

# 含随机穿越特征指标的离散系统满意估计问题

戚国庆<sup>1</sup>, 陈黎<sup>1</sup>, 王远钢<sup>2</sup>, 盛安冬<sup>1</sup>

(1. 南京理工大学自动化学院, 江苏南京 210094; 2. 南京理工大学理学院, 江苏南京 210094)

**摘要:** 当待估量的期望值是一个有界区域时, 对待估量穿越目的域边界问题进行了讨论. 通过对离散估计系统的区域极点、随机穿越特征量等指标的相容性进行分析, 给出了一种满足多指标要求的满意待机估计策略, 并设计了基于双线性矩阵不等式组(BMIs)的求解算法. 所给出的待机估计策略可保证待估量在目的域内平均滞留度满足一定的指标, 同时相对目的域边沿的平均穿越周期尽可能小, 从而达到了待估量在目的域内、外的时间分布更加均匀的目的. 数值算例说明了所设计的估计策略满足多指标要求.

**关键词:** 满意待机估计; 双线性矩阵不等式; 随机穿越特征量; 目的域

**中图分类号:** TP202      **文献标识码:** A

## Satisfactory estimation problem for discrete systems with stochastic passage characteristics index constraint

QI Guo-qing<sup>1</sup>, CHEN Li<sup>1</sup>, WANG Yuan-gang<sup>2</sup>, SHENG An-dong<sup>1</sup>

(1. School of Automation, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;

2. School of Sciences, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

**Abstract:** When the expectation value of an estimate is a finite area, the problem of stochastic passage over the target area boundary is discussed. By analyzing the consistency between the indices of the area pole and the stochastic passage characteristics of the discrete estimation system, we propose a satisfactory estimation strategy for opportunity-awaiting, which satisfies the requirements of multi indices; and develop the solution algorithm based-on bi-linear matrix inequalities(BMIs). The presented estimation strategy for opportunity-awaiting ensures the estimate to satisfy the index of average residence degree in the target area, and keeps the average traversing period over the target area boundary to be as small as possible. Therefore, the time distributions of the estimate being inside and outside the target area can be uniform as desired. Finally, the results are illustrated by a numerical example.

**Key words:** satisfactory opportunity awaiting estimation; bi-linear matrix inequalities; stochastic passage characteristics; target area

### 1 引言(Introduction)

工程系统中常常遇到对目标未来点的估计值需求非传统的一个动态点, 而是一个平面(或空间)区域, 例如在有激光随动测距的电视跟踪系统中, 需要不断预测未来目标的中心点位置, 并将估计量发送给激光伺服机构, 使激光轴指向目标<sup>[1]</sup>. 只有当激光光束落入目标有效反射区域(目标靶面, 或称目的域)时, 激光测距机方能获得测距回波, 进而实现对目标的跟踪. 要实现目标的平稳跟踪, 既要保证一定的激光回波率, 还必须使激光光束穿出有效反射区域后, 尽快地返回该区域, 以保持航路连续, 而不致使得航路中断, 贻误战机. 传统的最小方差估计只能满足估计误差方差单一指标的最优, 这容易导

致当待估量位于目的域内时, 会长时间滞留其中; 而一旦穿出目的域, 又会长时间滞留在其外. 为此, 需要设计一种估计策略, 在满足系统估计精度要求并保证待估量在目的域内平均滞留时间占总时间比率(平均滞留度<sup>[2]</sup>)达到一定指标的同时, 使待估量穿越目的域边沿的频率提高, 从而使得待估量在目的域内、外的时间分布更加均匀. 对上述光电跟踪系统则意味着在激光回波率较低时, 可使距离漏测的时间分布更加均匀, 从而能保证对目标的连续跟踪.

文献[2]在研究随机穿越特征量<sup>[3]</sup>指标的基础上开创了待机估计与控制问题. 待机问题源于随机振动问题<sup>[4]</sup>, 待机估计与待机控制是待机问题的两个子命题. 文献[2, 5, 6]先后给出了矩形与椭圆目的域

下的控制策略求解算法,文献[7]研究了待机控制中被控量在目的域内外的时间分布情况.文献[1]研究了基于图像跟踪的目标波门满意估计策略设计问题,但只考虑了平均滞留度指标.文献[8]研究了保证激光回波率的满意估计问题,但只讨论了一阶预测方差与激光连续漏测次数之间的关系.文献[9]讨论了连续系统中的待机估计问题.本文综合研究了待估量的滞留度和平均穿越周期指标,采用求解双线性矩阵不等式(BMI)的方法,给出了离散系统下满足多指标要求的待机估计策略的设计算法.所给出的待机估计策略既可保证待估量的平均滞留度满足一定的指标,又可使待估量在目的域内、外的时间分布更加均匀.

