

# 磁浮列车搭接结构的非线性解耦控制

刘恒坤, 郝阿明, 常文森

(国防科技大学 磁悬浮技术研究中心, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 磁浮列车的搭接结构是一个多输入多输出的非线性系统, 对该系统进行稳定控制是确保磁浮列车可靠性的关键. 本文采用微分几何方法对系统解耦; 采用反馈线性化方法对解耦后的系统进行线性化, 确保了系统的全局稳定性; 对线性化之后的系统采用极点配置的方法进行控制律设计, 使系统的动态性能达到一定的指标; 最后给出了应用此方法的一个实际例子.

**关键词:** 磁悬浮列车; 非线性解耦控制; 全局稳定

**中图分类号:** U237; U266.4      **文献标识码:** A

## Nonlinear decoupling control of the join-structure in a maglev train

LIU Heng-kun, HAO A-ming, CHANG Wen-sen

(Engineering Research Center of Maglev, National University of Defense Technology, Changsha Hunan 410073, China)

**Abstract:** The join-structure of maglev train is a multiple-input and multiple-output(MIMO) nonlinear system; the smooth control of which plays an important role in the reliability of the maglev train. The system is decoupled by using the differential geometry theory. The decoupled system is then linearized through feedback linearization method, which ensures the global stability of the system. In order to guarantee the dynamic property of the system, the pole-displacement method is applied to the decoupled and linearized system. Finally, an example is given to illustrate the control approach.

**Key words:** maglev train; nonlinear decoupling control; globally stable

### 1 引言(Introduction)

磁悬浮系统的用途非常广泛<sup>[1]</sup>, 其中磁悬浮列车的发展相当迅速. 为了确保磁悬浮列车的悬浮安全, 在悬浮方向采取了搭接结构装置, 运用两个控制点来悬浮一个物理点的技术. 当其中的一个控制点出现故障时, 同一搭接结构上的另一个控制点还能确保列车稳定悬浮. 由于同一个搭接结构上的两个控制点是强耦合的, 解耦控制是搭接结构稳定悬浮的关键. 解耦控制方法很多: 求逆矩阵法<sup>[2,3]</sup>、相对放大系数匹配法<sup>[4]</sup>、对角优势法<sup>[5]</sup>、状态反馈法<sup>[6]</sup>、自适应解耦法<sup>[7,8]</sup>、智能解耦法<sup>[9,10]</sup>、非线性及鲁棒解耦<sup>[11,12]</sup>. 其中, 处理非线性系统解耦问题最有效的数学工具是微分几何方法以及微分代数方法. 本文采用微分几何的方法对磁悬浮搭接结构系统进行解耦, 实现了搭接结构的稳定悬浮控制.

### 2 建模(Modeling)

为了简化系统模型, 使得所设计出的控制律更加

容易实现, 这里不考虑轨道弹性和空气弹簧对系统性能影响, 搭接结构的示意图1所示<sup>[13]</sup>, 图形中左右两端子系统的系统参数完全相同, 在图中以及后续内容中将涉及到的各符号的物理意义如下:

设定间隙 $s_0$ , 悬浮间隙 $s_1, s_2$ , 悬浮质量 $m$ , 重力加速度 $g$ , 电磁力 $F_1, F_2$ , 电磁铁的端电压 $u_1, u_2$ , 电磁铁的输入电流 $i_1, i_2$ , 线圈匝数 $N$ , 线圈电阻 $R$ , 电磁铁的单边极面积 $A$ , 空气磁导率 $\mu_0$ , 耦合刚度系数 $k_r$ .

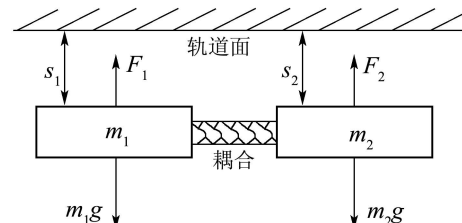


图 1 搭接结构示意图

Fig. 1 Sketch of join-structure

系统的数学模型如下<sup>[13]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = g - kx_3^2/mx_1^2 - k_r(x_1 - x_4)/m, \\ \dot{x}_3 = x_2x_3/x_1 - Rx_1x_3/2k + x_1u_1/2k, \\ \dot{x}_4 = x_5, \\ \dot{x}_5 = g - kx_6^2/mx_4^2 + k_r(x_1 - x_4)/m, \\ \dot{x}_6 = x_5x_6/x_4 - Rx_4x_6/2k + x_4u_2/2k. \end{cases} \quad (1)$$

其中:

$$\begin{aligned} x_1 &= s_1, x_2 = y_1, x_3 = i_1, \\ x_4 &= s_2, x_5 = y_2, x_6 = i_2. \end{aligned}$$

### 3 非线性理论(Nonlinear theory)

下面简单介绍解耦控制理论<sup>[14]</sup>.

