A). \tag{23}$$

由 \tilde{A} 的稳定性可知当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e_t \rightarrow 0$.

证毕.

5 数值实验(Numerical example)

考虑不稳定中立型时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-1) + \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \dot{x}(t-1), \\ y(t) = [0 \ 1]x(t). \end{cases}$$

计算得 $\|G_1\| = 0.1$, $E = 3.1096$, $F = 2.4025$. $[0, E] \times [-F, F]$ 内的不稳定特征根为: $\lambda_1 = 1.0386$, $\lambda_{2,3} = 0.0444 \pm 1.5045i$. 进一步, 向量

$$\begin{cases} \phi_{\lambda_1}(\xi) = e^{1.0368\xi} \begin{bmatrix} 9.8734e^{-13} \\ 6.2556 \end{bmatrix}, \\ \phi_{\lambda_2}(\xi) = e^{0.0444\xi} \times \begin{bmatrix} 2\cos(1.5045\xi) \\ 0.8675\sin(1.5045\xi) - 0.6362\cos(1.5045\xi) \end{bmatrix}, \\ \phi_{\lambda_3}(\xi) = e^{0.0444\xi} \times \begin{bmatrix} -2\sin(1.5045\xi) \\ 0.6362\sin(1.5045\xi) + 0.8675\cos(1.5045\xi) \end{bmatrix} \end{cases}$$

构成子空间 $C_+ = \bigoplus_{i=1}^3 \text{Ker}(A - \lambda_i I)$, $\text{Re } \lambda_i \geq 0$,

$i = 1, 2, 3$ 的一个基. 进而可得实对角块型矩阵:

$$A_A = \begin{bmatrix} 1.0368 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0444 & 1.5045 \\ 0 & -1.5045 & 0.0444 \end{bmatrix},$$

$$C_A = [6.2556 \quad -0.6362 \quad 0.8675],$$

(C_A, A_A) 可观测, 因此得出

$$L = [-0.2709 \quad 1.7591 \quad -0.9357]^T.$$

通过以上数据可得观测器方程, 并经仿真可得状态估计误差曲线如图1所示. 图1表明了观测器误差方程的渐近稳定性.

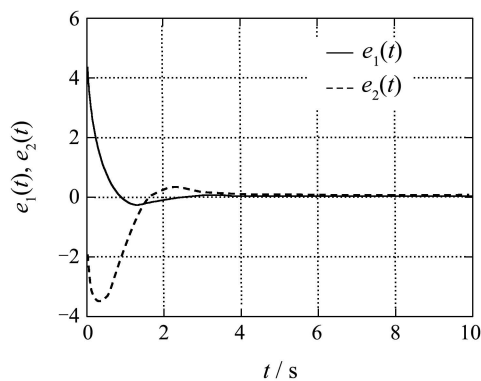


图1 状态估计误差 $e_1(t), e_2(t)$

Fig. 1 Estimated state errors $e_1(t), e_2(t)$

6 结论(Conclusion)

研究了基于算子半群谱分解的中立型时滞系统观测器. 通过系统解空间的相分解, 实现了有限维控

制方法解决无限维解空间的控制问题.

参考文献(References):

- [1] HU G D, LIU M Z. Stability criteria of linear neutral systems with multiple delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(4): 720 – 724.
- [2] HALE J K, VERDUYN LUNEL S M. Stability and control of feedback systems with time delays[J]. *International Journal of Systems Science*, 2003, 34(8): 497 – 504.
- [3] HALE J K. *Theory of Functional Differential Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [4] LIU X G, WU M, MARTIN R, et al. Stability analysis for neutral systems with mixed delays[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, 202(2): 478 – 497.
- [5] WANG Z D, LAM J, BURNHAM K J. Stability analysis and observer design for neutral delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 47(3): 478 – 483.
- [6] 张友, 翟丁, 刘满, 等. 时滞依赖型中立系统的观测器设计与镇定[J]. *控制理论与应用*, 2005, 22(5): 783 – 793.
(ZHANG You, ZHAI Ding, LIU Man, et al. Delay dependent observer design and observer based stabilization of linear neutral delay system[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(5): 783 – 793.)
- [7] BHAT K P M, KOIVO H N. An observer theory for time delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, 22(4): 266 – 269.

作者简介:

郝智红 (1980—), 女, 博士研究生, 研究方向为延时系统的控制理论, E-mail: ustbzh@yahoo.com.cn;

胡广大 (1962—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为延时系统的控制理论、非线性控制, E-mail: ghu@hit.edu.cn;

李华德 (1941—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为电力电子及电力传动, E-mail: lhd@ies.ustb.edu.cn;

祝乔 (1982—), 男, 博士生, 研究方向为延时系统的控制理论, E-mail: johnzon155@163.com.