文章编号: 1000−8152(2011)05−0698−05

高阶Sylvester矩阵方程的解析通解

于海华[1,2], 段广仁[2]

(1. 黑龙江大学 自动化系，黑龙江 哈尔滨 150080;

2. 哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术研究中心, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 给出了矩阵方程$A_{m_1}VJ^{m_1}+\cdots+A_1VJ+A_0V=B_{m_2}WJ^{m_2}+\cdots+B_1WJ+B_0W$的3种完全解析参数通解. 这些解由一组参数向量给出, 这些参数向量提供了问题的全部自由度. 求解算法不要求矩阵J具有不同的特征值, 或者和$A(s)$的特征值不同. 这些通解仅包含数值矩阵计算, 为工程应用计算提供了方便. 算例说明本文所给方程通解的有效性.

关键词: 矩阵方程; 解析通解; 特征值; 若当标准型

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

The analytical general solutions to the higher-order Sylvester matrices equation

YU Hai-hua[1,2], DUAN Guang-ren[2]

(1. Department of Automation, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang 150080, China;
2. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: Three completely analytical parametric solutions to the matrices equation $A_{m_1}VJ^{m_1}+\cdots+A_1VJ+A_0V=B_{m_2}WJ^{m_2}+\cdots+B_1WJ+B_0W$ are presented. These solutions are expressed in terms of parameter vectors, which provide the design degrees of freedom. These approaches do not require the eigenvalues of J to be distinct or to be different from the roots of $A(s)$. Moreover, the obtained solutions contain only numerical matrix calculations, which provide convenience for the computation of these solutions in applications. A numerical example validates the proposed approaches.

Key words: matrix equation; analytical general solution; eigenvalue; Jordan canonical form

1 引言(Introduction)

高阶线性系统的设计问题, 如特征结构配置[1,2], 观测器设计[3]等, 均与下述推广高阶Sylvester矩阵方程的求解有关：

$$\begin{aligned}&A_{m_1}VJ^{m_1}+\cdots+A_1VJ+A_0V=\\&B_{m_2}WJ^{m_2}+\cdots+B_1WJ+B_0W,\end{aligned}\tag{1}$$

其中: $V\in\mathbb{C}^{n\times m}$, $W\in\mathbb{C}^{r\times m}$是待求的矩阵, $J\in\mathbb{C}^{m\times m}$是Jordan标准型, $A_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $i=0,1,2,\cdots,m_1$, $B_i\in\mathbb{R}^{n\times r}$, $i=0,1,2,\cdots,m_2$, 是已知矩阵, 并且满足假设：

假设 1　$\operatorname{rank}[A(s)\ \ B(s)]=n, \forall s\in\mathbb{C}$, 其中

$$A(s)=s^{m_1}A_{m_1}+\cdots+sA_1+A_0,$$
$$B(s)=s^{m_2}B_{m_2}+\cdots+sB_1+B_0.$$

显然, 当$m_2=0$, $m_1=2$或1时, 高阶Sylvester矩阵方程(1)分别退化为二阶或一阶Sylvester矩阵方程.

许多年来, 关于一阶Sylvester矩阵方程的求解问题一直受到人们的关注, 对于不同的情形, 已经有了多种方法[4~13]. 随着二阶线性系统特征结构配置理论的发展, 有一些学者开始研究二阶Sylvester矩阵方程, 并获得了一系列成果[14~17].

近年来, 高阶系统的特征结构配置问题得到了关注, 因此和其相关的高阶Sylvester矩阵方程的求解问题也随之得到发展. 文[18]中定义了多项式矩阵的F-互质, 给出了$m_2=0$时高阶Sylvester矩阵方程有解的条件, 并且对于J为任意矩阵或Jordan标准型两种情况, 分别给出了方程解的形式. 文[19]同样在$m_2=0$, J为Jordan标准型的情形下, 给出了高阶Sylvester矩阵方程的一种解析通解.

