

基于分数阶微积分PD^λ比例导引制导规律

王 飞, 雷虎民

(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

摘要: 为了继承和发扬传统PID比例导引的优点, 同时弥补其不足, 本文在扩展PID比例导引制导律的基础上, 提出了分数阶微积分PD^λ比例导引律. 首先介绍了分数阶微积分的定义、性质及其数值方法, 分析了分数阶微积分PD^λ比例导引制导系统的静态误差和制导灵敏度, 研究了分数阶微积分PD^λ比例导引律的弹道特性和控制器特性, 最后结合仿真分析得出结论: PD^λ控制器对其本身参数和被控对象参数的变化都不敏感, 具有更强的鲁棒性, PD^λ比例导引律提高了导弹制导系统的性能, 提高了导弹的命中精度.

关键词: 分数阶微积分; PD^λ比例导引律; PID比例导引律; 静态误差和制导灵敏度

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

PD^λ guidance law based on fractional calculus

WANG Fei, LEI Hu-min

(Missile College, Air Force Engineering University, Sanyuan Shaanxi 713800, China)

Abstract: To carry forward the advantages of the PID guidance law and avoid its flaws, we employ the fractional PD^λ guidance law. The elementary knowledge of fractional calculus, such as definitions, properties and numerical methods are outlined. Both the static inaccuracy and the sensitivity of the guidance system are analyzed. The performance of the control and the ballistic trajectory are studied theoretically. Numerical simulations results show that the fractional order guidance law are not sensitive to the changes of control parameters and controlled object parameters. At the same time, it has more flexible structure and stronger robustness. The fractional calculus demonstrates prospects of being a useful tool for improving the missile performance.

Key words: fractional calculus; PD^λ guidance law; PID guidance law; stability of the trajectory

1 引言(Introduction)

制导规律的研究可以追溯到20世纪40年代, 人们在大量飞行实践的基础上总结出了三点法、平行接近法、比例导引法等古典制导规律, 其中, 比例导引律由于可以有效的对付机动不大的目标, 且实施简单, 因而至今仍被广泛应用, 但是传统的比例导引具有两个缺点: 一是攻击大机动目标的控制精度差; 二是指令加速度过载大, 因此目前对比例导引法改进形式的研究较多, 其核心思想是在比例导引基础上对导弹的加速度、重力加速度及目标的机动影响进行了补偿.

分数微积分把微积分的阶次推广到分数领域, 但因其计算复杂, 所以一直只是在数学上做理论研究. 自从贝塞尔函数和伽马函数, 以及用该类函数来求解一些微分方程的出现以后, 分数阶微积分的研究才有一些进展, 但仍然显得比较零星. 由于分数阶微

积分特有的优点, 分数阶微积分已经在生物、材料力学、自动控制等方面得到应用. 本文针对分数阶微积分理论在飞行器控制器设计方面的优点, 在扩展的PID比例导引制导规律的基础上, 首次提出了分数阶微积分PD^λ比例导引律, 并对PD^λ比例导引的相关特性进行了理论研究和仿真分析.

2 分数阶微积分的定义(Definitions of fractional calculus)

对于分数阶微积分, 通常有如下的统一标识:

$${}_αD_t^λ = \begin{cases} d^λ/dt^λ, & R(λ) > 0, \\ 1, & R(λ) = 0, \\ \int_0^t (dt)^{-λ}, & R(λ) < 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $α, t$ 为运算的上下限, $λ$ 为微积分算子的阶次, 其值可以为任意复数. 如果 $λ > 0$, 则 ${}_αD_t^λ$ 表示分数阶导数. 分数阶微积分定义有许多种, 这里主要介

绍Caputo定义. Caputo微分定义为:

$$D_t^\lambda = \frac{1}{\Gamma(m-\lambda)} \int_0^t \frac{f^m(\tau)}{(t-\tau)^{\lambda-m+1}} d\tau, \quad (2)$$

其中 $\Gamma(x)$ 是伽马函数, 是阶乘函数 $n!$ 推广.

