第 26 卷第 9 期
2009 年 9 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 26 No. 9
Sept. 2009

文章编号: 1000−8152(2009)09−1035−06

不确定广义大系统分散鲁棒$\mathbf{H}_\infty$保性能控制

沃松林[1], 史国栋[1], 邹 云[2]

(1. 江苏技术师范学院 电气信息工程学院, 江苏 常州 213001; 2. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094)

摘要: 针对一类状态矩阵和控制矩阵存在参数不确定的广义大系统, 研究其分散鲁棒H_∞保性能控制问题, 系统中不确定项具有数值界, 可不满足匹配条件. 基于广义系统的有界实引理, 应用线性矩阵不等式(LMI)方法, 给出了不确定广义大系统存在分散鲁棒H_∞ 保性能控制器的一个LMI条件, 并用这个线性矩阵不等式系统的可行解提供了一组分散鲁棒H_∞保性能控制律的参数化表示, 最后用例子说明该方法的应用.

关键词: 分散鲁棒H_∞控制; 不确定性; 保性能控制; 线性矩阵不等式.

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Decentralized robust H-infinity and cost-guaranteed control for uncertain singular large-scale systems

WO Song-lin[1], SHI Guo-dong[1], ZOU Yun[2]

(1. School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu Teachers University of Technology, Changzhou Jiangsu 213001, China; 2. School of Automation, Nanjing University Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

Abstract: The decentralized robust H-infinity and cost-guaranteed control problem for singular large-scale systems with uncertainty in states and control matrices is considered. The uncertainty is magnitude-bounded, but may violate the so-called matching conditions. Based on the bounded real lemma of singular systems, a sufficient condition for the existence of decentralized robust H-infinity and cost-guaranteed controller for uncertain singular large-scale systems is presented in terms of the solvability to a certain system of linear matrix inequalities (LMI). The feasible solutions to this system of LMIs provide a parameterized expression for the set of decentralized robust H-infinity and cost-guaranteed controller. The given example shows the application of the method.

Key words: decentralized H-infinity control; uncertainty; guaranteed cost control; linear matrix inequality (LMI)

1 引言(Introduction)

近年来, 不确定大系统鲁棒镇定的集中控制的研究已经取得了不少结果, 但随着实际生产过程中系统复杂性的增加(即系统维数很高时), 集中控制方法表现出了很大的局限性, 于是不少学者研究了大系统的分散控制问题. 文献[1∼7]研究了不确定大系统分散鲁棒控制问题, 文献[1∼5]研究了不确定大系统分散鲁棒状态反馈控制问题; 文献[6,7]不确定关联大系统分散鲁棒输出反馈控制. 然而由于广义系统有较为实际的背景, 它能更好地描述实际生产过程, 因而对不确定组合广义大系统的控制问题研究的意义就更明显. 不确定性广义大系统分散鲁棒控制问题已引起了控制界的重视[8∼12]. 文献[8,9]用LMI方法研究了不确定广义大系统鲁棒分散状态反馈控制问题; 而对不确定广义大系统分散鲁棒H_∞控制的研究才刚刚开始, 文献[10]应用Ricatti方法研究了具有对称结构的不确定广义大系统分散鲁棒H_∞控制和二次稳定, 文献[11,12]给出了一个用非线性矩阵不等式表示的不确定广义大系统动态输出反馈分散鲁棒H_∞控制的充分条件, 但对一般的不确定广义大系统分散鲁棒H_∞保性能控制问题, 还未充分研究.

本文研究一类状态矩阵和控制矩阵具有不确定性的广义大系统分散鲁棒H_∞保性能控制问题. 首先通过广义系统的有界实引理, 给出了不确定性的广义大系统分散鲁棒H_∞控制器的设计方法; 然后应用线性矩阵不等式方法, 给出了不确定性的广义大系统分散鲁棒H_∞保性能控制器存在的充分条件, 将分散鲁棒H_∞保性能控制器设计归结为一个线性矩阵

收稿日期: 2008−04−15; 收修改稿日期: 2008−12−09.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60474078).

不等式可解性问题, 并给出了控制器的参数表达式. 最后给出例子验证了所给方法的有效性.