本文将m_2推广到任意的正整数, 在J为Jordan标准型的情况下, 给出了方程(1)的3种通解. 这些解具

收稿日期: 2007−08−30; 收修改稿日期: 2010−06−25.
基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目 (69925308).

有形式简单、计算方便的优点.

2 问题的解(Solutions)

不失普遍性, 本文只考虑J为若当型矩阵的情形. 记矩阵J具有如下形式:

$$J = \mathrm{diag}\{J_1, J_2, \cdots, J_q\} \in \mathbb{C}^{m\times m},$$

其中

$$J_i = \begin{bmatrix} s_i & 1 & & \\ & s_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & s_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{p_i\times p_i},$$
$$i = 1, 2, \cdots, q.$$

令

$$\begin{aligned} V &= [\,V_1\ V_2\ \cdots\ V_q], \\ W &= [W_1\ \ W_2\ \cdots\ W_q], \\ V_i &= [v_{i1}\ \ v_{i2}\ \cdots\ v_{ip_i}] \in \mathbb{C}^{n\times p_i}, \\ W_i &= [w_{i1}\ \ w_{i2}\ \cdots\ w_{ip_i}] \in \mathbb{C}^{r\times p_i}. \end{aligned}$$

为了给出矩阵方程(1)的解析通解, 下面的引理首先给出矩阵方程(1)的向量表述形式.

引理 1 高阶矩阵方程(1)可以写成如下的矩阵向量形式:

$$\begin{cases} \sum\limits_{h=0}^{k-1} \dfrac{1}{h!}\Theta_{ihk}^{(h)}(s_i) = 0, \\ k = 1, 2, \cdots, p_i, i = 1, 2, \cdots, q, \end{cases} \tag{2}$$

其中

$$\Theta_{ihk}(s) = A(s)v_{i(k-h)} - B(s)w_{i(k-h)},$$

$\Theta_{ihk}^{(h)}(s)$ 表示矩阵多项式$\Theta_{ihk}(s)$的h次导数.

2.1 闭环系统特征值未知情形(Case of undetermined s_i)

2.1.1 解析解1(Analytical solution 1)

当假设1满足时, 存在幺模阵$P(s) \in \mathbb{C}^{n\times n}[s]$, $Q(s) \in \mathbb{C}^{(n+r)\times(n+r)}[s]$, 使得下式成立:

$$P(s)[A(s)\ \ -B(s)]Q(s) = [0\ \ I_n]. \tag{3}$$

利用引理1中给出的矩阵方程(1)向量表示形式, 可以得到下面的结论:

定理 1 当假设1满足时, 高阶Sylvester矩阵方程(1)的全部解由下述公式给出:

$$\begin{bmatrix} v_{ik} \\ w_{ik} \end{bmatrix} = Q(s_i) \begin{bmatrix} f_{ik} \\ -P(s_i)\sum\limits_{h=1}^{k-1}\dfrac{1}{h!}\Theta_{ihk}^{(h)}(s_i) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

其中$P(s)$, $Q(s)$满足式(3), $f_{ik} \in \mathbb{C}^r$, $k = 1, 2, \cdots, p_i$, $i = 1, 2, \cdots, q$,为一组任意选取的参数向量.

下面给出某些特殊的条件下, 对于上面结论的简化结果.

推论 1 若$m_2 = 0$, 则高阶Sylvester矩阵方程式(1)的通解由下述公式给出[19]:

$$\begin{bmatrix} v_{ik} \\ w_{ik} \end{bmatrix} = Q(s_i) \begin{bmatrix} f_{ik} \\ -P(s_i)\sum\limits_{h=1}^{k-1}\dfrac{1}{h!}A^{(h)}(s_i)v_{i(k-h)} \end{bmatrix},$$

其中$P(s)$, $Q(s)$满足(3)式, $f_{ik} \in \mathbb{C}^r$, $k = 1, 2, \cdots, p_i$, $i = 1, 2, \cdots, q$,为一组任意选取的参数向量.