## 2 问题描述(Problem statement)

### 2.1 离散系统随机穿越特征量描述(Statement on stochastic passage characteristics of discrete system)

假定目的域  $\Omega$  为图1所示的矩形区域,其中中心  $O$  为目标预测中心,假定目标未来点服从以预测点为中心的正态分布.记目标现在点和预测点分别为  $\mathbf{Z}(k) = [x(k), y(k)]^T$ ,  $\hat{\mathbf{Z}}(k+1) = [\hat{x}(k+1), \hat{y}(k+1)]^T$ . 并假定  $x, y$  方向上的估计互不相关,则目标未来点  $\mathbf{Z}(k+1)$  可视为均值为  $\hat{\mathbf{Z}}(k+1)$ , 协方差为  $\text{diag}\{\sigma_x^2, \sigma_y^2\}$  的平稳2维各态历经随机序列,  $(\sigma_x^2, \sigma_y^2)$  为位置通道的预测误差方差. 相邻两次预测量  $\hat{\mathbf{Z}}(k), \hat{\mathbf{Z}}(k+1)$  之间稳态协方差阵满足下式<sup>[5]</sup>:

$$\text{Cov}[\hat{\mathbf{Z}}(k), \hat{\mathbf{Z}}(k+1)] = \begin{bmatrix} \gamma_x \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \gamma_y \sigma_y^2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中  $\gamma_x, \gamma_y$  分别为  $x, y$  方向上的相关系数. 根据正态分布假定,  $\mathbf{Z}(k)$  在  $\Omega$  内的平均滞留度为<sup>[5]</sup>

$$S_{in} = [\varphi(\bar{\sigma}_x^{-1}) - \varphi(-\bar{\sigma}_x^{-1})] [\varphi(\bar{\sigma}_y^{-1}) - \varphi(-\bar{\sigma}_y^{-1})], \quad (2)$$

其中:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x}{a}, \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y}{a}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

平均穿越周期  $T_{ch}$  为

$$T_{ch} = \frac{T}{S_{in} - f(-\bar{\sigma}_x^{-1}, \bar{\sigma}_x^{-1}, \gamma_x) f(-\bar{\sigma}_y^{-1}, \bar{\sigma}_y^{-1}, \gamma_y)}, \quad (3)$$

其中  $T$  为采样周期,

$$f(\mu_1, \mu_2, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mu_1}^{\mu_2} [\varphi(\frac{\mu_2 - zv}{\sqrt{1-v^2}}) - \varphi(\frac{\mu_1 - zv}{\sqrt{1-v^2}})] e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

平均滞留时间和平均待机时间分别为<sup>[2]</sup>

$$T_{in} = T_{ch} S_{in}, T_{out} = T_{ch} (1 - S_{in}). \quad (4)$$

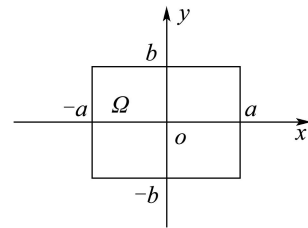
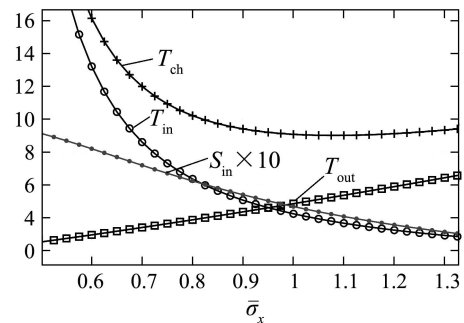


图1 以目标预测点为中心的坐标系

Fig. 1 Rectangular target area

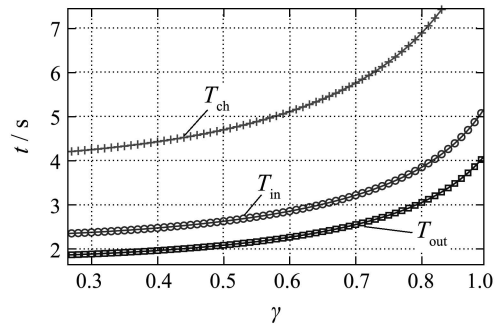
### 2.2 待机估计特征量分析(Analysis on opportunity awaiting estimation characteristics)

令  $\bar{\sigma}_x = k\bar{\sigma}_y$ , 由式(2)看出若取定  $k$  及  $a, b$  时,  $S_{in}$  仅随  $\sigma_x, \sigma_y$  增大而减小. 由式(3)(4)可见,  $T_{ch}, T_{in}, T_{out}$  的大小依赖于  $\gamma_x, \gamma_y$  及  $\sigma_x, \sigma_y$ . 令  $a = b, \gamma_x = \gamma_y = \gamma, k = 1$ , 则  $S_{in}, T_{ch}, T_{in}, T_{out}$  在  $\gamma$  一定而随  $\bar{\sigma}_x$  的变化曲线如图2(a)所示,  $T_{ch}, T_{in}, T_{out}$  在  $\bar{\sigma}_x$  一定而随  $\gamma$  的变化曲线如图2(b)所示.