分数阶系统与整数阶系统相比主要有以下优点:

- 1) 分数阶系统是整数阶系统的推广, 后者只是前者的特例, 因而前者也具有后者的一些性质, 如也有传递函数、状态方程描述;
- 2) 分数阶系统具有记忆功能, 这是分数阶系统特有的;
- 3) 分数阶线性系统更易稳定;
- 4) 分数阶控制器参数选择范围更大.

3 分数阶微积分比例导引律及其制导系统特性分析(PD^λ guidance law and its property analysis)

在传统PID比例导引的基础上, 结合导弹的飞行特性, 设计了一种分数阶微积分PD^λ比例导引律:

$$U_{PD^\lambda}(t) = k_1 a + k_2 D_t^\lambda a, \quad (3)$$

其中: $a = \dot{q}$ 为视线角速度量, $D_t^\lambda a$ 表示对函数 a 的分数阶微分.

3.1 分数阶微积分比例导引制导系统的静误差分析(Static inaccuracy analysis of PD^λ guidance system)

根据小偏量运动学模型, 假设导弹自动驾驶仪/弹体的传递函数为 $G(s)$, 且

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + 1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1}, n > m. \quad (4)$$

由运动学模型, PD^λ比例导引律及自动驾驶仪/弹体构成的寻的回路如图1所示.

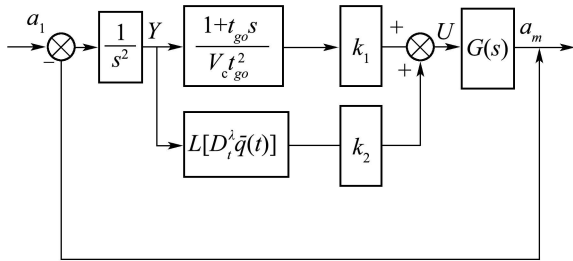


图 1 PD^λ型比例导引寻的回路

Fig. 1 Target-seeking loop of PD^λ guidance system

若 $\frac{U(s)}{Y(s)} = G_1(s)$, 则可以得到:

$$G_1(s) = k_1 \frac{1 + st_{go}}{V_c t_{go}^2} + s^\lambda \frac{1 + st_{go}}{V_c t_{go}^2} + h^{-\lambda} \sum_{j=0}^{[\frac{\lambda}{h}]} \omega_j^{\lambda-1} \frac{2 + st_{go}}{V_c t_{go}^3} + h^{-\lambda} \sum_{j=0}^{[\frac{\lambda}{h}]} \omega_j^{\lambda-2} \frac{s + s^2 t_{go}}{V_c t_{go}^3}. \quad (5)$$

$$\text{令 } \tilde{k}_2 = k_2 h^{-\lambda} \sum_{j=0}^{[\frac{\lambda}{h}]} \omega_j^\lambda,$$

$$K_{PD^\lambda}^\alpha = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{1}{s^2} G_1(s) G(s) = \frac{1}{V_c t_{go}^3} (k_1 t_{go} + 2\tilde{k}_2). \quad (6)$$

由于

$$K_{PN}^\alpha = \frac{k_1 t_{go}}{V_c t_{go}^3}, K_{PD}^\alpha = \frac{k_1 t_{go} + 2k_2}{V_c t_{go}^3},$$

通过数值分析可知 $K_{PD^\lambda}^\alpha > K_{PD}^\alpha > K_{PN}^\alpha$, 这种关系说明: PD^λ型比例导引对目标机动的系统误差小, 即分数阶微分项的引入提供了对机动目标的导引能力.

3.2 分数阶微积分比例导引制导系统的制导灵敏度分析(Sensitivity analysis of PD^λ guidance system)

1) 制导系统参数的灵敏度.