推论 2 若J为非退化Jordan标准型, 即$J = \mathrm{diag}\{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$, 则高阶Sylvester矩阵方程(1)的通解由下述公式给出:

$$\begin{aligned} V &= [v_1\ \ v_2\ \ \cdots\ \ v_m], \\ W &= [w_1\ \ w_2\ \ \cdots\ \ w_m], \\ \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} &= Q(s_i)\begin{bmatrix} f_i \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中$Q(s)$满足(3)式, $f_i \in \mathbb{C}^r$, $i = 1, 2, \cdots, m$,为一组任意选取的参数向量.

2.1.2 解析解2(Analytical solution 2)

令 $$Q(s) = \begin{bmatrix} N(s) & * \\ D(s) & * \end{bmatrix},$$

其中$N(s) \in \mathbb{C}^{n\times r}[s]$, $D(s) \in \mathbb{C}^{r\times r}[s]$, 不难证明

$$A(s)N(s) - B(s)D(s) = 0. \tag{5}$$

基于引理1, 可以给出以下的定理:

定理 2 当假设1满足时, 高阶Sylvester矩阵方程(1)的通解由下述公式给出:

$$\begin{bmatrix} v_{ik} \\ w_{ik} \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{l!}\begin{bmatrix} N^{(l)}(s_i) \\ D^{(l)}(s_i) \end{bmatrix} f_{i(k-l)}, \tag{6}$$
$$k = 1, 2, \cdots, p_i,\ i = 1, 2, \cdots, q,$$

其中$N(s)$, $D(s)$满足(5)式, $f_{ik} \in \mathbb{C}^r$为一组任意选取的参数向量.

同第1种解的情况类似, 下面给出定理2的特殊情况.

推论 3 若J为非退化Jordan标准型, 则高阶Sylvester矩阵方程(1)的通解由下述公式给出:

$$\begin{aligned} V &= [v_1\ \ v_2\ \ \cdots\ \ v_m], \\ W &= [w_1\ \ w_2\ \ \cdots\ \ w_m], \\ \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} N(s_i) \\ D(s_i) \end{bmatrix} f_i,\ i = 1, 2, \cdots, m, \end{aligned}$$

其中$N(s)$, $D(s)$满足式(5), $f_i \in \mathbb{C}^r$为一组任意选取的参数向量.

2.2 闭环系统特征值给定情形(Case of prescribed s_i)

因假设1成立, 对给定的闭环系统特征值s_i, $i=1,2,\cdots,q$, 有下式成立:

$$\operatorname{rank}[A(s_i)\ \ B(s_i)]=n,$$

当特征值s_i给定时, 且矩阵$[A(s_i)\ \ B(s_i)]$是常数阵, 此时可通过奇异值分解获得单模阵$\bar{P}_i\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\bar{Q}_i\in\mathbb{C}^{(n+r)\times(n+r)}$, 满足

$$\bar{P}_i[A(s_i)-B(s_i)]\bar{Q}_i=[0\ \ \Sigma_i]. \tag{7}$$

基于引理1, 可以给出以下的定理.

定理 3 假设1满足时, 高阶Sylvester矩阵方程(1)的通解由下述公式给出:

$$\begin{bmatrix}v_{ik}\\w_{ik}\end{bmatrix}=\bar{Q}_i\begin{bmatrix}f_{ik}\\-\Sigma_i^{-1}\bar{P}_i\sum\limits_{h=1}^{k-1}\dfrac{1}{h!}\Theta_{ihk}^{(h)}(s_i)\end{bmatrix}, \tag{8}$$

其中$\bar{P}_i,\bar{Q}_i$满足式(7), $f_{ik}\in\mathbb{C}^r$, $k=1,2,\cdots,p_i$, $i=1,2,\cdots,q$, 为一组任意选取的参数向量.

定理3的证明类似于定理1(见附录B), 因此本文不再详细论述.

定理3的结论存在下面两种特殊情况.

