

# 一类线性离散时间结构随机跳变系统的逼近滤波算法

方洋旺, 王洪强, 伍友利

(空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

**摘要:** 提出了具有条件马尔可夫跳变结构的离散时间随机系统的条件滤波方法, 应用随机变结构系统的性质对滤波算法进行简化处理, 并将后验概率密度函数用条件高斯函数来逼近, 得到具有条件马尔可夫结构离散随机系统的逼近最优滤波算法, 最后给出滤波算法的计算步骤并仿真验证了算法的正确性.

**关键词:** 随机系统; 变结构系统; 条件马尔可夫结构; 逼近最优滤波

**中图分类号:** TP271.74      **文献标识码:** A

## An approximate optimal filtering for discrete stochastic systems with conditional Markov structure

FANG Yang-wang, WANG Hong-qiang, WU You-li

(Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an Shaanxi 710038, China)

**Abstract:** A conditional filtering algorithm is presented for a discrete stochastic system with conditional Markov structure. This filtering algorithm is simplified by making use of the variable-structure character of the stochastic system; and the posterior probability density function is approximated by a Gaussian function. Thus, an optimal filtering for conditional Markov structure discrete stochastic is obtained. The computation process of this filtering algorithm is given; and its effectiveness is shown by simulation results.

**Key words:** stochastic system; variable structure system; conditional Markov structure; approach optimal filtering

### 1 引言(Introduction)

人们通过大量的研究发现, 在工程实际问题中存在着大量的动力学系统, 由于随机突变现象引起系统的跳变, 诸如互联子系统的变化, 环境条件等的突变、系统元件的故障、参数的改变等等, 而这种随机变化的规律通常遵循Markov过程的变化规律<sup>[1]</sup>. 具有上述特征的系统, 一般来讲既包含了连续的系统状态, 又包含了跳变的结构状态, 故此类系统又称为随机跳变系统. 目前, 结构随机跳变系统在飞行器控制、通信技术、机器人技术以及其他领域都具有广泛的应用<sup>[2~4]</sup>, 深入研究此类系统的有效辨识、状态估计与控制方法, 对于有关此类复杂系统问题的解决无疑具有重要的学术意义及应用价值.

根据结构状态和系统状态的关系可将结构随机跳变系统分为两类, 一类为具有马尔可夫结构随机跳变系统, 即系统结构跳变与状态无关, 另一类为

具有条件马尔可夫结构随机跳变系统, 即系统结构跳变与状态相关<sup>[5]</sup>, 目前针对结构随机跳变系统的滤波主要集中在第1种情况<sup>[6,7]</sup>, 而针对具有条件马尔可夫结构随机跳变系统滤波问题研究较少. 文献<sup>[5]</sup>给出具有条件马尔可夫结构随机跳变线性系统滤波问题, 但是侧重点在跳变系统的概率特性分析, 对算法滤波问题没有太深入研究. 文献<sup>[8,9]</sup>也是针对非常一般的模型给出了有关滤波的抽象结论并进行了仿真算例分析, 并没有针对具有条件马尔可夫结构随机跳变系统滤波问题具体讨论, 其研究结果很难应用.

本文对具有条件马尔可夫结构的离散随机跳变系统的状态最优滤波问题进行研究, 从解决系统状态的后验概率密度函数入手, 将其逼近为已知的函数, 并使用此逼近方法获得随机跳变系统的逼近最优滤波算法, 并给出了具体的计算步骤, 具有较高的

应用价值.

## 2 逼近最优滤波算法(Approach optimal filtering algorithm)

离散时间随机跳变系统最优滤波的目的是利用区间 $[0, k]$ 内状态观测器所获得的数据 $z_k$ 来估计当前状态 $(x_k, s_k)^T$ 的概率特征, 即获得状态的后验概率分布. 确定分量 $x_k$ 的后验概率分布称为坐标估计, 而确定结构参数 $s_k$ 的后验概率分布称为结构辨识.

