第 27 卷第 4 期　　控 制 理 论 与 应 用　　Vol. 27 No. 4
2010 年 4 月　　Control Theory & Applications　　Apr. 2010

文章编号: 1000−8152(2010)04−0431−06

一类具有漂移、扩散及停时的奇异型随机控制

于　洋[1], 王秋媛[2], 赵生变[1]

(1. 北京交通大学 理学院数学系, 北京 100044; 2. 北京交通大学 金融数学与金融工程研究所, 北京 100044)

摘要: 以随机分析的知识和最优控制理论为基础, 推广了一类带停时的奇异型随机控制中的折扣费用模型, 主要在受控状态过程中增加了漂移因子和扩散因子, 使其为一随机微分方程的解, 并将费用函数一般化. 通过求解一组变分方程, 证明了最优控制及最优停时的存在性, 并给出了最优费用函数的解析表达式.

关键词: 随机控制; 停时; 奇异型控制; 漂移; 扩散

中图分类号: O211.6　　**文献标识码**: A

Problems of singular stochastic control with stopping, drift and diffusion

YU Yang[1], WANG Qiu-yuan[2], ZHAO Sheng-bian[1]

(1. Department of Mathematics, School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;
2. Institute of Financial Mathematics and Financial Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: Based on the stochastic calculus and the classical theory of optimal control, this paper generalizes a class of the discounted model of singular stochastic control with stopping time. Drift and diffusion coefficients are introduced into the controlled states to make them the solution of a stochastic differential equation. Meanwhile, the cost function is also generalized. By solving a variational equation, we prove the existence of the optimal control and the optimal stopping time. Moreover, we derive the explicit form for the optimal cost function.

Key words: stochastic control; stopping time; singular control; drift; diffusion

1　引言(Introduction)

本文考虑了一类带停时的奇异型随机控制模型, 这类问题是在原有的奇异型折扣费用模型的费用函数中增加了停时, 最早提出这类问题的是Karatzas[1], 其模型描述如下:

前提条件(A): 设概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P})$, $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$为$\mathscr{F}$的非降子$\sigma$–域族且满足通常条件. 设$W_t(t\geqslant 0)$为$(\mathscr{F}_t)$适应的标准布朗运动. $\mathscr{B}$为$\mathscr{F}_t$适应的左连续有限变差全体. 对任何$\xi=\{\xi_t,t\geqslant 0\}\in\mathscr{B}$有正则分解: $\xi_t=\xi_t^+-\xi_t^-$, 其中$\xi_t^\pm\in\mathscr{B}$为单调非降过程. 令$\check{\xi}\doteq\xi_t^++\xi_t^-$表示$\xi_t,t\geqslant 0$的全变差.

$\forall\ T>0$, 对于初始值$x\in\mathbb{R}$, 关于控制策略$\xi\in\mathscr{B}_T$的折扣费用函数

$$J(x,\xi)=\mathrm{E}[\int_0^T h(X_t)\mathrm{d}t+\check{\xi}_T],\tag{1}$$

其中受控状态过程

$$X_t=x+W_t+\xi_t,t\geqslant 0.\tag{2}$$

目标是找到最优控制$\xi^*\in\mathscr{B}_T$, 使得$J(x,\xi^*)=\inf\limits_{\xi\in\mathscr{B}_T}J(x,\xi)$, 其中: $J(x,\xi)$如式(1).

之后一些研究此类问题的文章[2~4]中均在受控状态过程如(2)的情况下, 将费用函数(1)进行了推广, 在费用函数中增加了停时, 这样在求解最优策略时不但要求出最优控制还要求出最有停止时间. 推广后的费用函数为

$$\begin{aligned}J(x,\tau,\xi)=&\mathrm{E}[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t)\mathrm{d}t+K\mathrm{d}\check{\xi}_t)+\\&\mathrm{e}^{-\alpha\tau}g(X_\tau)],\end{aligned}\tag{3}$$

其中: $\tau\in\mathscr{T}$($\mathscr{T}$为$\mathscr{F}_t$停时全体), α为正常数. 文[2]中$h(\cdot),g(\cdot)$为二次函数, 常数$K=1$. 文[3]将常数K推广成一般的实值函数. 文[4]中$h(\cdot),g(\cdot)$为满足某些性质的实值函数, 常数$K=1$, 但文[4]只研究了退化情形下的控制问题, 即“跳–停”奇异型随机控制问题. 本文是在费用函数如(3)的情况下对受控状态过程(2)进行推广, 增加了漂移因子和扩散因子, 则推

收稿日期: 2008−06−18; 收修改稿日期: 2009−04−28.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70471001); 国家自然科学基金资助项目(70771006); 北京交通大学校基金资助项目(2006XM044).