推论 4 若$m_2=0$, 则高阶Sylvester矩阵方程(1)的通解由下述公式给出:

$$\begin{bmatrix}v_{ik}\\w_{ik}\end{bmatrix}=\bar{Q}_i\begin{bmatrix}f_{ik}\\-\bar{P}_i\sum\limits_{h=1}^{k-1}\dfrac{1}{h!}A^{(h)}(s_i)v_{i(k-h)}\end{bmatrix},$$

其中$\bar{P}_i,\bar{Q}_i$满足式(7), $f_{ik}\in\mathbb{C}^r$, $k=1,2,\cdots,p_i$, $i=1,2,\cdots,q$,为一组任意选取的参数向量.

推论 5 若J为非退化Jordan标准型, 即$J=\operatorname{diag}\{s_1,s_2,\cdots,s_m\}$, 则高阶Sylvester矩阵方程(1)的通解由下述公式给出:

$$V=[v_1\ \ v_2\ \ \cdots\ \ v_m],$$
$$W=[w_1\ \ w_2\cdots\ \ w_m],$$
$$\begin{bmatrix}v_i\\w_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N_i\\D_i\end{bmatrix}f_i,$$

其中, $f_i\in\mathbb{C}^r$, $i=1,2,\cdots,m$,为一组任意选取的参数向量, $N_i\in\mathbb{C}^{n\times r}$, $D_i\in\mathbb{C}^{r\times r}$满足

$$\bar{Q}_i=\begin{bmatrix}N_i & *\\D_i & *\end{bmatrix}.$$

3 例子(Example)

考虑三阶矩阵方程

$$A_3VJ^3+A_2VJ^2+A_1VJ+A_0V=B_1WJ+B_0W,$$

其中:

$$A_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&2&0\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\2&0&0\\4&0&-1\end{bmatrix},$$

$$A_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\4&6&2\end{bmatrix},\ A_0=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},\ B_0=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\2&0\end{bmatrix},$$

并且

$$J=\operatorname{diag}\{J_1,J_2,J_3\}\in\mathbb{C}^{6\times6},\ J_1=-1,$$

$$J_2=\begin{bmatrix}-2&1\\0&-2\end{bmatrix},\ J_3=\begin{bmatrix}-4&1&0\\0&-4&1\\0&0&-4\end{bmatrix}.$$

可以找到如下一组满足式(3)的$P(s)$和$Q(s)$:

$$P(s)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-s&s^2-2&1\end{bmatrix},$$

$$Q(s)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\s^4+3s&2s^5&0&0&-1\\s^4+2s^2+3s&2s^5+2s^3+3s&0&-1&-1\\q_1(s)&q_1(s)&-1&s&s-2\end{bmatrix},$$

其中

$$q_1(s)=-s^5+2s^4-s^3-3s^2+6s+1,$$
$$q_2(s)=-2s^6+4s^5-2s^4-2s^2.$$

令$f_{ik}=\begin{bmatrix}\alpha_{ik}^1\\\alpha_{ik}^2\end{bmatrix}$, 根据定理1, 可得

$$\begin{bmatrix}v_{i1}\\w_{i1}\end{bmatrix}=Q(s_i)\begin{bmatrix}f_{i1}\\0_{3\times1}\end{bmatrix},\ i=1,2,3,$$

$$\begin{bmatrix}v_{i2}\\w_{i2}\end{bmatrix}=Q(s_i)\begin{bmatrix}f_{i2}\\P(s_i)\Omega_1(s_i)v_{i1}\end{bmatrix},\ i=2,3,$$

$$\begin{bmatrix}v_{33}\\w_{33}\end{bmatrix}=Q(s_3)\begin{bmatrix}f_{32}\\P(s_3)\left(\Omega_1(s_3)v_{32}+\Omega_2(s_3)v_{31}\right)\end{bmatrix},$$

$$\Omega_1(s)=A_1+2sA_2+3s^2A_3,$$
$$\Omega_2(s)=A_2+3sA_3.$$

特别地, 如果选取

$$f_{11}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ f_{21}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ f_{22}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

$$f_{31}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ f_{32}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ f_{33}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

可以计算出:

$$V=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ -2 & -64 & 160 & -1804 & 259 & -428\end{bmatrix},$$

$$W=\begin{bmatrix}0 & -86 & 187 & -1912 & 202 & -459\\ -4 & -296 & 776 & -11303 & 3294 & -2960\end{bmatrix}.$$

参考文献(References):

[1] DUAN G R. Parametric approaches for eigenstructure assignment in high-order linear systems[J]. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2005, 3(3): 419 – 429.