根据随机系统最优滤波理论, 滤波算法结构上可分成两个阶段: 预测阶段与修正阶段. 在预测阶段, 首先求解 $\tilde{p}(s_k), \tilde{x}(s_k), \tilde{R}(s_k)$ ; 在修正阶段: 利用预测阶段的结果, 进而求得 $\hat{p}_k(s_k), \hat{x}_k(s_k), \hat{R}_k(s_k)$ . 求最优滤波的关键就是要获得后验概率密度函数 $\hat{f}(x_k, s_k)$ . 虽然后验概率密度函数 $\hat{f}(x_k, s_k)$ 的求解很复杂, 但它给出了关于最优滤波的可能趋势, 通常借助逼近最优滤波算法进行简化. 在逼近算法中假设后验概率密度 $\hat{f}(x_k, s_k)$ 能用逼近某个已知的函数.

假设结构随机跳变线性系统状态模型为

$$\begin{aligned} x_{k+1} = & [A(s_{k+1}, s_k) + g(s_{k+1}, s_k)\xi_k^T]x_k + \\ & B(s_{k+1}, s_k)u_k + F(s_{k+1}, s_k)\xi_k. \end{aligned} \quad (1)$$

观测方程:

$$z_{k+1} = D(s_{k+1})z_k + C(s_{k+1})x_{k+1} + E(s_{k+1})\zeta_k. \quad (2)$$

式中:  $k = 0, 1, \dots$ 为离散时间,  $x_k$ 为 $n_x$ 维状态向量序列,  $z_k$ 为 $n_z$ 维状态观测向量序列, 模型噪声为 $\xi_k$ , 观测噪声为 $\zeta_k$ , 它们为随机向量序列, 方差为 $\Xi_k$ 和 $Q_k$ , 且对于不同的 $k$ 是相互独立的.  $s_k \in S = \overline{1, M}$ 为结构参数序列, 由有限状态的马尔可夫链描述, 给定 $x_k$ 时其结构的条件转移概率为 $q_k(s_{k+1}|s_k, x_k)$ .  $g(\cdot)$ 和 $F(\cdot)$ 分别描述了跳变的离散随机过程,  $g(\cdot)\xi_k^T$ 和 $F(\cdot)\xi_k$ 所调制的离散白噪声参数可乘性的与可加性的干扰.

**定理 1** 当 $\hat{f}(x_k, s_k)$ 服从条件高斯分布, 即 $\hat{f}(x_k, s_k)$ 可由条件数学期望 $\hat{x}(s_k)$ 和方差 $\hat{R}(s_k)$ 来逼近时, 逼近最优滤波算法可表示为

$$\hat{p}(s_{k+1}) = \frac{|\tilde{\theta}(s_{k+1})|^{-\frac{1}{2}} \exp(-h(s_{k+1}))}{\sum_{s_{k+1}} \tilde{p}(s_{k+1}) |\tilde{\theta}(s_{k+1})|^{-\frac{1}{2}} \exp(-h(s_{k+1}))}. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(s_{k+1}) = & \tilde{x}(s_{k+1}) + \tilde{R}(s_{k+1})C^T(s_{k+1}) \cdot \\ & \tilde{\theta}^{-1}(s_{k+1})\Delta(s_{k+1}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}(s_{k+1}) = & \tilde{R}(s_{k+1}) - \tilde{R}(s_{k+1})C^T(s_{k+1}) \times \\ & \tilde{\theta}^{-1}(s_{k+1})C(s_{k+1})\tilde{R}(s_{k+1}), \end{aligned} \quad (5)$$

式中:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^{-1}(s_{k+1}) & \triangleq \Delta_{k+1}^z = \\ & C(s_{k+1})\tilde{R}(s_{k+1})C^T(s_{k+1}) + N(s_{k+1}), \\ h(s_{k+1}) & = \frac{1}{2}\tilde{\Delta}^T(s_{k+1})\theta^{-1}(s_{k+1})\Delta(s_{k+1}), \\ \Delta(s_{k+1}) & = z_{k+1} - D(s_{k+1})z_k - C(s_{k+1})\hat{x}(s_{k+1}). \end{aligned}$$

$\tilde{p}(s_{k+1}), \tilde{x}(s_{k+1}), \tilde{R}(s_{k+1})$ 分别为系统结构概率、各结构下系统状态及协方差的预测值.