广后的受控状态过程

$$X_t = x + \int_0^t \mu(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s)\mathrm{d}W_s + \xi_t, t \geqslant 0, \tag{4}$$

其中, 漂移因子$\mu(\cdot)$和扩散因子$\sigma(\cdot)$均为满足某些性质的一般的函数. 对于这样的推广也有相关文献[5~7], 但文[5]中的漂移、扩散因子均为大于零的常数, 即$\mu(x) = \mu > 0, \sigma(x) = \sigma > 0$, 文[6]中的漂移因子$\mu(x) = ax + b$为线性函数. 文[7]中$\mu(\cdot), \sigma(\cdot)$均为满足某些性质的一般的函数, 但是文[7]所研究的费用函数中没有增加停时.

本文所研究的带停时的奇异性随机控制问题无论是折扣费用函数还是受控状态过程都是较为一般的情况, 因此该模型的应用范围更为广泛. 现将本文模型描述如下:

前提条件如(A), 令$\mathscr{T}$为$\mathscr{F}_t$停时全体. $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathscr{B}, \tau \in \mathscr{T}$, 受控状态过程如式(4), 其中$\mu(x), \sigma(x)$满足:

1) $\mu(x)$为$\mathbb{R}$上的连续可微奇函数, 且$\mu(x) < \alpha x, \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mu(x)}{x} = 0, \mu(0) = 0$; $\sigma(x)$为$\mathbb{R}$上的连续可微偶函数, 且$\inf \sigma(x) > 0$; $\mid \mu(x) - \mu(y) \mid + \mid \sigma(x) - \sigma(y) \mid \leqslant k_1 \mid x - y \mid$,且$\mid \mu(x) \mid + \mid \sigma(x) \mid \leqslant k_2(1+ \mid x \mid), x, y \in \mathbb{R}, k_1, k_2$均为正常数.

对于初始值$x \in \mathbb{R}$, 关于控制策略(ξ, τ)的折扣费用函数如式(3), 其中: K, α均为正常数, 函数$h(x), g(x)$满足:

2) 为$\mathbb{R}$上的连续可微非负偶函数, 且$h(0) = 0, h'(x) > 0, x > 0$;

3) $g(x)$为$\mathbb{R}$上的连续可微函数, 且$g'(x) \geqslant K, x > 0$;

4) $\phi(x) = \dfrac{h'(x)}{\alpha - \mu'(x)}$在$\mathbb{R}$上严格递增, 且$\phi(0) = 0$. 设存在常数$\beta > 0$, 使得当$x < \beta$时$\phi(x) < K$; 当$x = \beta$时$\phi(x) = K$, 且$\exists\ M > \beta, \delta_0 > 0$, 当$x > M$时$\phi(x) > K + \delta_0$.

本文的目标是, 找到最优控制$\xi^* \in \mathscr{B}$及最优停时$\tau^* \in \mathscr{T}$, 使得

$$J(x, \tau^*, \xi^*) = \inf_{\xi \in \mathscr{B}, \tau \in \mathscr{T}} J(x, \tau, \xi),$$

其中: $J(x, \tau, \xi)$如式(3). 并且本文希望找到一个$\mathbb{R}$上的二次连续可导函数$V(x)$, 使得$V(x) = J(x, \tau^*, \xi^*)$, 即得到最优费用函数的解析表达式.

此类问题有很强的实际背景, 如跟踪问题, 经济学中的“投入–产出”问题, 投资中的最佳停止问题, 其相关的文章也有不少[8~10].

2 几个结论及引理(Some conclusions and lemmas)

为了得出最优费用函数的解析表达式, 本文首先解决一个停止问题.

设$W_t, t \geqslant 0$同前提条件(A)中所述为$(\mathscr{F}_t)$适应的标准布朗运动, 对某一正常数a, 有费用函数

$$J_a(x) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{-R(\tau_a)} K I_{[\tau_a < \tau_0]} + \int_0^{\tau_a \wedge \tau_0} \mathrm{e}^{-R(t)} h'(Y_t)\mathrm{d}t], x \in [0, a], \tag{5}$$

其中Y_t为式(6)的一个弱解

$$Y_t = x + \int_0^t (\sigma(Y_s)\sigma'(Y_s) + \mu(Y_s))\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(Y_s)\mathrm{d}W_s, t \geqslant 0. \tag{6}$$

常数K, α及函数$h(\cdot), \mu(\cdot), \sigma(\cdot)$均与式(3)中给出的常数和函数一致. $\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : Y_t = a\}$; $\tau_a = +\infty$, 若$\{t \geqslant 0 : Y_t = a\} = \varnothing$. $\tau_0 = \inf\{t \geqslant 0 : Y_t = 0\}$; $\tau_0 = +\infty$, 若$\{t \geqslant 0 : Y_t = 0\} = \varnothing$. $R(t) = \int_0^t (\alpha - \mu'(Y_s))\mathrm{d}s$.