[2] DUAN G R, YU H H. Complete eigenstructure assignment in high-order descriptor linear systems via proportional plus derivative state feedback[C] //*Proceeding of the 6th World Congress on Control and Automation*. Dalian, China: IEEE, 2006, 1: 500 – 505.

[3] DUAN G R, YU H H, Observer design in high-order descriptor linear systems[C] //*SICE-ICASE International Joint Conference*. Busan, Korea：IEEE, 2006: 870 – 875.

[4] TSUI C C. A complete analytical solution to the equation *TA−FT=LC* and its applications[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, 32(8): 742 – 744.

[5] LUENBERGER D G. Canonical forms for linear multivariable systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, 12(3): 290 – 293.

[6] KONSTANTINOV M, PETKOV P, CHRISTOV N. Syntheses of linear systems with desired equivalent form[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1980, 6(1): 27 – 35.

[7] DUAN G R. Solutions to matrix equation *AV+BW=VF* and their application to eigenstructure assignment in linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, 38(2): 276 – 280.

[8] 段广仁. 矩阵方程 *AV+BW=VF* 的两种解析通解[J]. 应用数学, 1994, 7(1): 78 – 80.
(DUAN Guangren. Two analytical general solutions of the equation *AV+BW=VF*[J]. *Applied Mathematic*, 1994, 7(1): 78 – 80.)

[9] DUAN G R. On the solution to Sylvester matrix equation *AV+BW=EVF* [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(4): 612 – 614.

[10] 张彪, 段广仁. 矩阵方程*AV+BW=EVF*的一种新的解析通解[J]. 数学物理学报, 2004, 24A(3): 342 – 347.
(ZHANG Biao, DUAN Guangren. A new analytical general solutions of the equation*AV+BW=EVF*[J]. *Acta Mathmatica Scientia*, 2004, 24A(3): 342 – 347.)

[11] 张彪, 段广仁. 矩阵方程*AV+BW=VF*的一种新的解析通解[J]. 应用数学, 2002, 15(2)：26 – 28.
(ZHANG Biao, DUAN Guangren. A new analytical general solutions of the equation *AV+BW=VF*[J]. *Applied Mathematic,* 2002, 15(2)：26 – 28.)

[12] WU A G, DUAN G R. Solution to the generialised Sylvester matrix equation $AV+BW=EVF$[J]. *IET Control Theory and Application*, 2007, 1(1): 402 – 408.

[13] 周彬, 段广仁. 矩阵方程$AX-EXY=BY$的通解及其应用[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(2):193 – 199
(ZHOU Bin, DUAN Guangren. General solutions to the matrix equation $AX-EXY=BY$ and their applications[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(2): 193 – 199.)

[14] NICHOLS N K, KAUTSKY J. Robust eigenstructure assignment in quadratic matrix polynomials: nonsingular case[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applicaitons*, 2001, 23(1): 77 – 102.

[15] DUAN G R, Parametric eigenstructure assignment in second-order descriptor linear system[J]. *IEEE Transacitons On Automatic Control*, 2004, 49(10): 1789 – 1795.

[16] WANG G S, DUAN G R. Disturbance decoupling with the minimum sensitivity in linear systems[C] //*International Conference on Control Science and Engineering*. Harbin, China: IEEE, 2003, ICCSE-Con-03.

[17] 段广仁, 王国胜. 矩阵方程$EVJ^2+AVJ+CV=BW$的两种解析通解[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2004, 37(1): 2 – 15.
(DUAN Guangren, WANG Guosheng. Two analytical general solutions of the matrix equation $EVJ^2+AVJ+CV=BW$[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2004, 37(1): 2 – 15.)