$T_{ch}$ : 平均穿越周期/(秒);  $T_{in}$ : 滞留时间/(秒);  $T_{out}$ : 待机时间/(秒);  $S_{in}$ : 平均滞留度/(秒).

(a)



(b)

图2 随机穿越特征量变化曲线

Fig. 2 Curve of stochastic passage characteristics

实际工程中一般要求  $S_{in}$  不低于50%, 而由图2(a)可知当  $S_{in} < 50\%$  时, 恰是  $T_{ch}$  的下降段, 因此在  $T_{ch}$  单调下降区间上研究本文的问题是有意义的. 本文的研究目的是在保证一定滞留度的条件下, 使待估量相对目的域的平均穿越周期尽可能小, 因此只需在保证一定  $\bar{\sigma}_x$  的情况下尽量减小  $\gamma$  即可.

**2.3 问题数学描述(Mathematical statement of the problem)**

对  $x, y$  两个方向解耦处理, 设系统状态变量为

$$\mathbf{X}(k) = (x(k), \dot{x}(k), \mathbf{X}_r^T)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

其中:  $\mathbf{X}_r \in \mathbb{R}^{(n-2)}$ ,  $\mathbb{R}^n$  为  $n$  维实数空间. 设状态方程与测量方程为

$$\begin{cases} \mathbf{X}(k+1) = \Phi \mathbf{X}(k) + \mathbf{w}(k), \\ Y(k) = \mathbf{H} \mathbf{X}(k) + v(k). \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $\mathbf{H} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]_n$ ,  $\mathbf{w}(k), v(k)$  分别为均值为零、方差为  $W, V$  的不相关高斯白噪声序列,  $(\Phi, \mathbf{H})$  为完全可观测对. 已知随机初始状态的统计特性为

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{X}(0)\} &= \mathbf{X}_0, \text{Var}\{\mathbf{X}(0)\} = P_0, \\ \text{Cov}\{\mathbf{X}(0), \mathbf{w}(k)\} &= 0, \\ \text{Cov}\{\mathbf{X}(0), v(k)\} &= 0. \end{aligned}$$

设计如下离散形式预测器:

$$\hat{\mathbf{X}}(k+1) = \Phi \hat{\mathbf{X}}(k) + \mathbf{K}[Y(k) - \mathbf{H} \hat{\mathbf{X}}(k)], \quad (7)$$

其中  $\mathbf{K}$  为待求的预测增益, 预测误差方程为

$$\tilde{\mathbf{X}}(k+1) = [\Phi - \mathbf{K}\mathbf{H}]\tilde{\mathbf{X}}(k) - \mathbf{K}v(k) + \mathbf{w}(k). \quad (8)$$

若存在增益阵  $\mathbf{K}$  使得  $\Phi - \mathbf{K}\mathbf{H}$  稳定, 则稳态预测误差方差  $P$  是如下离散 Lyapunov 方程的唯一正定解

$$L(P, \mathbf{K}) = (\Phi - \mathbf{K}\mathbf{H})P(\Phi - \mathbf{K}\mathbf{H})^T + \mathbf{K}V\mathbf{K}^T + W - P, \quad (9)$$

则相关系数  $\gamma$  为<sup>[5]</sup>

$$\gamma = \mathbf{e}_1 P \mathbf{e}_2^T / (\mathbf{e}_1 P \mathbf{e}_1^T), \quad (10)$$

其中:  $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]_n$ ,  $\mathbf{e}_2 = [0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0]_n$ .

本文的目标是解决如下问题:

**问题 1** 寻找预测增益阵  $\mathbf{K}$ , 使得误差系统(8)在约束 1) 2) 下, 使待估量  $\mathbf{Z}(k)$  对目的域  $\Omega$  的平均穿越周期尽可能小,

1) 矩阵  $\Phi - \mathbf{K}\mathbf{H}$  的极点集  $\Lambda(\Phi - \mathbf{K}\mathbf{H}) \subset D(0, l)$ ;

2)  $\mathbf{Z}(k)$  在目的域  $\Omega$  内的平均滞留度  $S_{\text{in}} > \tau$ .