**定义 1** 设开集:  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x \in U$ , 在  $U$  上给出一个光滑标量函数  $\lambda(x)$  和一个  $n$  维的向量场  $f(x)$ , 下面定义一个新的标量函数, 记为  $L_f\lambda(x)$ :

$$L_f\lambda(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2)$$

这样定义的新函数称为  $\lambda(x)$  对  $f(x)$  的李导数. 此函数可以进行重复运算. 例如,  $\lambda(x)$  先沿  $f(x)$  再沿  $g(x)$  的李导数为

$$L_g L_f \lambda(x) = \frac{\partial (L_f \lambda)}{\partial x} g(x), \quad (3)$$

或者,  $\lambda(x)$  沿  $f(x)$   $k$  次的李导数为

$$L_f^k \lambda(x) = d(L_f^{k-1} \lambda) f(x). \quad (4)$$

**定义 2** 多输入多输出系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i, \\ y_j = h_j(x), j \in \underline{m}. \end{cases} \quad (5)$$

它的相对阶  $r_i(x_0)$  是使

$$L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(x_0) \neq 0, j = 1, \dots, m.$$

而且, 当  $k < r_i - 1$  时:

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x_0) = 0, j = 1, \dots, m.$$

**引理 1** 如果一个多变量非线性系统在  $x_0$  对于所有的  $i \in \underline{m}$  具有一个相对阶  $r_i$ , 那么它的解耦矩阵  $A(x)$ :

$$\begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \quad (6)$$

在  $x_0$  处是非奇异的.

**引理 2** 如果非线性系统在  $x_0$  点具有相对阶,

即解耦矩阵  $A(x)$  在  $x_0$  点非奇异, 那么系统的输入输出解耦问题在  $x_0$  附近可以通过一个静态状态反馈解决, 问题的一个解是如下矩阵所定义的反馈:

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (7)$$

$$\alpha(x) = -A^{-1}(x)b(x), \quad (8)$$

$$b(x) = [L_f^{r_1} h_1(x) \dots L_f^{r_m} h_m(x)]^T. \quad (9)$$

## 4 解耦和线性化(Decoupling and linearization)

### 4.1 解耦(Decoupling)

本系统在实验所研究的范围内是可逆的<sup>[13]</sup>, 从而可以采用微分几何的方法对本系统进行控制方法的设计, 由定义 2, 可以得出系统解耦所需要的函数表达式:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ g - kx_3^2/mx_1^2 - k_r(x_1 - x_4)/m \\ x_2x_3/x_1 - Rx_1x_3/2k \\ x_5 \\ g - kx_6^2/mx_4^2 + k_r(x_1 - x_4)/m \\ x_5x_6/x_4 - Rx_4x_6/2k \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$g_1(x) = [0 \ 0 \ x_1/2k \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (11)$$

$$g_2(x) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ x_4/2k]^T, \quad (12)$$

$$y_1 = h_1(x) = x_1, \quad (13)$$

$$y_2 = h_2(x) = x_4. \quad (14)$$

由引理 1, 2 求出系统的解耦矩阵:

$$A(x) = \begin{bmatrix} -x_3/mx_1 & 0 \\ 0 & -x_6/mx_4 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$b(x) = \left[ \frac{Rx_3^2}{mx_1} - \frac{k_r}{m}(x_2 - x_5) \quad \frac{Rx_6^2}{mx_4} + \frac{k_r}{m}(x_2 - x_5) \right], \quad (16)$$

$$\alpha(x) = \begin{bmatrix} Rx_3 - k_r x_1(x_2 - x_5)/x_3 \\ Rx_6 + k_r x_4(x_2 - x_5)/x_6 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\beta(x) = \begin{bmatrix} -mx_1/x_3 & 0 \\ 0 & -mx_4/x_6 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

进而可以求出解耦控制规律:

$$u_1 = Rx_3 - \frac{k_r x_1}{x_3}(x_2 - x_5) - \frac{mx_1}{x_3} v_1, \quad (19)$$

$$u_2 = Rx_6 + \frac{k_r x_4}{x_6}(x_2 - x_5) - \frac{mx_4}{x_6} v_2. \quad (20)$$