记号: 在本文中, 如无特别申明所有矩阵都是具有适当维数的矩阵; H^{T}表示矩阵H的转置矩阵; I表示适当维数的单位矩阵; $\mathrm{diag}\{R\} = \mathrm{diag}\{r_{11}, r_{22}, \cdots, r_{nn}\}$(这里$R = (r_{ij})$为对称阵); $\Phi_i \in \mathbb{R}^{n_i\times(n_i-r_i)}$为满足条件$E_i\Phi_i = 0$和$\mathrm{rank}\,\Phi_i = n_i-r_i$的矩阵(这里$E_i \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}$, $\mathrm{rank}\,E_i = r_i < n_i$); $\|\ y(t)\ \|_2 = (\int_0^{+\infty} y^{\mathrm{T}}(t)y(t)\mathrm{d}t)^{1/2}$; $\begin{pmatrix} X & * \\ Z^{\mathrm{T}} & Y\end{pmatrix}$表示对称矩阵$\begin{pmatrix} X & Z \\ Z^{\mathrm{T}} & Y\end{pmatrix}$.

2 问题描述及引理(Problem description and Lemmas)

考虑一类由N个子系统组成的具有状态矩阵和控制矩阵不确定性的广义大系统

$$\begin{cases} E_i\dot{x}_i(t) = [A_{ii}+\Delta A_{ii}]x_i(t)+[B_{2i}+\Delta B_{2i}]u_i(t)+ \\ \qquad \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}[A_{ij}+\Delta A_{ij}]x_j(t)+B_{1i}\omega_i(t), \\ z_i(t) = C_ix_i(t)+D_iu_i(t),\ i=1,2,\cdots,N. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x_i(t), \omega_i(t), u_i(t)$和$z_i(t)$分别为第$i$个子系统的状态、扰动输入、控制输入和被控输出向量; 矩阵A_{ii}, A_{ij}, B_{1i}, B_{2i}, C_i和D_i均为维数兼容的常数矩阵; A_{ij}为第j个子系统与第i个子系统的关联矩阵; 扰动输入$\omega_i(t)$是范数有界的确定性干扰满足$\|\omega_i(t)\|_2 < \rho$; 矩阵ΔA_{ij}和ΔB_{2i}分别为状态矩阵和控制输入矩阵的不确定性, 它是时不变的系统参数不确定性且有如下的数值界[9,14]:

$$|\Delta A_{ij}| \prec F_{ij},\ |\Delta B_{2i}| \prec H_i,\ i,j=1,2,\cdots,N, \tag{2}$$

其中F_{ij}, H_i为具有非负元素的实常数矩阵, 分别与ΔA_{ij}, ΔB_{2i}具有相同维数, 这里$|\Delta| \prec \overline{\Delta}$的含义是: $|e_{ij}| < \overline{e}_{ij}$. $e_{ij}, \overline{e}_{ij}$分别为矩阵$\Delta$, $\overline{\Delta}$的第(i,j)个元素.

系统(1)的性能指标取为

$$J = \sum_{i=1}^{N}\int_0^{+\infty}[x_i^{\mathrm{T}}(t)Q_ix_i(t)+u_i^{\mathrm{T}}(t)R_iu_i(t)]\mathrm{d}t. \tag{3}$$

其中$Q_i > 0, R_i > 0$为给定的已知对称正定矩阵.

令

$A = (A_{ij}),\ \Delta A = (\Delta A_{ij})$,

$E = \mathrm{blockdiag}(E_1, E_2, \cdots, E_N)$,

$B_1 = \mathrm{blockdiag}(B_{11}, B_{12}, \cdots, B_{1N})$,

$B_2 = \mathrm{blockdiag}(B_{21}, B_{22}, \cdots, B_{2N})$,

$\Delta B_2 = \mathrm{blockdiag}(\Delta B_{21}, \Delta B_{22}, \cdots, \Delta B_{2N})$,

$C = \mathrm{blockdiag}(C_1, C_2, \cdots, C_N)$,

$D = \mathrm{blockdiag}(D_1, D_2, \cdots, D_N)$,

$x(t) = \mathrm{col}(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_N(t))$,

$\omega(t) = \mathrm{col}(\omega_1(t), \omega_2(t), \cdots, \omega_N(t))$,

$u(t) = \mathrm{col}(u_1(t), u_2(t), \cdots, u_N(t))$,

$z(t) = \mathrm{col}(z_1(t), z_2(t), \cdots, z_N(t))$.