其中  $D(0, l)$  为复平面上中心在坐标原点, 半径为  $l (0 < l < 1)$  的开圆盘,  $\tau$  为给定正数.

**3 主要结论(Main results)**

**引理 1** 误差系统(8)存在估计增益  $\mathbf{K}$  使得约束 1) 成立, 当且仅当矩阵变量  $(Q_1, Q_2, \mathbf{K})$  的如下双线性矩阵不等式组(BMIs)

$$(\Phi - \mathbf{K}\mathbf{H})Q_1(\Phi - \mathbf{K}\mathbf{H})^T - l^2 Q_1 < 0, \quad (11)$$

$$L(Q_2, \mathbf{K}) < 0, \quad (12)$$

$$Q_1 > 0, Q_2 > 0 \quad (13)$$

有解, 且若  $(Q_1, Q_2, \mathbf{K})$  是上述不等式组的任一解, 则  $\mathbf{K}$  作为估计增益必使误差系统(7)的稳态状态方差阵  $P$  满足关系:  $P \leq Q_2$ . 而满足约束 1) 的所有估计增益  $\mathbf{K}$  相应的稳态方差阵的下确界  $P_l$  可通过对式(11)~(13)求解极值问题  $\text{Min}\{\text{tr}(Q_2)\}$  得到<sup>[10]</sup>.

当给定平均滞留度指标  $\tau$  时, 可由式(2)获得一个位置分量方差上界指标  $\sigma_\tau$ . 易见, 只有当  $\sigma_\tau^2 > \mathbf{H}P_l\mathbf{H}^T$  时, 问题 1 的研究是有意义的, 否则无法找到与约束 1) 相容的平均滞留度指标  $\tau$ . 因此滞留度指标亦可转变为对估计误差方差上界的约束, 即

$$\mathbf{H}Q_2\mathbf{H}^T < \sigma_\tau^2. \quad (14)$$

不等式(14)与不等式(11)~(13)联立, 若存在可行解  $(Q_1, Q_2, \mathbf{K})$ , 则  $\mathbf{K}$  是一个使误差系统(8)满足约束 1), 2) 的预测增益阵. 通过引理 1 求解得到的可行解  $Q_2$  与稳态预测方差阵  $P$  可能不满足等式关系  $\mathbf{e}_1 P \mathbf{e}_2^T / (\mathbf{e}_1 P \mathbf{e}_1^T) = \mathbf{e}_1 Q_2 \mathbf{e}_2^T / (\mathbf{e}_1 Q_2 \mathbf{e}_1^T)$ , 这会造成在矩阵不等式求解中难于约束  $\gamma$ , 为此引入如下定理.

**定理 1** 若存在预测增益  $\mathbf{K}$  使得误差系统(8)渐近稳定, 则  $\mathbf{K}$  所对应的稳态误差方差阵  $P$  可通过对关于标量  $m > 0$  及矩阵变量  $Q > 0$  的如下不等式组:

$$L(Q, \mathbf{K}) > -mI, \quad (15)$$

$$L(Q, \mathbf{K}) < mI, \quad (16)$$

求解极值问题  $\text{Min}(m)$  得到. 其中  $I$  为适维单位阵.

**证** 由 Lyapunov 单调性可证得定理结论.

证毕.

如下推论给出了求解问题 1 的指导思想.

**推论 1** 对关于变量  $(Q_1, Q_2, \mathbf{K}, m)$  如下 BMIs:

$$(\Phi - \mathbf{K}\mathbf{H})Q_1(\Phi - \mathbf{K}\mathbf{H})^T - l^2 Q_1 < 0, \quad (17)$$

$$L(Q_2, \mathbf{K}) > -mI, \quad (18)$$

$$L(Q_2, \mathbf{K}) < mI, \quad (19)$$

$$\mathbf{H}Q_2\mathbf{H}^T < \sigma_\tau^2, \quad (20)$$

$$Q_1 > 0, Q_2 > 0. \quad (21)$$

同时求解约束极值问题  $\text{Max}(Q_2), \text{Min}(m), \text{Min}\{\mathbf{e}_1 Q_2 \mathbf{e}_2^T / (\mathbf{e}_1 Q_2 \mathbf{e}_1^T)\}$ , 若解  $(Q_1, Q_2, \mathbf{K})$  存在, 则预测增益阵  $\mathbf{K}$  为满足问题 1 的解.