**证** 由系统状态方程得各结构的一步预测

$$\begin{aligned} \bar{x}(s_{k+1}, s_k, x_k^*) & = \\ E\{A(s_{k+1}, s_k)x_k + B(s_{k+1}, s_k)u_k | s_{k+1}, s_k, x_k\} & = \\ A(s_{k+1}, s_k)\hat{x}_k(s_k) + B(s_{k+1}, s_k)u_k, & (6) \\ \bar{R}(s_{k+1}, s_k, x_k^*) & = \\ E\{[x_{k+1} - \bar{x}(s_{k+1}, s_k, x_k^*)][x_{k+1} - & \\ \bar{x}(s_{k+1}, s_k, x_k^*)]^T | s_{k+1}, s_k, x_k\} & = \\ [F(s_{k+1}, s_k) + g(s_{k+1}, s_k)\hat{x}^T(s_k)] \times & \\ \Xi_k [F(s_{k+1}, s_k) + g(s_{k+1}, s_k)\hat{x}^T(s_k)]^T. & (7) \end{aligned}$$

式中

$$x_k^* = A(s_{k+1}, s_k)\hat{x}_k(s_k) + B(s_{k+1}, s_k)u_k.$$

从而得到如下预测公式:

$$\tilde{p}(s_{k+1}) = \sum_{s_k} \hat{p}(s_k) \int_{-\infty}^{\infty} q(s_{k+1}|s_k, x_k) \hat{f}(x_k|s_k) dx_k, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}(s_{k+1}) & = \\ \tilde{p}^{-1}(s_{k+1}) \sum_{s_k} \hat{p}(s_k) \int_{-\infty}^{\infty} [A(s_{k+1}, s_k)\hat{x}(s_k) + & \\ B(s_{k+1}, s_k)u_k] q(s_{k+1}|s_k, x_k) \hat{f}(x_k|s_k) dx, & (9) \\ \tilde{R}(s_{k+1}) & = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}^{-1}(s_{k+1}) \sum_{s_k} \hat{p}(s_k) \int_{-\infty}^{\infty} [F(s_{k+1}, s_k) + & \\ g(s_{k+1}, s_k)\hat{x}^T(s_k)] \Xi_k [F(s_{k+1}, s_k) + & \\ g(s_{k+1}, s_k)\hat{x}^T(s_k)]^T + [\tilde{x}(s_{k+1}) - & \\ A(s_{k+1}, s_k)\hat{x}(s_k) - B(s_{k+1}, s_k)u_k] \times & \\ [\tilde{x}(s_{k+1}) - A(s_{k+1}, s_k)\hat{x}(s_k) - B(s_{k+1}, s_k)u_k]^T \times & \\ q(s_{k+1}|s_k, x_k) \hat{f}(x_k|s_k) dx_k. & (10) \end{aligned}$$

设 $f(z_{k+1}|x_{k+1}, s_{k+1}, z_{0,k}^z)$ 可以用高斯逼近, 即

$$f(z_{k+1}|x_{k+1}, s_{k+1}, z_{0,k}^z) = \mathcal{N}(z_{k+1}|m_{k+1}^z, \theta_{k+1}^z). \quad (11)$$

其中 $\mathcal{N}(z_{k+1}|m_{k+1}^z, \theta_{k+1}^z)$ 表示观测值 $z_{k+1}$ 服从均值 $m_{k+1}^z$ , 协方差为 $\theta_{k+1}^z$ 的高斯分布. 式中:

$$m_{k+1}^z = D(s_{k+1})z_k - C(s_{k+1})\tilde{x}_{k+1}, \quad (12)$$

$$\theta_{k+1}^z = C(s_{k+1})\tilde{R}(s_{k+1})C^T(s_{k+1}) + N(s_{k+1}), \quad (13)$$

$$N(s_{k+1}) = E(s_{k+1})Q_{k+1}E^T(s_{k+1}). \quad (14)$$

故

$$f(z_{k+1}|x_{k+1}, s_{k+1}, z_{0,k}) = \sqrt{(2\pi)^{-m}|\theta_{k+1}^z|^{-1}} \times \exp[-\frac{1}{2}(z_{k+1} - m_{k+1}^z)\theta_{k+1}^z(z_{k+1} - m_{k+1}^z)]. \quad (15)$$