则整个不确定广义大系统(1)可描述为

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = [A+\Delta A]x(t)+B_1\omega(t)+ \\ \qquad [B_2+\Delta B_2]u(t), \\ z(t) = Cx(t)+Du(t). \end{cases} \tag{4}$$

本文的目的是设计系统(1)的形如:

$$u_i = K_ix_i(t),\ i=1,2,\cdots,N \tag{5}$$

的状态反馈分散鲁棒H_∞控制器和分散鲁棒H_∞保性能控制器. 系统(4)在分散控制器(5)作用下的闭环系统为

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = [(A+\Delta A)+(B_2+\Delta B_2)K]x(t)+B_1\omega(t), \\ z(t) = (C+DK)x(t). \end{cases} \tag{6}$$

这里$K = \mathrm{diag}\{K_1, K_2, \cdots, K_N\}$. 为此, 首先给出不确定广义大系统(1)的分散鲁棒H_∞控制器和分散鲁棒H_∞保性能控制器的定义.

定义 1 对于不确定广义大系统(1)和给定的正数γ, 如果存在控制器(5), 使得对满足式(2)的所有不确定性, 有:

1) 闭环系统(6)都正则、无脉冲模且稳定的(当$\omega(t) = 0$);

2) 闭环系统(6)在零初始条件(即$x(0) = 0$)时, 扰动输入$\omega(t)$到被控输出$z(t)$传递函数$T_{z\omega(s)}$满足$\|\ T_{z\omega(s)}\ \|_\infty < \gamma$(即$\|\ z(t)\ \|_2 < \gamma\ \|\ \omega(t)\ \|_2$);

则称不确定广义大系统(1)是可分散鲁棒H_∞控制的, 而控制器(5)称为广义大系统(1)的一个分散鲁棒H_∞控制器.

定义 2 对于不确定广义大系统(1)和给定的正数γ, 如果存在控制器(5)和一个正数J^*, 使得对满足式(2)的所有不确定性, 有:

1) 控制器(5)是不确定广义大系统(1)的一个分散鲁棒控制器;

2) 性能指标J满足$J < J^*$;

则称不确定广义大系统(1)是可分散鲁棒H_∞保性能的, J^*为系统(1)的一个可保性能, 而控制器(5)称为不确定广义大系统(1)的一个分散鲁棒H_∞保性能控制器.

引理 1[15]　若$n\times m$阶矩阵ΔA满足$|\Delta A|\prec F$, 则$\varOmega(F)\geqslant(\Delta A)(\Delta A)^{\mathrm T},\varGamma(F)\geqslant(\Delta A)^{\mathrm T}(\Delta A)$.

式中:

$$\varOmega(F)=\begin{cases}\|FF^{\mathrm T}\|I,\ \|FF^{\mathrm T}\|I<n\cdot\mathrm{diag}\{FF^{\mathrm T}\},\\ n\cdot\mathrm{diag}(FF^{\mathrm T}),\ 其他,\end{cases}$$

$$\varGamma(F)=\begin{cases}\|F^{\mathrm T}F\|I,\ \|F^{\mathrm T}F\|I<m\cdot\mathrm{diag}\{FF^{\mathrm T}\},\\ m\cdot\mathrm{diag}\{F^{\mathrm T}F\},\ 其他.\end{cases}$$

这里$\|\cdot\|$为最大奇异值矩阵范数.

引理 2　对于任意正数$\varepsilon>0$和适当维数的矩阵F,H有

$$H^{\mathrm T}F+F^{\mathrm T}H\leqslant\varepsilon H^{\mathrm T}H+\frac{1}{\varepsilon}F^{\mathrm T}F.$$

引理 3[13]　对广义系统

$$\begin{cases}E\dot x(t)=Ax(t)+B\omega(t),\\ z(t)=Cx(t)\end{cases}\tag{7}$$

和给定的正数$\gamma>0$, 以下叙述等价:

1) 系统(7)是正则、无脉冲模和稳定(当$\omega(t)=0$), 且$\|T_{z\omega}\|_\infty=\|C(zE-A)^{-1}B\|_\infty<\gamma$.