#### 4 满意待机估计策略的求解(Solution of satisfactory opportunity awaiting estimation strategy)

显然双线性矩阵不等式组(17)~(21)是不便于利用MATLAB-TOOLBOX中的LMI工具箱求解的,需要对其进行适当处理. 根据文献[11],式(17)成立的充分条件是如下关于矩阵变量( $Q_1, \mathbf{K}$ )的线性矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} -lQ_1 + \Gamma(\mathbf{K}, S) & * & * \\ (\Phi Q_1)^T & -lQ_1 + \Xi(Q_1, \tilde{Q}_1) & * \\ \mathbf{H}^T \mathbf{K}^T & -Q_1 & -I \end{bmatrix}, \quad (22)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{K}, S) &= -\mathbf{KHS}^T - \mathbf{SH}^T \mathbf{K}^T + \mathbf{SS}^T, \\ \Xi(Q_1, \tilde{Q}_1) &= -Q_1 \tilde{Q}_1^T - \tilde{Q}_1 Q_1 + \tilde{Q}_1 \tilde{Q}_1^T. \end{aligned}$$

$S, \tilde{Q}_1$ 为维数适当的矩阵. 于是式(17)转化成为线性矩阵不等式.

根据文献[12, 13], 采用摄动法, 在 $\mathbf{e}_1 Q_{2(k+1)} \mathbf{e}_2^T / [\mathbf{e}_1 Q_{2(k+1)} \mathbf{e}_1^T] < \gamma_k$ 约束下, 通过寻找通路 $Q_{2(k+1)} = Q_{2k} + \delta Q_2$ , 实现对式(18) (19)的线性化, 其中 $\mathbf{e}_1 \delta Q_2 \mathbf{e}_1^T > 0$ ,  $\gamma_k = \mathbf{e}_1 Q_{2k} \mathbf{e}_2^T / (\mathbf{e}_1 Q_{2k} \mathbf{e}_1^T)$ , 同时对 $\mathbf{K}$ 作微小摄动:  $\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{K}_k + \delta \mathbf{K}$ . 于是式(18)可转化为

$$\begin{aligned} &(\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \delta Q_2 (\delta \mathbf{K} \mathbf{H})^T + \\ &\delta \mathbf{K} \mathbf{H} \delta Q_2 (\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T - \\ &\delta \mathbf{K} \mathbf{H} \delta Q_2 (\delta \mathbf{K} \mathbf{H})^T + \eta_1 (\delta \mathbf{K}, \delta Q_2) - \\ &\delta \mathbf{K} (\mathbf{H} Q_{2k} \mathbf{H}^T + V) \delta \mathbf{K}^T < 0, \end{aligned} \quad (23)$$

而式(19)可转化为

$$\begin{aligned} &-(\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \delta Q_2 (\delta \mathbf{K} \mathbf{H})^T - \\ &\delta \mathbf{K} \mathbf{H} \delta Q_2 (\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T + \\ &\delta \mathbf{K} \mathbf{H} \delta Q_2 (\delta \mathbf{K} \mathbf{H})^T + \eta_2 (\delta \mathbf{K}, \delta Q_2) + \\ &\delta \mathbf{K} (\mathbf{H} Q_{2k} \mathbf{H}^T + V) \delta \mathbf{K}^T < 0, \end{aligned} \quad (24)$$

其中:

$$\begin{aligned} \eta_1 (\delta \mathbf{K}, \delta Q_2) &= -\rho (\delta \mathbf{K}, \delta Q_2) - mI, \\ \rho (\delta \mathbf{K}, \delta Q_2) &= \\ &(\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) Q_{2k} (\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T - \\ &Q_{2k} + (\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \delta Q_2 (\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T - \delta Q_2 - \\ &\delta \mathbf{K} \mathbf{H} Q_{2k} (\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T - \\ &(\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) Q_{2k} (\delta \mathbf{K} \mathbf{H})^T + \\ &\mathbf{K}_k V \delta \mathbf{K}^T + \delta \mathbf{K} V \mathbf{K}_k^T + W + \mathbf{K}_k V \mathbf{K}_k^T, \end{aligned}$$

$$\eta_2 (\delta \mathbf{K}, \delta Q_2) = \rho (\delta \mathbf{K}, \delta Q_2) - mI.$$