引理 1 设$J_a(x)$如式(5)所确定, Y_t如式(6)所确定, 则$J_a(x)$满足下列常微分方程(7)(8):

$$\frac{\sigma^2(x)}{2} W''(x) + (\sigma(x)\sigma'(x) + \mu(x))W'(x) + (\mu'(x) - \alpha)W(x) + h'(x) = 0,\ x \geqslant 0, \tag{7}$$

$$W(0) = 0,\ W(a) = K. \tag{8}$$

证 设$W_a(x)$为常微分方程(7)(8)的解, 则$\forall\ x \in [0, a]$由Itô公式, 知

$$\mathrm{e}^{-R(\tau_a \wedge \tau_0)} W_a(Y_{\tau_a \wedge \tau_0}) - W_a(x) = \int_0^{\tau_a \wedge \tau_0} \mathrm{e}^{-R(s)} [\frac{\sigma^2(Y_s)}{2} W_a''(Y_s) + (\sigma(Y_s)\sigma'(Y_s) + \mu(Y_s))W_a'(Y_s) + (\mu'(Y_s) - \alpha)W_a(Y_s)]\mathrm{d}s + \int_0^{\tau_a \wedge \tau_0} \mathrm{e}^{-R(s)} \sigma(Y_s)\mathrm{d}W_s,$$

注意到$\mathrm{E}\int_0^{\tau_a \wedge \tau_0} \mathrm{e}^{-R(s)} \sigma(Y_s)\mathrm{d}W_s = 0$, 则上式两端取期望得,

$$W_a(x) = \mathrm{E}\{-\int_0^{\tau_a \wedge \tau_0} \mathrm{e}^{-R(s)} [\frac{\sigma^2(Y_s)}{2} W_a''(Y_s) + (\sigma(Y_s)\sigma'(Y_s) + \mu(Y_s))W_a'(Y_s) + (\mu'(Y_s) - \alpha)W_a(Y_s)]\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-R(\tau_a)} W_a(Y_{\tau_a}) I_{[\tau_a < \tau_0]}\}.$$

再由$W_a(x)$满足式(7)(8)及$Y_{\tau_a} = a$知,

$$W_a(x) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{-R(\tau_a)} K I_{[\tau_a < \tau_0]} + \int_0^{\tau_a \wedge \tau_0} \mathrm{e}^{-R(t)} h'(Y_t)\mathrm{d}t].$$

则由(5)及解的唯一性定理知, $J_a(x)$满足常微分方程(7)和(8). 证毕.

由引理1知道常微分方程(7)(8)的解$W_a(x)$可以表示为式(5)右端, 即

$$W_a(x) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{-R(\tau_a)}KI_{[\tau_a<\tau_0]} + \int_0^{\tau_a\wedge\tau_0}\mathrm{e}^{-R(t)}h'(Y_t)\mathrm{d}t], x\in[0,a]. \quad (9)$$

引理 2 设$W_a(x), x\in(0,a)$如式(9)给出, 则存在$a^*\in(0,\infty)$, 使得$\forall\, x\in(0,a^*)$,有$0<W_{a^*}(x)<K, W'_{a^*}(x)\geqslant 0$, 并且$W'_{a^*}(a^*)=0$.

此引理的证明可以参考文献[7]中Theorem 5.2及Theorem 5.3的证明过程, 其中"$W'_{a^*}(x)\geqslant 0, x\in(0,a^*)$"这个结论在Theorem 5.3中只做了简单的说明, 在这里本文通过下面的引理3对其进行详细的证明.

引理 3 设$W_a(x), x\in(0,a)$如式(9)所确定, 且$0<W_a(x)<1$则$W'_a(x)\geqslant 0, x\in(0,a)$.

证 首先, 由引理1知, $W_a(x)$满足式(7)(8), 且$W_a(0)=0, W_a(a)=1$. 其次,

$$\lim_{x\to 0+}W'_a(x)=W'_a(0+)\geqslant 0.$$

若不然, $W'_a(0+)<0$, 则

$$\forall\,\varepsilon>0, W'_a(x)<0, x\in(0,\varepsilon),$$

即$W_a(x)$在$(0,\varepsilon)$上严格递减, 而$W_a(a)=K$, 所以$\exists\, x_0\in(0,a)$, 使得$W_a(x)$在$x=x_0$取极小值, 且$W_a(x_0)<0$所以$W'_a(x_0)=0$. 再由$W_a(x)$满足式(7)及1)知,

$$\frac{\sigma^2(x_0)}{2}W''_a(x_0)<-h'(x_0)<0,$$

这与$x=x_0$为极小值点矛盾. 由此可得, $W'_a(0+)\geqslant 0$. 即$W_a(x)$在$(0,\varepsilon)$上非降.