[18] DUAN G R. Gereralized Sylvester matrix equations in control systems theory[C]. *Proceedings of 2005 Chinese Control and Decision Conference*. Harbin, China: Northeastern University Press, 2005: 32 – 57.

[19] 于海华, 段广仁. 高阶矩阵方程$A_mVF^m+\cdots+A_1VF+A_0F=BW$的一种解析通解[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2007, 24(1): 63 – 67.
(YU Haihua, DUAN Guangren. A analytical general solution of the high-order matrix equation $A_mVF^m+\cdots+A_1VF+A_0F=BW$[J]. *Journal of Natural Science of Heilongjiang University*, 2007, 24(1): 63 – 67.)

附录 A 引理1的证明 (Appendix A Proof of Lemma 1)

考虑到J的形式, 结合(1)式可以得到

$$\sum_{l=0}^{m_1}A_lV_iJ_i^l=\sum_{l=0}^{m_2}B_lW_iJ_i^l. \tag{9}$$

容易验证

$$\begin{aligned}A_lV_iJ_i^l=[&\sum_{h=0}^{0}\frac{l!}{h!(l-h)!}s_i^{l-h}A_lv_{i(1-h)}\quad\cdots\\&\sum_{h=0}^{p_i-1}\frac{l!}{h!(l-h)!}s_i^{l-h}A_lv_{i(p_i-h)}],\\B_lW_iJ_i^l=[&\sum_{h=0}^{0}\frac{l!}{h!(l-h)!}s_i^{l-h}B_lw_{i(1-h)}\quad\cdots\\&\sum_{h=0}^{p_i-1}\frac{l!}{h!(l-h)!}s_i^{l-h}B_lw_{i(p_i-h)}].\end{aligned}$$

因此, 将式(9)按列展开, 可以得到

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{m_1}\sum_{h=0}^{k-1}\frac{l!}{h!(l-h)!}s_i^{l-h}A_lv_{i(k-h)}-\\&\sum_{l=0}^{m_2}\sum_{h=0}^{k-1}\frac{l!}{h!(l-h)!}s_i^{l-h}B_lw_{i(k-h)}=0\\&k=1,2,\cdots,p_i,\ i=1,2,\cdots,q.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\sum_{h=0}^{k-1}\frac{1}{h!}{\Theta_{ihk}}^{(h)}(s_i)=\\&\sum_{h=0}^{k-1}\frac{1}{h!}A^{(h)}(s)v_{i(k-h)}-\sum_{h=0}^{k-1}\frac{1}{h!}B^{(h)}(s)w_{i(k-h)}=\\&\sum_{h=0}^{k-1}\frac{1}{h!}\left(\sum_{l=0}^{m_1}\frac{l!}{(l-h)!}s_i^{l-h}A_l\right)v_{i(k-h)}-\\&\sum_{h=0}^{k-1}\frac{1}{h!}\left(\sum_{l=0}^{m_2}\frac{l!}{(l-h)!}s_i^{l-h}B_l\right)w_{i(k-h)}=\end{aligned}$$

$$\sum_{l=0}^{m_1}\sum_{h=0}^{k-1}\frac{l!}{h!(l-h)!}s_i^{l-h}A_l v_{i(k-h)}-$$
$$\sum_{l=0}^{m_2}\sum_{h=0}^{k-1}\frac{l!}{h!(l-h)!}s_i^{l-h}B_l w_{i(k-h)}=0.$$

由此可以证明引理1成立.

附录 B 定理1的证明(Appendix B Proof of Theorem 1)