由于  $f(z_{k+1}|x_{k+1}, s_{k+1}, z_{0,k})$  中不含有变量  $x_{k+1}$ , 可以提到关于  $x_{k+1}$  求积分的积分号外. 故有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta(\eta_{k+1}, z_k) dx_{k+1} = f(z_{k+1}|x_{k+1}, s_{k+1}, z_{0,k}) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x_{k+1}, s_{k+1}) dx_{k+1} = f(z_{k+1}|x_{k+1}, s_{k+1}, z_{0,k}) \tilde{p}(s_{k+1}). \quad (16)$$

由

$$\hat{p}(s_{k+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\eta_{k+1}, z_k) dx_{k+1},$$

式中

$$\beta(\eta_{k+1}, z_k) = f(z_{k+1}|x_{k+1}, s_{k+1}, z_{0,k}) \tilde{f}(x_{k+1}, s_{k+1}),$$

可以得到结构概率估计公式(3). 关于  $\hat{x}(s_{k+1})$ ,  $\hat{R}(s_{k+1})$  可以类似于一般随机系统( $s_{k+1} = 1$ )的最优估计求解.

假设  $\hat{x}(s_{k+1}) = \tilde{x}(s_{k+1}) + L(s_{k+1})\Delta(s_{k+1})$ , 式中  $L(s_{k+1})$  为待求矩阵. 为了确保后验状态估计  $\hat{x}(s_{k+1})$  为最优, 必须选择  $L(s_{k+1})$ , 使估计误差的均方差达到最小, 即

$$\min_{L(s_{k+1})} E\{[\hat{x}(s_{k+1}) - x(s_{k+1})]^T [\hat{x}(s_{k+1}) - x(s_{k+1})]\} = \min_{L(s_{k+1})} \text{tr}(R(s_{k+1})). \quad (17)$$

式中

$$R(s_{k+1}) = E\{[\hat{x}(s_{k+1}) - x(s_{k+1})] [\hat{x}(s_{k+1}) - x(s_{k+1})]^T\}. \quad (18)$$

$\text{tr}(\cdot)$  表示迹运算. 类似于文献[10]中的最优估计算法, 得式(4)(5)成立. 证毕.

由公式(3)~(5)可以看出, 对  $\hat{p}(s_{k+1})$ ,  $\hat{x}(s_{k+1})$ ,  $\hat{R}(s_{k+1})$  的计算公式中不含有转移强度项, 而转移强度项仅包含在  $\tilde{p}(s_{k+1})$ ,  $\tilde{x}(s_{k+1})$ ,  $\tilde{R}(s_{k+1})$  的求解公式中.

则  $x_k$  的最优估计  $\hat{x}_k$  及估计误差的协方差为

$$\hat{x}_k = \sum_{s_k} \hat{x}_k(s_k) \hat{p}(s_k), \quad (19)$$

$$\hat{R}_k = \sum_{s_k} [\hat{R}(s_k) + \hat{x}_k(s_k) \hat{x}_k^T(s_k)] \hat{p}(s_k) - \hat{x}_k \hat{x}_k^T. \quad (20)$$

**注 1** 当系统结构转移概率与系统状态无关时,

$q(s_{k+1}|s_k, x_k) = q(s_{k+1}|s_k)$ , 具有条件马尔可夫结构的随机跳变系统转化为一般的具有马尔可夫结构的随机跳变系统, 滤波算法中相应的部分可作相应简化, 滤波算法相应的转化为一般具有马尔可夫结构的随机跳变系统滤波算法, 此时的滤波算法与 IMM 滤波算法相似. 目前关于 IMM 算法比较好的结果都是针对较简单的具有马尔可夫结构的随机跳变系统研究的, 而对系统结构与状态有关的具有条件马尔可夫结构的随机多模型尚未见到好的算法.