2) 存在可逆矩阵X满足线性矩阵不等式:

$$E^{\mathrm T}X=X^{\mathrm T}E\geqslant0,\tag{8a}$$

$$A^{\mathrm T}X+X^{\mathrm T}A+C^{\mathrm T}C+\frac{1}{\gamma^2}X^{\mathrm T}BB^{\mathrm T}X<0.\tag{8b}$$

3) 存在可逆矩阵P满足线性矩阵不等式:

$$PE^{\mathrm T}=EP^{\mathrm T}\geqslant0,\tag{9a}$$

$$PA^{\mathrm T}+AP^{\mathrm T}+B^{\mathrm T}B+\frac{1}{\gamma^2}PC^{\mathrm T}CP^{\mathrm T}<0.\tag{9b}$$

4) 存在矩阵$X>0,Y$满足

$$A(EX+Y\varPhi^{\mathrm T})^{\mathrm T}+(EX+Y\varPhi^{\mathrm T})A^{\mathrm T}+BB^{\mathrm T}+\frac{1}{\gamma^2}(EX+Y\varPhi^{\mathrm T})C^{\mathrm T}C(EX+Y\varPhi^{\mathrm T})^{\mathrm T}<0.\tag{10}$$

5) 存在矩阵满足$X>0,Y$满足

$$(EX+\varPhi^{\mathrm T})^{-1}A+A^{\mathrm T}(EX+\varPhi^{\mathrm T})^{-\mathrm T}+\frac{1}{\gamma^2}C^{\mathrm T}C+(EX+Y\varPhi^{\mathrm T})^{-1}BB^{\mathrm T}(EX+Y\varPhi^{\mathrm T})^{-\mathrm T}<0.\tag{11}$$

这里$\varPhi\in\mathbb R^{n\times(n-r)}$为满足条件$E\varPhi=0$和$\mathrm{rank}\ \varPhi=n-r$的矩阵(这里$\mathrm{rank}\ E=r$).

注 1　引理4中(4),(5)证明类似于文[16]定理2的证明.

3　分散鲁棒H_∞保性能控制器设计(Design of decentralized robust H-infinity controller)

记: $((M_{ij})_{ij})$是一个$n\times n$阶矩阵, 将其分成$N\times N$块, 分法与$A=(A_{ij})$分块对应, 每一块为一个$n_i\times n_j$阶矩阵, 只在第i行第j列上的块为M(是一个$n_i\times n_j$阶矩阵), 其余各块均为对应的$n_i\times n_j$阶零矩阵, 即

$$((M)_{ij})=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&M&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

又记

$$\overline A=\mathrm{diag}\{A_{11},A_{22},\cdots,A_{NN}\},A_K=\overline A+B_2K.$$

于是有

$$\begin{aligned}&(A+B_2K)+(\Delta A+\Delta B_2K)=\\&A_K+\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N}[((A_{ij})_{ij})+((\Delta A_{ij})_{ij})]+\\&\sum_{i=1}^{N}[((\Delta A_{ii})_{ii})+((\Delta B_{2i}K_i)_{ii})].\end{aligned}$$

定理 1　对不确定关联广义大系统(1)和给定的正数$\gamma>0$, 如果存在对称正定矩阵$X_i>0$, 矩阵Y_i和正数$\alpha_i,\beta_i,\varepsilon$使得下述线性矩阵不等式组(LMIs):

$$\begin{pmatrix}\tilde A_i&*&*&*&*\\ \varGamma^{\frac12}(F_{ii})\tilde P_i^{-1}&-\alpha_iI&*&*&*\\ \varGamma^{\frac12}(H_i)Z_i^{\mathrm T}&0&-\beta_iI&*&*\\ \tilde P_i^{-1}&0&0&-F_i^{-1}&*\\ \varPsi_i&0&0&0&-\gamma^2I\end{pmatrix}<0\tag{12}$$

成立, 其中:

$$\begin{aligned}\tilde A_i=&\tilde P_i^{-\mathrm T}A_{ii}^{\mathrm T}+A_{ii}\tilde P_i^{-1}+B_{2i}Z_i^{\mathrm T}+Z_iB_{2i}^{\mathrm T}+\\&\varepsilon\sum_{j=1,j\neq i}^{N}[A_{ij}A_{ij}^{\mathrm T}+\varOmega(F_{ij})]+\\&(\alpha_i+\beta_i)I+B_{1i}B_{1i}^{\mathrm T},\\ F_i=&\frac{2}{\varepsilon}(N-1)I,\ \tilde P_i=(E_iX_i+Y_i\varPhi_i^{\mathrm T})^{-\mathrm T},\\ \varPsi_i=&C_i\tilde P_i^{-1}+D_iZ_i^{\mathrm T},\ i=1,2,\cdots,N.\end{aligned}$$

则不确定广义大系统(1)是可分散鲁棒H_∞控制的, 而$K_i=Z_i^{\mathrm T}(E_iX_i+Y_i\varPhi_i^{\mathrm T})^{-\mathrm T}$是系统(1)的一个分散$H_\infty$控制律.