下面证明$W'_a(x)\geqslant 0, x\in(0,a)$. 假设$\exists\,\bar{x}\in(0,a)$, 使得$W'_a(\bar{x})<0$, 即$\lim\limits_{x\to\bar{x}}\dfrac{W_a(x)-W_a(\bar{x})}{x-\bar{x}}<0$. 则$\forall\,\varepsilon>0$, 有:

1) 当$x\in(\bar{x}-\varepsilon,\bar{x})$时, $W_a(x)>W_a(\bar{x})$;

2) 当$x\in(\bar{x},\bar{x}+\varepsilon)$时, $W_a(x)<W_a(\bar{x})$.

对于1), 由中值定理知, $\exists\,\eta_1\in(\bar{x}-\varepsilon,\bar{x})$, 使得$W'_a(\eta_1)<0$, 所以$\exists\,\eta'_1\in(\eta_1,\bar{x})$, 使得$0<W_a(\bar{x})<W'_a(\eta'_1)<W'_a(\eta_1)$. 又因为$W_a(0)=0$且$W'_a(0+)\geqslant 0$, 所以在$[0,\eta'_1]$上$W_a(x)$存在最大值且不可能在$0,\eta'_1$上取得. 设最大值点为$x_{\mathrm{M}}$, 则$W'_a(x_{\mathrm{M}})=0$且$W_a(\bar{x})<W_a(\eta'_1)<W_a(x_{\mathrm{M}})$. 同样对于2), $\exists\,\eta_2\in(\bar{x},\bar{x}+\varepsilon)$, 使得$W'_a(\eta_2)<0$. 所以$\exists\,\eta'_2\in(\bar{x},\eta_2)$, 使得$K>W_a(\bar{x})>W'_a(\eta'_2)>W'_a(\eta_2)$. 而$W_a(a)=K$, 所以在$[\eta'_2,a]$上$W_a(x)$存在最小值且不可能在$\eta'_2,a$上取得. 设最小值点为$x_{\mathrm{m}}$, 则$W'_a(x_{\mathrm{m}})=0$且$W_a(\bar{x})>W_a(\eta'_2)>W_a(x_{\mathrm{m}})$.

综合1)、2)的分析知, $x_{\mathrm{M}}<x_{\mathrm{m}}$且$W_a(x_{\mathrm{m}})<W_a(x_{\mathrm{M}})$. 再由式(7)可知,

$$\frac{\sigma^2(x_{\mathrm{M}})}{2}W''_a(x_{\mathrm{M}})=(\alpha-\mu'(x_{\mathrm{M}}))(W_a(x_{\mathrm{M}})-\phi(x_{\mathrm{M}})),$$

$$\frac{\sigma^2(x_{\mathrm{m}})}{2}W''_a(x_{\mathrm{m}})=(\alpha-\mu'(x_{\mathrm{m}}))(W_a(x_{\mathrm{m}})-\phi(x_{\mathrm{m}})).$$

若$W''_a(x_{\mathrm{M}})>0$, 则与x_{M}为极大值点相矛盾. 若$W''_a(x_{\mathrm{M}})\leqslant 0$, 则$W_a(x_{\mathrm{M}})\leqslant\phi(x_{\mathrm{M}})$, 由$\phi(x)$为严格递增函数知, $W_a(x_{\mathrm{m}})<W_a(x_{\mathrm{M}})\leqslant\phi(x_{\mathrm{M}})<\phi(x_{\mathrm{m}})$, 所以$W''_a(x_{\mathrm{m}})<0$与$x_{\mathrm{m}}$为极小值点矛盾. 所以由上述讨论知, $\forall\,x\in(0,a^*)$, 有$W'_a(x)\geqslant 0$, 即$W_a(x)$在$(0,a)$上是单调递增的. 证毕.

引理 4 设α, K为正常数, $\mu(x),\sigma(x),h(x),g(x)$均满足假设1)~4), 且$g(0)=\dfrac{\sigma^2(0)}{2\alpha}W'_{a^*}(0)$, 则存在$\mathbb{R}$上二次连续可导函数$V(x)$及常数$a^*$, $0<a^*<\infty, \forall\,x\in\mathbb{R}$, 使下列变分方程(a)~(d)成立:

(a)

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}V''(x)+\mu(x)V'(x)-\alpha V(x)+h(x)\geqslant 0;$$

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}V''(x)+\mu(x)V'(x)-\alpha V(x)+h(x)=0,$$

$-a^*\leqslant x\leqslant a^*$;

(b) $|V'(x)|\leqslant K$;

(c) $V(x)\leqslant g(x)$;

(d) $V''(x)\geqslant 0$.

证 令

$$V(x)=\int_0^x W_{a^*}(u)\mathrm{d}u+\frac{\sigma^2(0)}{2\alpha}W'_{a^*}(0),\ 0<x\leqslant a^*;$$

$$V(x)=K(x-a^*)+V(a^*), x>a^*;$$

$$V(x)=V(-x),\ x\leqslant 0.$$

其中: $W_{a^*}(x)$如式(9)给出(将式(9)中的a换成a^*), a^*如引理2所确定. 由$V(x)$的构造及引理2知, $V(x)$为$\mathbb{R}$上二次连续可导函数.