系统 T 对 K 的灵敏度定义如下:

$$S_K^T = \frac{d(\ln(T))}{d(\ln(K))}. \quad (7)$$

经过推导, 稳态时的系统灵敏度为:

$$S_{k_1}^e = -\frac{k_1 t_{go}}{k_1 t_{go} + 2k_2}, S_{k_2}^e = -\frac{k_2}{k_1 t_{go} + 2k_2}.$$

对比例导引: $S_k^e = -1$, 则

$$|S_k^e| > |S_{k_1}^e|, |S_k^e| > |S_{k_2}^e|,$$

以上关系说明, 采用PD^λ型比例导引, 系统对每个制导参数(k_1, k_2)的灵敏度都小于比例导引.

2) 自动驾驶仪参数的灵敏度.

由于

$$\frac{dG_e(s)}{dG(s)} = -\frac{s^2 G_1(s)}{[s^2 + G_1(s)G(s)]^2}, \quad (8)$$

$$\frac{dG(s)}{db_i} = \frac{s^i}{P(s)}, i = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

$$\frac{dG(s)}{da_j} = -\frac{G(s)s^j}{P(s)}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

故知:

$$S_{b_i}^e = E(s) \frac{b_i s^i}{P(s)}, i = 1, 2, \dots, m, \quad (11)$$

$$S_{a_j}^e = -E(s) G(s) \frac{a_j s^j}{P(s)}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

其中

$$E(s) = -\frac{G(s)}{s^2 + G_1(s)G(s)}, \quad (13)$$

令 $s = 0$ 有:

$$\left. \frac{S_{b_i}^e}{s^i} \right|_{s=0} = -\frac{b_i}{k_1 t_{go} + 2k}, i = 1, 2, \dots, m, \quad (14)$$

$$\left. \frac{S_{a_j}^e}{s^j} \right|_{s=0} = -\frac{a_j}{k_1 t_{go} + 2k}, j = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

$$\left. \frac{S_{b_i}^e}{s^i} \right|_{s=0}^{PN} = -\frac{b_i}{k_1 t_{go}}, i = 1, 2, \dots, m, \quad (16)$$

$$\left. \frac{S_{a_j}^e}{s^j} \right|_{s=0}^{PN} = -\frac{a_j}{k_1 t_{go}}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

显而易见, PD^λ型比例导引对自动驾驶仪参数灵敏度的绝对值小于比例导引对自动驾驶仪参数灵敏度的绝对值, 也就是说, PD^λ型比例导引具有较高的抗自动驾驶仪参数变化的能力。

4 分数阶微积分比例导引控制器特性和弹道特性理论分析(Theoretical analysis of the PD^λ guidance controller's characteristics and trajectory characteristics)

4.1 平均控制量分析(Theoretical analysis of controller's quantity)

PD^λ比例导引平均控制量为:

$$\bar{U}_{PD^\lambda}(t) = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} (k_1 a + k_2 D_t^\lambda a) dt, \quad (18)$$

$\bar{U}_{PD^\lambda}(t)$ 可以分为两个部分: $\bar{U}_{PD^\lambda}(t) = U_1 + U_2$,

$$U_1 = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} k_1 a dt = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} k_1 \dot{q} dt = \frac{k_1(q_f - q_0)}{t_f}, \quad (19)$$

$$U_2 = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} k_2 D_t^\lambda a dt =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_2}{t_f} \int_0^{t_f} h^{-\lambda} \sum_{j=0}^{[\frac{t}{h}]} \omega_j^\lambda a(t - jh) dt =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_2}{t_f} h^{-\lambda} \sum_{j=0}^{[\frac{t}{h}]} \omega_j^\lambda \int_0^{t_f} \dot{q}(t - jh) dt \simeq$$

$$\frac{k_2}{t_f} h^{-\lambda} \sum_{j=0}^{[\frac{t}{h}]} \omega_j^\lambda (q_f - q_0). \quad (20)$$