### 3 数字仿真(Numerical simulation)

考虑状态方程

$$x_{k+1} = a(s_k)x_k + \zeta_k. \quad (21)$$

其中  $k = 0, 1, \dots$  为离散时间,  $s_k = 1, 2$  为系统结构参数,  $a(1) = 0.99, a(2) = 0.95, \zeta_k$  为离散白噪声, 在  $[-b, b]$  等概率分布,  $b = 1$ , 测量器以延时一个步长工作, 观测方程为

$$z_{k+1} = x_k + \xi_k. \quad (22)$$

式中  $\xi_k$  为离散中心化高斯白噪声, 方差为  $(\Delta/3)^2$ , 其中  $\Delta = 0.5$ . 转移概率为  $q(s_{k+1}|s_k, x_k)$ ,

$$q(2|1, x_k) = \begin{cases} q, & \text{当 } |x_k| \leq \Delta, \\ 0, & \text{当 } |x_k| > \Delta, \end{cases}$$

$$q(1|2, x_k) = \begin{cases} g, & \text{当 } |x_k| \leq \Delta, \\ 1, & \text{当 } |x_k| > \Delta, \end{cases}$$

$$q(1|1, x_k) = 1 - q(2|1, x_k),$$

$$q(2|2, x_k) = 1 - q(1|2, x_k).$$

$q, g$  为常数, 仿真中  $q = 0.9, g = 0.05$ . 注意到状态转移概率为状态量的函数, 所以模型构成具有条件马尔可夫结构的离散随机系统.

应用本文提出的算法构造最优滤波器, 辨识结构状态和估计输出信号. 结构状态的初始概率  $\tilde{p}_0(1) = 0, \tilde{p}_0(2) = 1 - \tilde{p}_0(1)$ . 初始状态  $x_0$  在  $[20 - b, 20 + b]$  内等概率分布, 初始后验概率

$$\hat{f}_0(x_0, s_0) = \begin{cases} \frac{1}{2b} \tilde{p}_0(s_0), & x_0 \in [x_0 - b, x_0 + b], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (23)$$

$f(z_{k+1}|x_{k+1}, s_{k+1}, z_{0,k})$  用高斯逼近

$$f(z_{k+1}|x_k, s_k) = \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{2\pi}\Delta} \exp\{-\frac{1}{2}(\frac{3z_{k+1}}{\Delta})^2\}, & s_k = 1, \\ \frac{3}{\sqrt{2\pi}\Delta} \exp\{-\frac{1}{2}[\frac{3(z_{k+1} - x_k)}{\Delta}]^2\}, & s_k = 2. \end{cases} \quad (24)$$

条件概率函数 $f(x_{k+1}|x_k, s_k)$ 可表示为

$$f(x_{k+1}|x_k, s_k) = \begin{cases} \frac{1}{2b}, & x_{k+1} \in [a(s_k)x_k - b, a(s_k)x_k + b], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (25)$$

仿真中分别应用Kalman滤波器和本文中的滤波算法对观测信号进行滤波,其中Kalman滤波器只对系统结构 $s_k = 1$ 情况进行滤波计算.

图1为滤波结果同真实值、观测值的比较,图2为观测误差的收敛过程.由两图可以看到本文提出的最优滤波算法考虑了系统中存在的两种的系统结构,系统结构改变时滤波效果较Kalman滤波算法明显改善.