证　记

$$\tilde\varPhi=\mathrm{blockdiag}(\varPhi_1,\varPhi_2,\cdots,\varPhi_N);$$

$$\tilde X=\mathrm{blockdiag}(X_1,X_2,\cdots,X_N);$$

$\tilde{Y} = \text{blockdiag}(Y_1, Y_2, \cdots, Y_N);$

$\tilde{P} = \text{blockdiag}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \cdots, \tilde{P}_N) = (E\tilde{X} + \tilde{Y}\tilde{\varPhi}^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}}$

都为块对角矩阵. 则有$X > 0, E\tilde{\varPhi} = 0$和$\operatorname{rank} \tilde{\varPhi} = n - r$(这里$\operatorname{rank} E = r$). 由引理1和2可推出:

$$\sum_{i=1}^{N}[\tilde{P}^{\mathrm{T}}((\Delta A_{ii})_{ii}) + ((\Delta A_{ii})_{ii})^{\mathrm{T}}\tilde{P}] \leqslant \sum_{i=1}^{N}((\alpha_i \tilde{P}_i^{\mathrm{T}}\tilde{P}_i + \alpha_i^{-1}\varGamma(F_{ii}))_{ii}), \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{N}[\tilde{P}^{\mathrm{T}}((\Delta B_{2i}K_i)_{ii}) + ((\Delta B_{2i})_{ii}K_i)^{\mathrm{T}}\tilde{P}] \leqslant \sum_{i=1}^{N}((\beta_i \tilde{P}_i^{\mathrm{T}}\tilde{P}_i + \beta_i^{-1}K_i^{\mathrm{T}}\varGamma(F_{ii})K_i)_{ii}). \tag{14}$$

考虑闭环系统(6)有

$$\begin{aligned}&[(A + B_2K) + (\Delta A + \Delta B_2K)]^{\mathrm{T}}\tilde{P} + \tilde{P}^{\mathrm{T}}[(A+B_2K)+(\Delta A+\Delta B_2K)]+\tilde{P}^{\mathrm{T}}B_1B_1^{\mathrm{T}}\tilde{P}+ \frac{1}{\gamma^2}(C + DK)^{\mathrm{T}}(C + DK) \leqslant \\ &\sum_{i=1}^{N}\{(([A_{ii} + B_{2i}K_i]^{\mathrm{T}}\tilde{P}_i + \tilde{P}_i^{\mathrm{T}}[A_{ii} + B_{2i}K_i] + \tilde{P}_i^{\mathrm{T}}[\varepsilon\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(A_{ij}A_{ij}^{\mathrm{T}} + \varOmega(F_{ij})) + (\alpha_i + \beta_i)I]\tilde{P}_i + \\ &\frac{2}{\varepsilon}(N-1)I + \alpha_i^{-1}\varGamma(F_{ii}) + \beta_i^{-1}K_i^{\mathrm{T}}\varGamma(H_i)K_i + \tilde{P}_iB_{1i}B_{1i}^{\mathrm{T}}\tilde{P}_i+\frac{1}{\gamma^2}(C_i+D_iK_i)(C_i+D_iK_i)^{\mathrm{T}})_{ii}\} < 0.\end{aligned}$$

只要:

$$\begin{aligned}&[A_{ii} + B_{2i}K_i]^{\mathrm{T}}\tilde{P}_i + \tilde{P}_i^{\mathrm{T}}[A_{ii} + B_{2i}K_i] + \tilde{P}_i^{\mathrm{T}}[\varepsilon\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(A_{ij}A_{ij}^{\mathrm{T}} + \varOmega(F_{ij})) + (\alpha_i + \beta_i)I]\tilde{P}_i + \\ &F_i+\alpha_i^{-1}\varGamma(F_{ii})+\beta_i^{-1}K_i^{\mathrm{T}}\varGamma(H_i)K_i+\tilde{P}_iB_{1i}B_{1i}^{\mathrm{T}}\tilde{P}_i+ \frac{1}{\gamma^2}(C_i + D_iK_i)(C_i + D_iK_i)^{\mathrm{T}} < 0.\end{aligned} \tag{15}$$

由引理1可知, $\varGamma(F_{ii}), \varGamma(H_i)$ 均为正定或半正定矩阵, 可分解为

$$\varGamma(F_{ii})=\varGamma(F_{ii})^{\frac{1}{2}}\varGamma(F_{ii})^{\frac{1}{2}}, \varGamma(H_i)=\varGamma(H_i)^{\frac{1}{2}}\varGamma(H_i)^{\frac{1}{2}}.$$