若令 $\tilde{k}_2 = k_2 h^{-\lambda} \sum_{j=0}^{[\frac{t}{h}]} \omega_j^\lambda$, 则

$$U_2 \simeq \frac{\tilde{k}_2(q_f - q_0)}{t_f},$$

$$\bar{U}_{PD^\lambda}(t) = U_1 + U_2 = \frac{\tilde{k}_2(q_f - q_0)}{t_f} + \frac{k_1(q_f - q_0)}{t_f} =$$

$$\frac{(q_f - q_0)}{t_f} (k_1 + \tilde{k}_2). \quad (21)$$

PN比例导引平均控制量为:

$$\bar{U}_{PN} = \frac{k V_c(q_f - q_0)}{t_f}, \quad (22)$$

PID比例导引平均控制量为:

$$\bar{U}_{PID} = \frac{k V_c(q_f - q_0)}{t_f} [2 - a(t)] - \frac{k V_c \dot{q}_0}{2}, \quad (23)$$

$$0 < a(t) < 2.$$

从上式(20)~(22)可以发现, PD^λ型比例导引、比例导引和PID比例导引的平均控制量均与视线角增量成比例, 视线角增量较小时, 平均控制量就下降. 通过数值分析, 这几种比例导引的平均控制量接近.

4.2 弹道的平直性分析(Analysis of the flatness of the trajectory)

弹道的平直性与视线角增量($q_f - q_0$)密切相关, 如果能保证视线角总增量维持较小的量值, 则导弹的弹道就比较平直, 过载要求就下降, 脱靶量减少. 导弹的前置角为:

$$\eta_m = q - \theta_m, \dot{\eta}_m = \dot{q} - \dot{\theta}_m.$$

假设制导方程为:

$$\dot{\theta}_m = k_1 a + k_2 D_t^\lambda a,$$

则有:

$$\eta_{mf} =$$

$$\eta_{m0} + (1 - k_1)(q_f - q_0) - k_2 \int_0^{t_f} D_t^\lambda a dt =$$

$$\eta_{m0} + (1 - k_1)(q_f - q_0) - k_2 h^{-\lambda} \sum_{j=0}^{[\frac{t}{h}]} \omega_j^\lambda (q_f - q_0). \quad (24)$$

又因为 $\eta_{mf} = \sin^{-1}[\frac{V_t \sin \eta_{tf}}{V_m}]$, $\eta_{m0} = 0$

令 $\tilde{k}_2 = k_2 h^{-\lambda} \sum_{j=0}^{[\frac{t}{h}]} \omega_j^\lambda$, 则有:

$$\eta_{mf} = (1 - k_1)(q_f - q_0) - \tilde{k}_2(q_f - q_0), \quad (25)$$

$$(q_f - q_0) = \frac{1}{(1 - k_1 - \tilde{k}_2)} \sin^{-1}[\frac{V_t \sin \eta_{tf}}{V_m}], \quad (26)$$

$$(q_0 - q_f)|_{PD^\lambda} = \frac{1}{(k_1 + \tilde{k}_2 - 1)} \sin^{-1}[\frac{V_t \sin \eta_{tf}}{V_m}], \quad (27)$$

$$(q_0 - q_f)|_{PN} = \frac{1}{(k_1 - 1)} \sin^{-1}[\frac{V_t \sin \eta_{tf}}{V_m}]. \quad (28)$$

则 $|(q_0 - q_f)|_{PN} > |(q_0 - q_f)|_{PD^\lambda}$, 从而可以得到结论: PD^λ比例导引通过引入视线加速度项和视线加速度的分数阶微分保证了弹道的平直.

4.3 弹道稳定性分析(Analysis of the stability of the trajectory)

假设导弹和目标在同一攻击平面内运动, 则可以得到弹目相对运动关系:

$$\dot{R} = V_T \cos(q - \theta_T) - V_M \cos(q - \theta_M), \quad (29)$$

$$R\dot{q} = V_M \sin(q - \theta_M) - V_T \sin(q - \theta_T). \quad (30)$$

其中: R 为弹目相对距离; V_T 为目标速度矢量; V_M 为导弹速度矢量; θ_T 为目标航向角; θ_M 为导弹弹道角; q 为目标视线角.