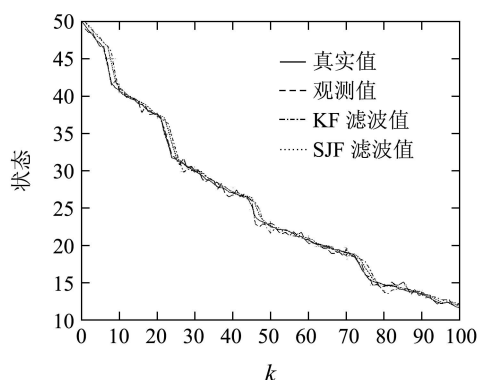


图1 状态滤波结果

Fig. 1 Result of state filtering

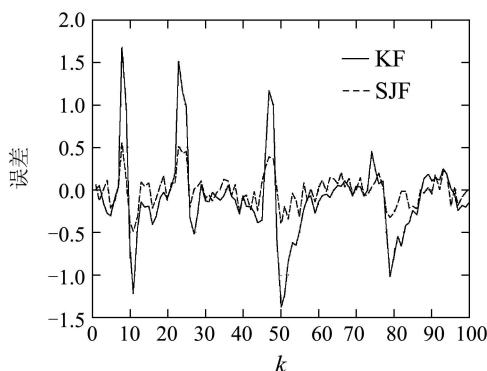


图2 滤波误差比较

Fig. 2 Comparison of filtering errors

图3为系统结构变化和算法对系统结构1的估计概率的对比情况,从估计结果来看,滤波算法较为准确的对系统结构进行了辨识.

#### 4 结论(Conclusion)

本文从计算后验概率密度方程入手,将具有马尔可夫结构的离散随机系统的滤波问题分解为预测和修正两个串联部分,并将后验概率密度逼近条件高斯分布,获得逼近最优滤波算法.最后通过仿真验证

了算法的正确性.此算法避免了求概率密度函数运算时的积分过程,为进一步设计结构随机跳变系统的控制器奠定了较好的基础.

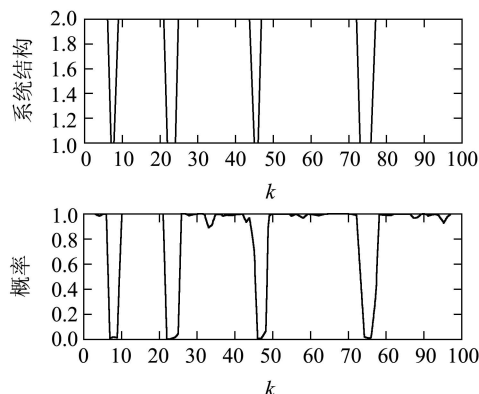


图3 系统结构估计

Fig. 3 Estimation of system structure

#### 参考文献(References):

- [1] COSTA O L V, FRAGOSO M D, MARQUES R P. *Discrete Time Markov Jump Linear Systems*[M]. London: Springer-Verlag, 2005.
- [2] GRAY W S, GONZALEZ O R, DOGAN M. Stability analysis of digital linear flight controllers subject to electromagnetic disturbance[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2000, 36(4): 1204 - 1218.
- [3] DO VAL J B R, COSTA E F. Numerical solution for linear-quadratic control problems of Markov jump linear system and weak detectability concept[J]. *Journal of Optimization Theory and applications*, 2002, 114(1): 69 - 96.
- [4] STOICA A, YAESH I. Jump Markovian-based control of wing deployment for an uncrewed air vehicle[J]. *Journal of Guidance*, 2002, 25(6): 407 - 411.
- [5] 吴森堂. 结构随机跳变系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [6] ORGUNER U, DEMIREKLER M. Risk-sensitive filtering for jump Markov linear systems[J]. *Automatica*, 2008, 44(1): 109 - 118.
- [7] CARLOS E, DE SOUZA, MARCELO D F.  $H_\infty$  filtering for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters[C] // *Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control*. San Diego, California, USA: [s.n.], 1997: 2181 - 2186.
- [8] BUKHALEV V A. A filtering algorithm for Markov structure systems with jump disturbance[J]. *Theory of Controls*, 1992, (2): 136 - 143(in Russian).
- [9] BUKHALEV V A. An optimal control for stochastic jump system[J]. *Theory of Controls*, 1992, (4): 88 - 97(in Russian).
- [10] 方洋旺. 随机系统分析与应用[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2006.

#### 作者简介:

方洋旺 (1966—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为随机最优控制理论与应用、导弹制导与控制、导弹作战使用、非线性控制等;

王洪强 (1980—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为随机最优控制理论、导弹制导与控制等, E-mail: wanghongqiang2009@163.com;

伍友利 (1979—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为结构随机跳变系统理论、导弹制导与控制、武器系统作战效能等.