矩阵不等式(23) (24)中存在非线性项 $(\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \delta Q_2 (\delta \mathbf{K} \mathbf{H})^T$ ,  $\delta \mathbf{K} \mathbf{H} \delta Q_2 (\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T$ , 不便于利用Schur补引理转化成线性矩阵不等式的形式. 为此引入如下结论

$$MN^T + NM^T \leq MM^T + NN^T, \quad (25)$$

利用式(25), 并忽略高阶无穷小项, (23)(24)将分别化为转化如下关于 $\delta Q_2, \delta \mathbf{K}, m$ 的矩阵不等式

$$\begin{aligned} &\delta \mathbf{K} \mathbf{H} (\delta \mathbf{K} \mathbf{H})^T + (\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \delta Q_2 \delta Q_2 (\Phi - \\ &\mathbf{K}_k \mathbf{H})^T - \delta \mathbf{K} (\mathbf{H} Q_{2k} \mathbf{H}^T + V) \delta \mathbf{K}^T + \\ &\eta_1 (\delta \mathbf{K}, \delta Q_2) < 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &\delta \mathbf{K} \mathbf{H} (\delta \mathbf{K} \mathbf{H})^T + (\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \delta Q_2 \delta Q_2 (\Phi - \\ &\mathbf{K}_k \mathbf{H})^T + \delta \mathbf{K} (\mathbf{H} Q_{2k} \mathbf{H}^T + V) \delta \mathbf{K}^T + \\ &\eta_2 (\delta \mathbf{K}, \delta Q_2) < 0. \end{aligned} \quad (27)$$

为降低保守性, 式(25)中 $M, N$ 应尽可能接近, 或它们的迹均非常微小. 式(26)中还存在一个负定二次型项 $-\delta \mathbf{K} (\mathbf{H} Q_{2k} \mathbf{H}^T + V) \delta \mathbf{K}^T$ , 为消除该项, 令

$$M_1 M_1^T = \mathbf{H} Q_{2k} \mathbf{H}^T + V. \quad (28)$$

再根据文献[11], 并令

$$\begin{aligned} \Theta (\delta \mathbf{K}, M_2) &= \\ &-\delta \mathbf{K} M_1 M_2^T - M_2 M_1^T \delta \mathbf{K}^T + M_2 M_2^T, \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $M_2$ 为任意适维矩阵, 则式(27)成立的充分条件是如下不等式成立:

$$\begin{aligned} &\delta \mathbf{K} \mathbf{H} (\delta \mathbf{K} \mathbf{H})^T + [\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H}] \delta Q_2 \delta Q_2^T [\Phi - \\ &\mathbf{K}_k \mathbf{H}]^T + \Theta (\delta \mathbf{K}, M_2) + \eta_2 (\delta \mathbf{K}, \delta Q_2) < 0, \end{aligned} \quad (30)$$

此时可以利用Schur补引理将式(27)和式(30)转化为关于矩阵变量 $(\delta Q_2, \delta \mathbf{K})$ 的线性矩阵不等式.

下面给出求解满足问题1的满意预测增益的步骤.

##### 算法 1

**Step 1** 利用引理1, 令 $Q_1 = Q_2$ , 求解极值问题 $\text{Min}\{\text{tr}(Q_2)\}$ , 可得到稳态预测增益 $\mathbf{K}_l$ 及相应的稳态预测方差阵 $P_l$ , 令

$$\begin{aligned} Q_{20} &= P_l, \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_l, \\ \tilde{Q}_1 &= P_l, \delta \mathbf{K} = 0, S = \mathbf{K}_l \mathbf{H}, \\ M_1 &= \sqrt{\mathbf{H} P_l \mathbf{H}^T + V}, M_2 = \delta \mathbf{K} M_1, \\ \gamma_0 &= \mathbf{e}_1 Q_{20} \mathbf{e}_2^T / [\mathbf{e}_1 Q_{20} \mathbf{e}_1^T], \end{aligned}$$

置迭代次数 $k = 0$ ;

**Step 2** 求解式(22)及如下线性矩阵不等式组的约束极小值问题:

$$\text{Min}\{m\} : (m, Q_1, \delta Q_2, \delta \mathbf{K})$$

$$\begin{bmatrix} \Theta(\delta \mathbf{K}, M_2) + \eta_2(\delta \mathbf{K}, \delta Q_2) & * & * \\ (\delta \mathbf{K} \mathbf{H})^T & -I & * \\ \delta Q_2(\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T & 0 & -I \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} \eta_1(\delta \mathbf{K}, \delta Q_2) & * & * \\ (\delta \mathbf{K} \Psi)^T & -\Psi & * \\ \delta Q_2(\Phi - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T & 0 & -I \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\delta Q_2 > 0, Q_1 > 0, m > 0, \quad (33)$$

$$\mathbf{e}_1(Q_{2k} + \delta Q_2)\mathbf{e}_2^T / [\mathbf{e}_1(Q_{2k} + \delta Q_2)\mathbf{e}_1^T] < \gamma_k, \quad (34)$$

$$\delta \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{K}^T < \lambda I, \delta Q_2 \cdot \delta Q_2^T < \lambda Q_{2k}, \quad (35)$$