对式(29)进行微分, 即可得到:

$$R\ddot{q} + 2\dot{R}\dot{q} = \dot{V}_M \sin(q - \theta_M) - \dot{V}_T \sin(q - \theta_T) + V_T \dot{\theta}_T \cos(q - \theta_T) - V_M \dot{\theta}_M \cos(q - \theta_M). \quad (31)$$

假定 \dot{V}_M , \dot{V}_T 和 $\dot{\theta}_T$ 都很小, 近似为0, 则有

$$\frac{\dot{q}}{\dot{\theta}_M} = \frac{-V_M \cos(q - \theta_M)}{R\dot{s} + 2\dot{R}} = \frac{-K_{DN}}{T_{DN}s - 1}. \quad (32)$$

其中: $K_{DN} = \frac{-V_M \cos(q - \theta_M)}{2|\dot{R}|}$, $T_{DN} = \frac{R}{2|\dot{R}|}$.

由此得出:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{-K_{DN}}{T_{DN}s - 1} \dot{\theta}_M, \\ \dot{\theta}_M = k_1 \dot{q} + k_2 \dot{q}^\lambda. \end{cases} \quad (33)$$

则可以得出当弹体稳定回路为无惯性时制导控制回路的特征方程为:

$$K_{DN}k_2s^\lambda + T_{DN}s + K_{DN}k_1 - 1 = 0. \quad (34)$$

由劳斯稳定判据得出弹道稳定的充要条件为

$$\begin{cases} K_{DN}k_2 > 0, \\ T_{DN} > 0, K_{DN}k_1 - 1 > 0. \end{cases} \quad (35)$$

由于 $k_1, k_2 > 0$, 所以有 $\cos(q - \theta_M) > 0.4$, 则对于弹体稳定回路是无惯性系统的情况, 只要导弹的弹道倾角和视线角的差在 $-65^\circ \sim 65^\circ$, 该拦截制导的弹道就是稳定的.

5 仿真分析(Simulation and analysis)

对本文提出的PD^λ比例导引律进行仿真分析, 并与PD型比例导引律及比例导引法进行比较. 仿真想定时间为0.01 s, 其它仿真条件如表1所示, 仿真结果见表2、表3.

通过仿真计算, 可以看出本文提出的PD^λ比例导引律算法与PD型比例导引律及比例导引法相比, 可以攻击高速高机动目标, 满足指标要求, 脱靶量小, 且弹体过载要求低, 性能优越.

表 1 仿真实定条件

Table 1 The simulation background

仿真条件	1)	2)
导弹运动	匀速	匀速
目标运动	匀速	圆弧机动(8 G)
导弹速度	800 m/s	800 m/s
目标速度	500 m/s	500 m/s

表 2 仿真条件1) 制导规律性能评估

Table 2 The guidance performance in the simulation background 1)

制导规律	脱靶量/m	攻击时间/s
比例导引法	2.78	2.53
PD比例导引	0.29	2.53
分数阶比例导引	0.14	2.53

表 3 仿真条件2) 制导规律性能评估

Table 3 The guidance performance in the simulation background 2)

制导规律	脱靶量/m	攻击时间/s
比例导引法	2.13	9.25
PD比例导引	0.154	9.2
分数阶比例导引	0.141	9.17

对一个制导规律的评价除了要求很高的性能之外, 更重要的是它必须具备可实现性, PD比例导引和PID比例导引中, 都需要测量视线加速度项, 而一般的导引头没有办法直接测量, 采用微分的方法又会因为噪声存在而带来许多困难. 相对传统PID比例导引律, PD^λ型比例导引通过数值方法对视线角速度的分数阶的微分处理, 很好的解决了视线加速度项的估计问题, 并可以证明步长 h 足够小, 数值方法的精度为 $O(h)$. 同时, 分数阶微分控制器本身也是一个滤波器, 能够提高控制精度和系统的稳定性, 在噪声条件下, PD^λ型比例导引可以比较容易的转化为PD比例导引, 从而发挥比例导引抗强噪声的优点.