1) 当$0<x\leqslant a^*$时, 由式(7)知,

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}V''(x)+\mu(x)V'(x)-\alpha V(x)+h(x)=$$

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}W'_{a^*}(x)+\mu(x)W_{a^*}(x)-\alpha\int_0^x W_{a^*}(u)\mathrm{d}u-\frac{\sigma^2(0)}{2\alpha}W'_{a^*}(0)+h(x)=$$

$$\int_0^x [\frac{\sigma^2(u)}{2} W_a''(u) + (\sigma(u)\sigma'(u) + \mu(u))W_a'(u) + (\mu'(u) - \alpha)W_a(u) + h'(u)]\mathrm{d}u = 0.$$

当$x > a^*$时, 因为

$$0 = \frac{\sigma^2(a^*)}{2} V''(a^*) + \mu(a^*)V'(a^*) - \alpha V(a^*) + h(a^*) = \frac{\sigma^2(a^*)}{2} W_{a^*}'(a^*) + \mu(a^*)W_{a^*}(a^*) - \alpha V(a^*) + h(a^*) = \mu(a^*) - \alpha V(a^*) + h(a^*),$$

再由条件4)知,

$$\frac{\sigma^2(x)}{2} V''(x) + \mu(x)V'(x) - \alpha V(x) + h(x) = K\mu(x) - K\alpha(x - a^*) - \alpha V(a^*) + h(x) = \int_{a^*}^x (\alpha - \mu'(u))(\phi(u) - K)\mathrm{d}u > 0.$$

当$x \leqslant 0$时, $-x \geqslant 0$, 则由$\sigma(x), h(x), V(x)$的偶性及$\mu(x)$的奇性知,

$$\frac{\sigma^2(x)}{2} V''(x) + \mu(x)V'(x) - \alpha V(x) + h(x) = \frac{\sigma^2(-x)}{2} V''(-x) + \mu(-x)V'(-x) - \alpha V(-x) + h(-x) = 0.$$

所以式(a)成立.

2) 当$0 < x \leqslant a^*$时, $V'(x) = W_{a^*}(x) < K$; 当$x > a^*$时, $V'(x) = K$; 当$x \leqslant 0$时, $-x \geqslant 0$; 所以$V'(x) = -V'(-x) \geqslant -K$, 所以$|V'(x)| \leqslant K$, 即式(b)成立.

3) 因为$g'(x) \geqslant K$且$g(0) = V(0)$, 所以

$$V(x) = \int_0^x V'(u)\mathrm{d}u + V(0) \leqslant \int_0^x K\mathrm{d}u + V(0) \leqslant \int_0^x g'(u)\mathrm{d}u + V(0) = g(x) - g(0) + V(0) = g(x).$$

即式(c)成立.

4) 当$0 < x \leqslant a^*$时, $V''(x) = W_{a^*}'(x) > 0$; 当$x > a^*$时, $V''(x) = 0$; 当$x \leqslant 0$时, $-x \geqslant 0$, 所以$V''(x) = V''(-x) \geqslant 0$. 所以式(d)成立. 证毕.

引理 5 适合下列条件的$\mathscr{B}$中过程$\theta^{\pm} = \{\theta_t^{\pm}, t \geqslant 0\}$存在且唯一:

1) $-a^* \leqslant X_t \triangleq x + \int_0^t \mu(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s)\mathrm{d}W_s + \theta_t^+ - \theta_t^- \leqslant a^*, \forall\, t > 0$;

2) θ_t^+在$\{t : X_t \leqslant -a^*\}$之外是平的;

3) θ_t^-在$\{t : X_t \geqslant a^*\}$之外是平的;

在$t = 0$时函数$\theta^{\pm}$可能有跳变, 使得X_{0+}落在区间$[-a^*, a^*]$上, 除此之外, $\theta^{\pm}$是连续的.

此引理的证明参见文献[1].

3 主要定理及对最优控制策略的描述 (The main theorem and the description of the optimal strategy)

定理 1 假定条件1)~4)成立, 则对引理4中确定的二次连续可导函数$V(x)$, $\forall\, \xi \in \mathscr{B}, \tau \in \mathscr{T}$及$x \in \mathbb{R}$, 有$V(x) \leqslant J(x, \tau, \xi) = \mathrm{E}[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}\check{\xi}_t) + \mathrm{e}^{-\alpha\tau} g(X_\tau)]$.