对式(15)两边分别左乘$\tilde{P}_i^{-\mathrm{T}}$和右乘$\tilde{P}_i^{-1}$, 并令$Z_i = \tilde{P}_i^{-\mathrm{T}}K_i^{\mathrm{T}}$, 由Schur补引理知道(15)等价于(12). 从而由引理3知道: 在定理1的条件下系统(1)的闭环系统(6)都正则、无脉冲模且稳定的(当$\omega(t) = 0$)和系统满足$\|T_{z\omega}(s)\|_\infty < \gamma$. 证毕.

定理 2 对不确定关联广义大系统(1)和给定的正数$\gamma > 0$, 如果存在对称正定矩阵$X_i > 0$, 矩阵Y_i和正数$\alpha_i, \beta_i, \varepsilon$使得线性矩阵不等式组(LMIs)(16)成立(其中$\tilde{A}_i, F_i, \varPsi_i$同定理1), 则不确定广义大系统(1)是可分散鲁棒H_∞保性能的, 而$K_i = Z_i^{\mathrm{T}}(E_iX_i + Y_i\varPhi_i^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}}$是系统(1)的一个分散$\mathrm{H}_\infty$保性能控制律, 其保性能指标

$$J^* = \sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}(0)E_i^{\mathrm{T}}(E_iX_i + Y_i\varPhi_i^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}}x_i(0) + N\rho^2,$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_i & * & * & * & * & * & * \\ o & -\alpha_i I & * & * & * & * & * \\ p & 0 & -\beta_i I & * & * & * & * \\ \tilde{P}_i^{-1} & 0 & 0 & -F_i^{-1} & * & * & * \\ \varPsi_i & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ \tilde{P}_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_i^{-1} & * \\ Z_i^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_i^{-1} \end{pmatrix} < 0. \tag{16}$$

其中: $o = \varGamma^{\frac{1}{2}}(F_{ii})\tilde{P}_i^{-1}, p = \varGamma^{\frac{1}{2}}(H_i)Z_i^{\mathrm{T}}$.

证 (略).

注 2 1) 定理2给出了广义大系统(1)完全由子系统决定的可分散鲁棒H_∞保性能控制的充分条件.

2) 定理2中所得到的闭环系统性能指标的界依赖于初始状态$x(0)$, 然而在实际系统中, 人们往往难以精确确定系统的初始状态$x(0)$. 为了克服这个困难, 假定$x(0)$是一个期望满足$E(x(0)x^{\mathrm{T}}(0)) = I$ 的零均值随机变量, 此时, 闭环系统性能指标的期望值

$$\begin{aligned}&J^* = E(J) \leqslant \\ &\mathrm{E}\{\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}(0)\mathrm{E}_i^{\mathrm{T}}(E_iX_i + Y_i\varPhi_i^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}}x_i(0)\} + N\rho^2 = \\ &\sum_{i=1}^{N}tr[E_i^{\mathrm{T}}(E_iX_i + Y_i\varPhi_i^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}}] + N\rho^2,\end{aligned}$$

故此时

$$\overline{J} = \sum_{i=1}^{N}\mathrm{tr}[E_i^{\mathrm{T}}(E_iX_i + Y_i\varPhi_i^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}}] + N\rho^2$$

可称为系统的可保性能. 所以假定$x(0)$是一个期望满足$E(x(0)x^{\mathrm{T}}(0)) = I$的零均值随机变量, 有如下定理.

定理 3 对不确定关联广义大系统(1)和给定的正数$\gamma > 0$, 如果存在对称正定矩阵$X_i > 0$, 矩阵Y_i和正数$\alpha_i, \beta_i, \varepsilon$满足线性矩阵不等式组(LMIs)式(16), 则不确定广义大系统(1)是可分散鲁棒H_∞保性能的, 而

$$K_i = Z_i^{\mathrm{T}}(E_iX_i + Y_i\varPhi_i^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}}$$

是系统(1)的一个分散H_∞保性能控制律, 其保性能指标

$$\overline{J} = \sum_{i=1}^{N}\mathrm{tr}[E_i^{\mathrm{T}}(E_iX_i + Y_i\varPhi_i^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}}] + N\rho^2.$$

4 仿真示例(Illustrative example)

沿用前面的记号, 考虑一个由两个子系统组成的不确定线性大系统(1), 其不确定项具有数值界, 可不满足匹配条件. 其中:

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ A_{11}=\begin{pmatrix}3&-3\\1&2\end{pmatrix},\ B_{21}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},$$

$$A_{12}=\begin{pmatrix}0.1&-0.2&0.1\\-0.2&0.1&-0.1\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0.5\end{pmatrix},$$

$$E_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\2&0&1\end{pmatrix},\ A_{22}=\begin{pmatrix}7&-5&0.5\\-15&5&-8\\-6&-5&15\end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix}-0.5&0.5\\0.5&-0.5\\0.5&0.5\end{pmatrix},\ B_{22}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0.5\\1.5&1\end{pmatrix},$$

$$F_{11}=\begin{pmatrix}0.02&0.03\\0.05&0.02\end{pmatrix},\ F_{12}=\begin{pmatrix}0.05&0.02&0.01\\0.02&0.05&0.03\end{pmatrix},$$

$$H_1=\begin{pmatrix}0.01\\0.02\end{pmatrix},\ B_{11}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ D_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

$$F_{22}=\begin{pmatrix}0.05&0.01&0.02\\0.01&0.02&0.01\\0.02&0&0.04\end{pmatrix},\ B_{12}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$F_{21}=\begin{pmatrix}0.02&0\\0.01&0.05\\0.03&0.05\end{pmatrix},\ H_2=\begin{pmatrix}0.02&0.01\\0.01&0\\0.01&0.03\end{pmatrix},$$

$$D_2=\begin{pmatrix}0.5&-1\\1&1\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0&0.5&1\\1&0.5&-1\end{pmatrix}.$$

选择

$$\Phi_1=\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\ \Phi_2=\begin{pmatrix}-1&1&2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$\gamma=0.5,\rho=0.5,Q_1,Q_2,R_1$和$R_2$均为相应维数的单位矩阵, 干扰输入为高斯白噪声. 通过MATLAB仿真可以看出, 开环系统是不稳定的, 但根据定理3, 应用MATLAB LMI控制工具包解问题(16), 可求得反馈增益$K=\mathrm{diag}\{K_1,K_2\}$, 相应的保性能指标$\bar{J}=16.3492$, 其中

$$K_1=(-19.3529\ \ 2.2962),$$

$$K_2=\begin{pmatrix}-0.6678&-0.5913&-0.1723\\-0.2828&0.1556&1.0043\end{pmatrix}.$$

虽然待求解是一组LMIs, 且含有多个参数, 但在LMITOOL环境下可一次求出, 求解方便, 无需预先调整太多的参数. 相应的闭环系统的状态曲线如图1所示, 从图1可以看出, 系统不但是鲁棒稳定的, 而且具有很好的响应特性. 需要说明的是保性指标(3)与外部输入干扰无关, H_∞性能指标γ表示干扰输入到输出的抑制作用, 所以$\gamma=0.5$与$\overline{J}=16.3492$之间没有关系.

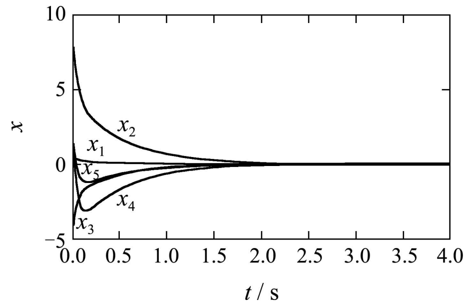

图 1　闭环系统的状态响应曲线图

Fig. 1　State response curves of closed-loop system

5 结束语(Conclusions)

对一类参数不确定广义大系统和一个给定的二次型性能指标, 在其不确定性具有数值界条件下, 基于广义系统的有界实引理, 应用线性矩阵不等式(LMI)方法, 给出了不确定性广义大系统存在分散鲁棒H_∞状态反馈控制器和分散鲁棒H_∞保性能控制器的LMI条件, 并用这个线性矩阵不等式系统的可行解分别提供了分散鲁棒H_∞状态反馈控制器和分散鲁棒H_∞保性能控制律的参数化表示, 最后用数值例子说明该方法的应用. 该方法具有潜在的实际应用价值, 有待于进一步研究.

参考文献(References):

[1] 刘新宇, 高立群, 张文力. 不确定线性组合系统的分散镇定和输出跟踪[J]. 信息与控制, 1998, 27(5): 342 – 350.
(LIU Xinyu, GAO Liqun, ZHANG Wenli. Decentralized robust control for linear uncertain interconnected systems[J]. *Information and Control*, 1998, 27(5): 342 – 350.)