6 结论(Conclusion)

本文利用分数阶微积分理论把传统的PID控制器的阶次推广到分数领域, 设计一种新的分数阶微积分PD^λ比例导引律, 这种导引律能继承和发扬传统PID比例导引的优点, 同时能弥补其不足. 通过理论研究, 不难发现: 分数阶微积分理论在飞行制导系统设计中是一个有用的工具, 由此而设计的分数阶微积分比例导引律对其本身参数和被控对象参数的变化都不敏感, 具有更灵活的结构和更强的鲁棒性; 分数阶微积分比例导引律提高了导弹制导系统的性能, 提高了导弹的命中精度.

参考文献(References):

[1] ENGHEETA N. On the role of fractional calculus in electromagnetic theory[J] *Antennas & Propagation Magazine*, 1997, 12(2): 35 - 46.
 [2] AHMAD W M, SPOTT J C. Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems[J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2003(2): 339 - 351.

- [3] STIASSNIE M. On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic models[J]. *Applied Mathematical Modeling*, 1979(4), 300 – 302.
- [4] INGMAN D, SUZDALNITSKY J. Application of dynamic fractional differentiation to study of oscillating viscoelastic medium with cylindrical cavity[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*. 2002(4): 642 – 644.
- [5] LEU J F, TSAY S Y, HWANG C. Design of optimal fractional-order PID controllers[J]. *Journal of the Chinese Institute of Chemical Engineers*. 2002(2): 193 – 202.
- [6] MACHADO J A T. Analysis and design of fractional-order digital control systems[J]. *Systems Analysis Modeling Simulation*. 1997(2/3): 107 – 122.

作者简介:

- 王 飞 (1981—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为飞行器制导与控制技术, E-mail: wangfei810918@163.com;
- 雷虎民 (1960—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为飞行器制导与控制技术.

下 期 要 目

- 时滞Chen混沌系统的指数同步及在保密通信中的应用.....谢英慧, 孙增圻
- 带有无穷分布时滞的不确定系统的鲁棒 H_∞ 滤波器设计.....马大中, 王占山, 冯 健, 张化光
- 自适应平方根UKF算法.....李 鹏, 宋申民, 陈兴林
- 非参数不确定性非线性系统的自适应观测器设计.....陈彭年, 秦化淑, 张 洁
- 非完整移动机器人的人工势场法路径规划.....朱 毅, 张 涛, 宋靖雁
- 一种新的粒子滤波算法在INS/GPS组合导航系统中的应用.....向 礼, 刘 雨, 苏宝库
- 基于PSO优化的非线性系统LS-SVM预测控制方法.....穆朝絮, 张瑞民, 孙长银
- 欠驱动船舶路径跟踪的神经网络稳定自适应控制.....刘 杨, 郭 晨, 沈智鹏, 刘 雨, 郭 迪
- 时变内耦合复杂网络的平衡态同步smart变结构控制.....杨月全, 余星火, 张天平
- 仿人智能控制及其在磁流变半主动悬架中的应用.....董小闵, 李祖枢, 余 淼, 廖昌荣, 陈伟民
- 喷水推进无人艇的基础运动控制系统设计.....吴恭兴, 邹 劲, 万 磊, 孙寒冰
- 基于模糊树模型的自适应模糊滑模控制方法.....张 伟, 毛剑琴
- 带有执行器故障的网络控制系统的自适应容错 H_∞ 控制.....邓玮瑾, 费敏锐
- 链式STATCOM的非线性双输出解耦控制.....郑 宏, 陈灵奎, 郭 凯