证 由Itô公式知,

$$\mathrm{e}^{-R(\tau)}V(X_\tau) - V(x) = \int_0^\tau \mathrm{e}^{-\alpha t}[\frac{\sigma^2(X_t)}{2} V''(X_t) + \mu(X_t)V'(X_t) - \alpha]V(X_t)\mathrm{d}t + \int_0^\tau \mathrm{e}^{-\alpha t}\sigma(X_t)V'(X_t)\mathrm{d}W_t + \int_0^\tau \mathrm{e}^{-\alpha t}V'(X_t)\mathrm{d}\xi_t + \sum_{0<t\leqslant\tau} \mathrm{e}^{-\alpha t}[\Delta V(X_t) - V'(X_t)\Delta X_t].$$

注意到$\mathrm{E}\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\alpha t}\sigma(X_t)V'(X_t)\mathrm{d}W_t = 0$. 则对上式两边取期望, 并且由引理4知,

$$V(x) \leqslant \mathrm{E}\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\alpha t}h(X_t)\mathrm{d}t + \mathrm{E}\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\alpha t}K\mathrm{d}\xi_t^+ + \mathrm{E}\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\alpha t}K\mathrm{d}\xi_t^- - \mathrm{E}\sum_{0<t\leqslant\tau} \mathrm{e}^{-\alpha t}[V''(\eta)(\Delta X_t)^2] + \mathrm{E}\mathrm{e}^{-R(\tau)}V(X_\tau) \leqslant \mathrm{E}[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}\check{\xi}_t) + \mathrm{e}^{-\alpha\tau}g(X_\tau)], \eta \in (X_t, X_{t+}).$$

证毕.

定理 2 假定条件1)~4)成立, 费用函数由式(3)确定, 受控状态过程由式(4)确定, a^*如引理2中确定, 则相应的最优控制策略为:

当初始值$0 < x \leqslant a^*$时, $\xi_t^* = -\theta_t^-$;

当初始值$x > a^*$时, $\xi_t^* = K(x - a^*)I_{[t=0]} - \theta_t^- I_{[t>0]}$;

当初始值$-a^* \leqslant x \leqslant 0$时, $\xi_t^* = \theta_t^+$;

当初始值$x < -a^*$时, $\xi_t^* = K(-x - a^*)I_{[t=0]} + \theta_t^+ I_{[t>0]}$.

其中$\theta^{\pm}$为引理5中所确定的解; $\tau^* = \inf\{t \geqslant 0 : X_t^* = 0\}$, 其中:

$$X_t^* = x + \int_0^t \mu(X_s^*)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^*)\mathrm{d}W_s + \xi_t^*.$$

并且$V(x) = J(x, \tau^*, \xi^*) = \inf\limits_{\xi\in\mathscr{B}, \tau\in\mathscr{T}} \mathrm{E}[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t)$

$\mathrm{d}t + K\mathrm{d}\check{\xi}_t) + \mathrm{e}^{-\alpha\tau}g(X_\tau)]$.

证　当$0 < x \leqslant a^*$时,

$$J(x,\tau^*,\xi^*) = \mathrm{E}[\int_0^{\tau^*} \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t^*)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}\check{\xi}_t^*) + \mathrm{e}^{-\alpha\tau^*}g(X_{\tau^*})] = \mathrm{E}[\int_0^{\tau^*} \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t^*)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}\theta_t^-) + \mathrm{e}^{-\alpha\tau^*}g(0)].$$

而由Itô公式及式(a)知,

$$V(x) = -\mathrm{E}\int_0^{\tau^*} \mathrm{e}^{-\alpha t}[\frac{\sigma^2(X_t^*)}{2}V''(X_t^*) + \mu(X_t^*)V'(X_t^*) - \alpha V(X_t^*)]\mathrm{d}t + \mathrm{E}\int_0^{\tau^*} \mathrm{e}^{-\alpha t}V'(X_t^*)\mathrm{d}\xi_t^* + \mathrm{E}\mathrm{e}^{-\alpha\tau^*}V(X_{\tau^*}^*) = \mathrm{E}\int_0^{\tau^*} \mathrm{e}^{-\alpha t}h(X_t^*)\mathrm{d}t + \mathrm{E}\int_0^{\tau^*} \mathrm{e}^{-\alpha t}V'(a^*)\mathrm{d}\theta_t^- + \mathrm{E}\mathrm{e}^{-\alpha\tau^*}V(0) = J(x,\tau^*,\xi^*).$$

当初始值$x > a^*$时,

$$J(x,\tau^*,\xi^*) = \mathrm{E}\int_{[0]} \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t^*)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}\check{\xi}_t^*) + \mathrm{E}\int_{[0,\tau^*]} \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t^*)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}\check{\xi}_t^*) + \mathrm{e}^{-\alpha\tau^*}g(X_{\tau^*})] = K(x - a^*) + V(a^*) = V(x);$$