### 4.2 线性化(Linearization)

至此, 已经实现了系统解耦, 为了将解耦后的系

统线性化, 做如下变量替换:

$$z_1 = x_1, z_2 = x_2, z_3 = \dot{z}_2, \quad (21)$$

$$z_4 = x_4, z_5 = x_5, z_6 = \dot{z}_5. \quad (22)$$

从而可得解耦后的系统模型, 解耦后系统成为两个完全相同的子系统, 由于篇幅限制, 这里不便给出解耦后的系统. 其中一个子系统的状态空间矩阵如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T. \quad (23)$$

由于两个解耦后的子系统在形式上完全相同, 因此这里只对第 1 个子系统进行控制器设计即可.

### 5 控制律设计(Control law design)

这里的控制算法设计是指对式(23)所描述的子系统而言, 为了便于实现, 采用状态反馈控制方法, 反馈控制规律如下<sup>[15]</sup>:

$$v_1 = k_1(z_1 - z_{01}) + k_2z_2 + k_3z_3. \quad (24)$$

将反馈校正之后的系统性能设计为: 超调为 5%, 调节时间为 0.1 s. 可以求出设计系统的特征方程:

$$s^3 + 280s^2 + 19358s + 6715420 = 0. \quad (25)$$

而将反馈控制(24)代入到线性化以后的子系统(23), 可得闭环系统的特征方程:

$$s^3 - k_3s^2 - k_2s - k_1 = 0. \quad (26)$$

为了系统性能满足设计要求, 使式(25)与式(26)相同, 反馈控制参数取如下值:

$$k_1 = -671542, k_2 = -19358, k_3 = -280.$$

由式(19) (21) (24)可以求出搭接结构第 1 个子系统的最终控制规律:

$$u_1 = Rx_3 - k_r x_1(x_2 - x_5)/x_3 - \frac{mx_1}{x_3} \begin{bmatrix} k_1(x_1 - s_0) + k_2x_2 + k_3g \\ -kx_3^2/mx_1^2 - k_r(x_1 - x_4)/m \end{bmatrix}. \quad (27)$$

同样可以求出第 2 个子系统的控规律.

### 6 仿真和实验(Simulation and experiment)

某磁浮列车的系统参数如下:

$$\begin{aligned} k &= 0.00545, m = 725 \text{ kg}, \\ s_0 &= 0.012 \text{ m}, R = 4.44 \Omega, \\ g &= 9.8 \text{ m/s}^2, k_r = 1.236 \times 10^7 \text{ N/m}. \end{aligned}$$

耦合刚度 $k_r$ 通过有限元方法计算得到, 当搭接结构中的某一点突然断电时, 另外一个控制点的间隙

和电流仿真结果如图 2 所示.

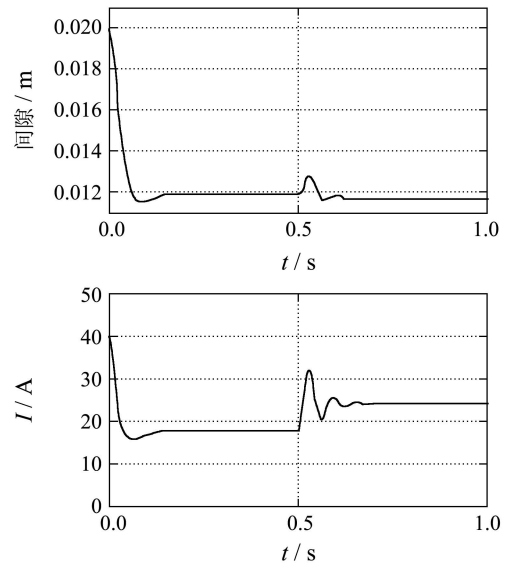


图 2 间隙和电流仿真结果

Fig. 2 Simulation result of air-gap and current

当某一点突然断电时, 另外一个控制点的间隙变化和电流实验结果如图 3 所示.

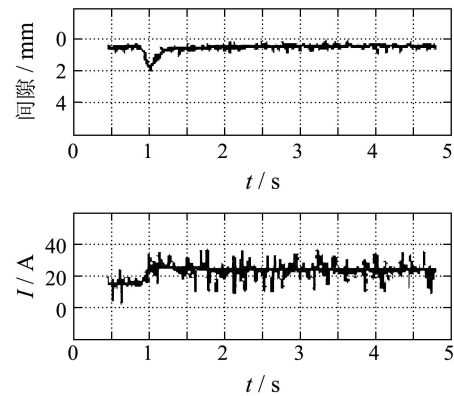


图 3 间隙变化和电流实验结果

Fig. 3 Experiment results of air-gap variety and current

由仿真结果图 2 可以看出: 当其中一点突然断电时, 另外一点的电流会从 18 A 迅速增加到 24 A 左右; 悬浮间隙的最大变化量只有 0.5 mm 左右.