[2] Aldeen Trinh H. A comment on decentralized stabilization of large scale interconnected systems with delays[J]. *IEEE Transactions On Automatica Control*, 1995, 40(5): 914 – 916.

[3] 谢永芳, 桂卫华, 刘晓颖, 等. 时变不确定关联系统的分散鲁棒控制器设计[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(6): 903 – 906.
(XIE Yongfang, GUI Weihua, LIU Xiaoying, et al. Decentralized robust stabilizing control design for interconnected time-varying uncertain systems[J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(6): 903 – 906.)

[4] 俞立. 一类线性离散时滞大系统的分散镇定[J]. 控制理论与应用, 2000, 17(1): 125 – 127.
(YU Li. Decentralized stabilization of a class of large-scale linear discrete time-delay systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(1): 125 – 127.)

[5] JUN J Y, JASON S H, TSAI, et al. Robust stabilization of large scale systems with nonlinear uncertainties via decentralized state feedback[J]. *Journal of The Franklin Institute*, 1998, 335B(5): 951 – 961.

[6] GAN Y, WANG Z. Decentralized state feedback robust control design for uncertain interconnected large-scale systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(2): 297 – 301.

[7] 蒋朝辉, 桂卫华, 谢永芳, 等. 不确定关联大系统分散鲁棒H_∞输出反馈控制[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 743 – 748, 755.
(JIANG Zhaohui, GUI Weihua, XIE Yongfang, et al. Decentralized robust H-infinity output feedback control for uncertain internnected large-scale systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(5): 743 – 748, 755.)

[8] 沃松林, 邹云. 参数不确定的广义大系统的分散鲁棒镇定控制[J]. 控制与决策, 2004, 19(8): 931 – 934.
(WO Songlin, ZOU Yun. Decentralized robust stabilization for singular large-scale systems with parameter uncertainty[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(8): 931 – 934.)

[9] WO S L, ZOU Y, SHENG M, et al. Robust control for discrete-time singular large-scale systems with parameter uncertainty[J]. *Journal of The Franklin Institute*, 2007, 344(2): 97 – 106.

[10] 陈跃鹏, 张庆灵, 徐天群. 基于观测器的具有对称结构的广义大系统的H_∞分散控制[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2001, 22(4): 450 – 453.
(CHEN Yuepeng, ZHANG Qingling, XU Tianqun. Decentralized H_∞ control based on observer for large-scale descriptor symmetric compose systems[J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2001, 22(4): 450 – 453.)

[11] XIE Y F, GUI W H, JIANG Z H. Decentralized robust H-infinity descriptor output feedback control for value-bounded uncertain descriptor large-scale systems[J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2006, 4(2): 193 – 200.

[12] 蒋朝辉, 桂卫华, 谢永芳. 数值界不确定性奇异大系统分散鲁棒H_∞广义输出反馈控制[J]. 信息与控制, 2006, 35(1): 47 – 54.
(JIANG Zhaohui, GUI Weihua, XIE Yongfang. Decentralized robust H-infinity descriptor output feedback control for singular large-scale systems with uncertain value bound[J]. *Information and Control*, 2006, 35(1): 47 – 54.)

[13] MASUBUCHI I, KAMITANE Y, OHARA A, et al. Control for descriptor systems: A matrix inequalities approach[J]. *Automatica*, 1997, 33(4): 669 – 673.

[14] MEHDI D, HAMID M A, PERRIN F. Robustness and optimality of linear quadratic controller for uncertain systems[J]. *Automatica*, 1996, 32(7): 1081 – 1083.

[15] GUI W, XIE Y, WU M, et al. Decentralized robust control for uncertain interconnected systems with time-delay based LMI approach[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(1): 155 – 159.

[16] XU S Y, PAUL VAN DOOREN, RADU STEFAN, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1122 – 1128.

作者简介:

沃松林 (1964—), 男, 博士, 教授, 研究方向为广义大系统理论与分散控制, E-mail: wosonglin2000@yahoo.com.cn;

史国栋 (1956—), 男, 博士, 教授, 研究方向为广义系统理论, E-mail: sgd@jstu.edu.cn;

邹　云 (1962—), 男, 博士生导师. 近期研究兴趣主要为异系统理论、应急控制与评估理论与应用以及电力系统自动化等, E-mail: zouyun@jlonline.com.