$$\mathbf{H}(Q_{2k} + \delta Q_2)\mathbf{H}^T < \sigma_\tau^2. \quad (36)$$

其中  $I$  为适维单位阵,  $\lambda$  为一微小正实数(如  $\lambda < 0.4$ ),

$$\Psi = \mathbf{H} \mathbf{H}^T + V + \mathbf{H} Q_{2k} \mathbf{H}^T.$$

若解  $(m, Q_1, \delta Q_2, \delta \mathbf{K})$  存在, 令  $\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{K}_k + \delta \mathbf{K}$ , 记  $\mathbf{K}_{k+1}$  所对应的稳态方差阵为  $P_{k+1}$ . 若  $P_{k+1}$  满足  $\mathbf{H} P_{k+1} \mathbf{H}^T < \sigma_\tau^T$ , 则令

$$Q_{2(k+1)} = Q_{2k} + \delta Q_2,$$

$$S = \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}, \tilde{Q}_1 = Q_1,$$

$$M_1 = \sqrt{\mathbf{H} Q_{2(k+1)} \mathbf{H}^T + V}, M_2 = \delta \mathbf{K} M_1,$$

$$\gamma_{k+1} = \mathbf{e}_1 Q_{2(k+1)} \mathbf{e}_2^T / [\mathbf{e}_1 Q_{2(k+1)} \mathbf{e}_1^T],$$

$$k \leftarrow k + 1,$$

重新计算 Step2; 如果  $\mathbf{H} P_{k+1} \mathbf{H}^T \geq \sigma_\tau^T$ , 则令  $\mathbf{K}_u = \mathbf{K}_k$ , 终止计算. 得到的  $\mathbf{K}_u$  为满足问题 1 的满意预测增益.

### 5 数值算例(Numerical example)

设系统参数

$$a = b = 8,$$

$$\mathbf{X}(k) = [x(k), \dot{x}(k), \ddot{x}(k)]^T,$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T = 1 \text{ s}, \mathbf{H} = [1 \ 0 \ 0]^T, V = 16,$$

$$l = 0.9, \tau = 0.5,$$

由式(2)得到  $\sigma_{\tau x} = \sigma_{\tau y} = 7.619$ . 由算法 1 的 Step1 得满意增益

$$\mathbf{K}_l = [1.362 \ 0.6524 \ 0.1491]^T,$$

相应稳态预测方差阵为

$$P_l = \begin{bmatrix} 45.5027 & 28.0318 & 7.9383 \\ 28.0318 & 23.2893 & 7.5985 \\ 7.9383 & 7.5985 & 4.5596 \end{bmatrix},$$

显然此时的滞留度指标与区域极点指标是相容的. 此时相关系数为  $\hat{\gamma} = 0.6160$ , 平均滞留度为  $\hat{S}_{in} = 0.5843$ , 平均穿越周期  $\hat{T}_{ch} = 5.3160$ . 令误差方差上界指标  $\sigma_\tau^2 = 7.619^2 = 58.0492$ . 再由算法 1, 迭代 22 次, 解得满意预测增益阵

$$\mathbf{K}_u = [1.6362 \ 0.731 \ 0.1892]^T,$$

相应的稳态预测方差为

$$P_u = \begin{bmatrix} 53.9013 & 31.3557 & 9.2544 \\ 31.3557 & 24.7226 & 8.1195 \\ 9.2544 & 8.1195 & 4.7813 \end{bmatrix},$$

$(\Phi - \mathbf{K}_u \mathbf{H})$  的极点位于  $(0.0004, 0.6817 \pm 0.2965i)$ , 此时的相关系数为  $\gamma = 0.5817$ , 满意平均滞留度为  $S_{in} = 0.5244$ , 满意平均穿越周期为  $T_{ch} = 4.9363 < \hat{T}_{ch}$ ,  $\mathbf{K}_u$  即为满足问题 1 的预测增益.

### 6 结论(Conclusions)

本文以一类具有激光测距的目标跟踪系统为例, 研究了离散系统中具有有限目的域下的满意待机估计问题, 通过求解双线性矩阵不等式组, 获得了满足多指标要求的满意待机估计策略. 数值算例表明, 所设计的估计策略可在待估量相对目的域保持一定滞留度的前提下, 增大其穿越目的域边沿的频率, 工程上则表现为, 可使得激光测距设备的距离漏测在时间上分布更加均匀, 而不是集中的聚在一段时间区域, 从而保证对目标的连续跟踪, 因此本文所提供的设计算法可为工程人员在系统参数设定上提供一定的参考依据.