由实验结果图 3 可以看出: 搭接结构上的某一个悬浮点突然断电, 另外一个悬浮点的电流大约由 17 A 迅速增加到 22 A 左右; 悬浮间隙的最大变化量为 1.6 mm 左右. 由于积分环节作用, 悬浮间隙最终会恢复到原来的值. 由于仿真模型与实际系统有一定偏差, 另外检测的电流信号是经过滤波处理的, 这对电流幅值具有一定影响, 因此实验和仿真中的电流和间隙变化有一定的出入.

## 7 结论(Conclusion)

本文建立了磁浮列车搭接结构的非线性模型. 针对这个非线性耦合模型, 利用非线性状态反馈方法进行解耦和线性化. 在对系统解耦线性化后, 利用极点配制方法进行控制器设计. 对本文所设计的控制方法进行了仿真分析和实验验证. 仿真和实验证明, 采用本文所述的控制方法, 同一个搭接结构上的两个悬浮点可以同时稳定悬浮; 而且当其中的一个点出现故障时, 另一个点仍然能够保证搭接结构稳定, 从而确保了搭接结构冗余功能的实现.

## 参考文献(References):

- [1] SUNGJUN JOO, SEO J H. Design and analysis of the nonlinear feedback linearizing control for an electromagnetic suspension system[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1996, 5(1): 135 – 144.
- [2] KAVANAGH R J. Multivariable control system synthesis[J]. *AIEE Transactions on Applications and Industry*, 1958, 77(II): 425 – 429.
- [3] WEISCHEDL K, MCAVOY T J. Feasibility of decoupling in conventionally controlled distillation columns[J]. *Industrial and Engineering Chemistry*, 1980, 19(4): 167 – 172.
- [4] SHISKOY F G. The stability of interacting control loops with and without decoupling[C] // *Proceedings IFAC multivariable Technological System Cont 4th International Symposium*. [S.l.]: [s.n.], 1977: 21 – 30.
- [5] ROSEBROCK H H. Design of multivariable control system using inverse Nyquist array[J]. *IEEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 1969, 116(11): 1929 – 1936.
- [6] ELMER G G. The decoupling of multivariable systems by state feedback[J]. *SIAM Journal on Control*, 1969, 7(1): 50 – 63.
- [7] NARENDRA K, PARTHASARATHY K. Identification and control of dynamic systems using neural networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1990, 1(1): 4 – 27.
- [8] HENRIQUEST J, DOURADO A. A Multivariable adaptive control using a recurrent neural network[C] // *Proceedings of Engineering Applications of Neural Networks*. Gibraltar: [s.n.], 1998: 118 – 121.
- [9] MORARI M. *Advances in Model Predictive Control Conference*[M]. Oxford: Oxford University Press, 1994: 22 – 27.
- [10] SHAW A, DOYLE F. Multivariable non-linear control applications for a high purity distillation column using a recurrent dynamic neuron model[J]. *Journal of Process Control*, 1997, 7(4): 255 – 268.
- [11] CHIANG R Y, SAFONOV M G, HAIGES K, et al. A fixed controller for a super maneuverable fighter performing the Herbst maneuver[J]. *Automatica*, 1993, 29(1): 111 – 127.
- [12] CHAN W, ANDERSON R, BEAME P, et al. Decoupling synchronization from local control for efficient symbolic model checking of state charts[C] // *Proceedings of the 1999 International Conference on Software Engineering(ICSE99)*. Los Angeles, USA: [s.n.], 1999: 142 – 151.
- [13] 刘恒坤. EMS型高速磁浮列车双转向架搭接结构的悬浮控制问题研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2005.
- [14] 夏小华. 非线性系统控制及解耦[M]. 北京: 科学出版社, 1993: 23 – 86.
- [15] 吴麒. 自动控制原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990: 31 – 122.

## 作者简介:

**刘恒坤** (1975—), 男, 讲师, 主要进行磁悬浮控制系统研究, E-mail: liberry@sina.com;

**郝阿明** (1979—), 男, 博士研究生, 主要研究磁悬浮系统的悬浮控制;

**常文森** (1935—), 男, 教授, 研究领域包括磁悬浮系统和机器人系统.