当初值$-a^* \leqslant x \leqslant 0$时,

$$J(x,\tau^*,\xi^*) = \mathrm{E}[\int_0^{\tau^*} \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t^*)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}\check{\xi}_t^*) + \mathrm{e}^{-\alpha\tau^*}g(X_{\tau^*})] = \mathrm{E}[\int_0^{\tau^*} \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t^*)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}\theta_t^+) + \mathrm{e}^{-\alpha\tau^*}g(0)].$$

而同上面的分析,

$$V(x) = -\mathrm{E}\int_0^{\tau^*} \mathrm{e}^{-\alpha t}[\frac{\sigma^2(X_t^*)}{2}V''(X_t^*) + \mu(X_t^*)V'(X_t^*) - \alpha V(X_t^*)]\mathrm{d}t + \mathrm{E}\int_0^{\tau^*} \mathrm{e}^{-\alpha t}V'(X_t^*)\mathrm{d}\xi_t^* + \mathrm{E}\mathrm{e}^{-\alpha\tau^*}V(X_{\tau^*}^*) = \mathrm{E}\int_0^{\tau^*} \mathrm{e}^{-\alpha t}h(X_t^*)\mathrm{d}t + \mathrm{E}\int_0^{\tau^*} \mathrm{e}^{-\alpha t}V'(a^*)\mathrm{d}\theta_t^+ + \mathrm{E}\mathrm{e}^{-\alpha\tau^*}V(0) = J(x,\tau^*,\xi^*);$$

当初值$x < -a^*$时,

$$J(x,\tau^*,\xi^*) = \mathrm{E}\int_{[0]} \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t^*)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}\check{\xi}_t^*) + \mathrm{E}[\int_{[0,\tau^*]} \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t^*)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}\check{\xi}_t^*) + \mathrm{e}^{-\alpha\tau^*}g(X_{\tau^*})] = K(-x - a^*) + V(a^*) = V(x).$$

则综合上述分析及定理1知,

$$V(x) = J(x,\tau^*,\xi^*) = \inf_{\xi\in\mathscr{B},\tau\in\mathscr{T}} \mathrm{E}[\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}\check{\xi}_t) + \mathrm{e}^{-\alpha\tau}g(X_\tau)].$$

证毕.

上述最优控制状态可以描述为, 当初始状态值$0 < x \leqslant a^*$时, 按照自然状态进行, 直到达到a^*时实施控制ξ_1^*, 使之发生瞬时反射, 保持状态在$[0, a^*]$中进行运动, 然后再按照自然状态运动, 直到达到a^*时再实施控制$\xi_2^*, \cdots$, 直到达 0 时停止. 类似的, 当初始状态值$-a^* \leqslant x < 0$时, 按照自然状态进行, 直到达到$-a^*$时实施控制ξ_1^*, 使之发生瞬时反射, 保持状态在$[-a^*, 0]$中进行运动, 然后再按照自然状态运动, 直到达到$-a^*$时再实施控制$\xi_2^*, \cdots$, 直到达到0时停止. 当初始状态值$x > a^*$或$x < -a^*$时, 马上对初始状态实施控制ξ_0^*, 使之跳到$\{-a^*, a^*\}$中最近的状态值, 然后分别按照前两种情况进行.

4 对于费用函数的进一步推广 (The extended cost function)

前面的讨论都是在费用函数如式(3)的情况下进行的, 在式(3)中L-S积分的被积函数为常数K, 现在本文将其推广为一般的函数$f(x)$, 即对于初始值$x \in \mathbb{R}$, 关于控制策略(ξ,τ)的折扣费用函数

$$\tilde{J}(x,\tau,\xi) = \mathrm{E}[\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t)\mathrm{d}t + f(x)\mathrm{d}\check{\xi}_t) + \mathrm{e}^{-\alpha\tau}g(X_\tau)], \tag{10}$$

其中: 函数$h(x), g(x)$满足2)～4), $f(x)$为$\mathbb{R}$上的非负连续偶函数. 下面要说明, 如果$f(x) \geqslant K$的话, 那么对于费用函数为式(3)和式(10)这两种情况下, 控制问题具有同样的最优控制策略.

定理 3　设假定条件1)～4)成立, 受控状态过程由式(4)确定, 费用函数由式(10)确定, a^*如引理2中确定, $f(x)$为$\mathbb{R}$上的非负连续偶函数, 并且$f(x) \geqslant K, f(a^*) = K$, 则其相应的最优控制策略为定理2中所确定的$\tau^*, \xi^*$, 并且$V(x) = \tilde{J}(x,\tau^*,\xi^*) = \inf_{\xi\in\mathscr{B},\tau\in\mathscr{T}} \mathrm{E}[\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t)\mathrm{d}t + f(x)\mathrm{d}\check{\xi}_t) + \mathrm{e}^{-\alpha\tau}g(X_\tau)]$.