### 参考文献(References):

- [1] 程相权, 王远钢, 郭治. 满足滞留度指标的图像波门预测技术研究[J]. 南京理工大学学报(自然科学版), 2001, 25(4): 346 - 348. (CHENG Xiangquan, WANG Yuangang, GUO Zhi. Prediction study of tracking window with specified residence index[J]. *Journal of Nanjing University of Science and Technology(Natural Science)*, 2001, 25(4): 346 - 348.)
- [2] GUO Z. Opportunity-awaiting control-One new study field in stochastic control theory[C] // *Proceedings of the 4th International Conference on Control and Automation*. Montreal, Canada: IEEE, 2003: 340 - 344.
- [3] 胡金春, 郭治. 未来空域窗的数学描述[J]. 兵工学报, 1998, 19(4): 293 - 297. (HU Jinchun, GUO Zhi. Mathematical description of future airspace window(FAW)[J]. *Acta Armamentaria II*, 1998, 19(4): 293 - 297.)
- [4] 李俊瑞, 徐伟. 随机 Rayleigh 振子的首次穿越和最优控制[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(6): 954 - 958.

- (LI Jiaorui, XU Wei. First-passage failure and optimal control of stochastic Rayleigh oscillator[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(6): 954 – 958.)
- [5] WU Q, GUO Z. Opportunity awaiting control for linear discrete system[C] // *Proceedings of the 24th Chinese Control Conference*. Guangzhou, China: Printing House of South China University of Technology, 2005: 15 – 18.
- [6] GUO Z, WU Q, BO Y M. Opportunity-awaiting control strategy on elliptic objective area[C] // *Proceedings of 2004 IASTED International Conference on Intelligent System Control*. Anaheim, CA: Acta Press, 2004: 180 – 186.
- [7] JUN W, GUO Z. The Estimation for the distribution of residence time under interval objective domain[C] // *Proceedings of 2008 China Control and Decision Conference*. Shenyang, China: Printing House of China Northeast University, 2008: 5154 – 5158.
- [8] 程相权, 郭治, 王远钢. 满意估计下的激光回波率研究[J]. *兵工学报*, 2002, 23(3): 332 – 335.  
(CHENG Xiangquan, GUO Zhi, WANG Yuangang. A study on laser echo rate based on satisfaction estimation[J]. *Acta Armamentar II*, 2002, 23(3): 332 – 335.)
- [9] 戚国庆, 张蛟, 李显峰. 随机穿越特征指标下的满意激光回波问题[J]. *激光技术*, 2007, 30(1): 109 – 112.  
(QI Guoqing, ZHANG Jiao, LI Xianfeng. The satisfactory laser echo rate under stochastic passage characteristics indices[J]. *Laser Technology*, 2007, 30(1): 109 – 112.)
- [10] 王远钢. 满意控制及其期望指标的相容性理论[D]. 南京: 南京理工大学, 2000.  
(WANG Yuangang. *Satisfactory control and consistency theory of desired indices*[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2000.)
- [11] TAKASHI S, TAKAO F. Multiobjective control design via successive over-bounding of quadratic terms[C] // *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney, Australia: IEEE, 2000: 2763 – 2768.
- [12] ARASH H, JONATHAN H, STEPHEN B. A path-following method for solving BMI problems in control[C] // *Proceedings of the 1999 American Control Conference*. San Diego, CA, USA: IEEE, 1999: 1385 – 1389.
- [13] 陈东彦, 侯玲. 摄动离散矩阵Lyapunov方程解的估计[J]. *控制理论与应用*, 2006, 23(5): 830 – 832.  
(CHEN Dongyan, HOU ling. On the estimation of solutions to perturbed discrete matrix Lyapunov equations[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(5): 830 – 832.)

### 作者简介:

**戚国庆** (1977—), 男, 南京理工大学自动化学院讲师, 主要研究领域为随机估计与多传感器数据融合, E-mail: qiguqing@mail.njust.edu.cn;

**陈黎** (1981—), 男, 南京理工大学自动化学院博士生, 主要研究领域为机动目标跟踪与多传感器数据融合, E-mail: hncschenli@126.com;

**王远钢** (1964—), 男, 南京理工大学理学院副教授, 博士, 主要研究领域为控制系统期望指标集的相容性、随机系统的满意控制与估计, E-mail: ygwangzhu@hotmail.com;

**盛安冬** (1964—), 男, 南京理工大学自动化学院研究员, 博士生导师, 主要研究领域为多源信息融合理论及应用、机动目标跟踪、非线性估计理论及应用、现代火控理论及应用, E-mail: shengandong@mail.njust.edu.cn.