证　首先同定理2中的分析知, 最优控制ξ^*状态到达$\pm a^*$时才起作用, 所以

$$\tilde{J}(x,\tau^*,\xi^*) = \mathrm{E}[\int_0^{\tau^*} \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t^*)\mathrm{d}t + f(X_t^*)\mathrm{d}\check{\xi}_t^*) + \mathrm{e}^{-\alpha\tau^*}g(X_{\tau^*})] = \mathrm{E}[\int_0^{\tau^*} \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t^*)\mathrm{d}t + f(\pm a^*)\mathrm{d}\check{\xi}_t^*) + \mathrm{e}^{-\alpha\tau^*}g(X_{\tau^*})] = \mathrm{E}[\int_0^{\tau^*} \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t^*)\mathrm{d}t + K\mathrm{d}\check{\xi}_t^*) + \mathrm{e}^{-\alpha\tau^*}g(0)] =$$

$J(x,\tau^*,\xi^*)$.

另一方面, 由定理1, $f(x)\geqslant K$及上式知,

$$\tilde{J}(x,\tau,\xi)=$$
$$\mathrm{E}[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t)\mathrm{d}t+f(x)\mathrm{d}\check{\xi}_t)+\mathrm{e}^{-\alpha\tau}g(X_\tau)]\geqslant$$
$$\mathrm{E}[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\alpha t}(h(X_t)\mathrm{d}t+K\mathrm{d}\check{\xi}_t)+\mathrm{e}^{-\alpha\tau}g(X_\tau)]\geqslant$$
$$J(x,\tau^*,\xi^*)=\tilde{J}(x,\tau^*,\xi^*).$$

所以$V(x)=\tilde{J}(x,\tau^*,\xi^*)=\inf\limits_{\xi\in\mathscr{B},\tau\in\mathscr{T}}\tilde{J}(x,\tau,\xi)$. 由此可以看出定理2与定理3两种情形下的最优控制策略是一致的.

参考文献(References):

[1] KARATZAS I. A class of singular stochastic control problems[J]. *Advances in Applied Probability*, 1983, 15(2): 225 – 254.

[2] DAVIS M H A, ZERVOS M. A problem of singular stochastic control with discretionary stopping[J]. *The Annal of Applied Probability*, 1994, 4(1): 226 – 240.

[3] 黎锁平, 杨海波. 费用结构一般化的"跳–停"奇异型随机控制[J]. 工程数学学报, 2005, 22(4): 673 – 678.
(LI Suoping, YANG Haibo. "Fail-stop" singular stochastic control problem with general cost structure[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2005, 22(4): 673 – 678.)

[4] 刘向丽, 刘坤会. 一类带停时的最优控制策略研究[J]. 数学的实践与认识, 2006, 36(6): 193 – 199.
(LIU Xiangli, LIU Kunhui. The research on a class of optimal control strategy problem with stopping[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2006, 36(6): 193 – 199.)

[5] 于洋. 一类带停时的奇异型随机控制问题的研究[J]. 应用数学, 2008, 21(2): 326 – 330.
(YU Yang. A class of singular stochastic control with stopping time[J]. *Mathematic Application*, 2008, 21(2): 326 – 330.)

[6] MA J. On the principle of smooth fit for a class of singular stochastic control problems for diffusions[J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1992, 30(4): 957 – 999.

[7] WEERASINGHE A. Minimizing infinite time horizon discounted cost with mean, variance, and bounded variation controls[J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2003, 42(4): 1395 – 1415.

[8] 刘坤会. 一类奇异型折扣费用模型之推广[J]. 系统科学与数学, 1989, 9(2): 113 – 123.
(LIU Kunhui. A class of extended singular models of discounted problems[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 1989, 9 (2): 113 – 123.)

[9] THOMAS S K, BERNHARD M, ZERVOS M. Valuation of investments in real assets with implication for the stock prices[J]. *SIAM Journal Control and Optimization*, 1998, 36(6): 2028 – 2102.

[10] DUCKWORTH J K, ZERVOS M. An investment model with entry and exit decisions[J]. *Journal of Applied Probability*, 2000, 37(2): 547 – 559.

[11] FRIEDMAN A. *Stochastic Differential Equations and Applications*[M]. New York: Academic Press, 1975.

[12] 严加安. 鞅与随机积分引论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1981.
(YAN Jiaan. *Martingale and Stochastic Integral*[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Publishing, 1981.)

作者简介:

于 洋 (1981—), 女, 博士研究生, 目前研究方向为随机分析、随机控制理论及其应用, E-mail: 06118309@bjtu.edu.cn;

王秋媛 (1965—), 女, 博士研究生, 副教授, 目前研究方向为随机控制、金融管理, E-mail：qywang@bjtu.edu.cn;

赵生变 (1958—), 女, 研究生, 副教授, 目前研究方向为概率论及其应用、随机控制, E-mail: shbzhao@bjtu.edu.cn.