首先证明式(4)是方程(1)的解. 将式(2)变形, 并将式(4)代入其中, 得到

$$\sum_{h=0}^{k-1}\frac{1}{h!}\Theta_{ihk}^{(h)}(s_i)=$$
$$\sum_{h=1}^{k-1}\frac{1}{h!}\Theta_{ihk}^{(h)}(s_i)+A(s_i)v_{ik}-B(s_i)w_{ik}=$$
$$\sum_{h=1}^{k-1}\frac{1}{h!}\Theta_{ihk}^{(h)}(s_i)+[A(s_i)\ \ -B(s_i)]\begin{bmatrix}v_{ik}\\ w_{ik}\end{bmatrix}=$$
$$\sum_{h=1}^{k-1}\frac{1}{h!}\Theta_{ihk}^{(h)}(s_i)+[A(s_i)\ \ -B(s_i)]\times$$
$$Q(s_i)\begin{bmatrix}f_{ik}\\ -P(s_i)\sum_{h=1}^{k-1}\frac{1}{h!}\Theta_{ihk}^{(h)}(s_i)\end{bmatrix}=$$
$$\sum_{h=1}^{k-1}\frac{1}{h!}\Theta_{ihk}^{(h)}(s_i)+$$
$$P^{-1}(s_i)[0\ \ I]\begin{bmatrix}f_{ik}\\ -P(s_i)\sum_{h=1}^{k-1}\frac{1}{h!}\Theta_{ihk}^{(h)}(s_i)\end{bmatrix}=0.$$

由此可以证明式(4)是方程(1)的解.

下面证明满足方程(1)的任意一组解都可以由(4)式给出. 假设(2)式成立, 则

$$[A(s_i)\ \ -B(s_i)]\begin{bmatrix}v_{ik}\\ w_{ik}\end{bmatrix}=-\sum_{h=1}^{k-1}\frac{1}{h!}\Theta_{ihk}^{(h)}(s_i),\tag{10}$$

将上式两边同时左乘$P(s_i)$, 得到

$$P(s_i)[A(s_i)\ \ -B(s_i)]\begin{bmatrix}v_{ik}\\ w_{ik}\end{bmatrix}=-P(s_i)\sum_{h=1}^{k-1}\frac{1}{h!}\Theta_{ihk}^{(h)}(s_i).$$

如果记

$$\begin{bmatrix}f_{ik}\\ g_{ik}\end{bmatrix}=Q^{-1}(s_i)\begin{bmatrix}v_{ik}\\ w_{ik}\end{bmatrix},\ k=1,2,\cdots,p_i,\ i=1,2,\cdots,q,\tag{11}$$

则由式(3)和(10)可得

$$[0\ \ I]\begin{bmatrix}f_{ik}\\ g_{ik}\end{bmatrix}=-P(s_i)\sum_{h=1}^{k-1}\frac{1}{h!}\Theta_{ihk}^{(h)}(s_i).$$

由此可以推出

$$g_{ik}=-P(s_i)\sum_{h=0}^{k-1}\frac{1}{h!}\Theta_{ihk}^{(h)}(s_i),$$

将其代入式(11), 并在两边同时左乘$Q(s_i)$, 即得到式(4).

证毕.

附录 C 定理2的证明(Appendix C Proof of Theorem 2)

首先证明由公式(6)给出的向量满足方程(2). 为此对方程(5)的两端同时求l次导数, 得到

$$\sum_{h=0}^{l}\frac{l!}{h!(l-h)!}\Phi_{hl}(s)=0,$$

其中

$$\Phi_{hl}(s)=A^{(h)}(s)N^{(l-h)}(s)-B^{(h)}(s)D^{(l-h)}(s).$$

将上式中的s换成s_i, 并于其两端同时右乘$\frac{1}{l!}f_{i(k-l)}, l=0,1,\cdots,k-1, k=1,2,\cdots,p_i, i=1,2,\cdots,q$, 将得到的$k$个式子相加, 得

$$0=\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{h=0}^{l}\frac{1}{h!(l-h)!}\Phi_{hl}(s_i)f_{i(k-l)}=$$
$$\sum_{h=0}^{k-1}\frac{1}{h!}[A^{(h)}(s_i)\sum_{l=h}^{k-1}\frac{1}{(l-h)!}N^{(l-h)}(s_i)f_{i(k-l)}-$$
$$B^{(h)}(s_i)\sum_{l=h}^{k-1}\frac{1}{(l-h)!}D^{(l-h)}(s_i)f_{i(k-l)}]=$$
$$\sum_{h=0}^{k-1}\frac{1}{h!}[A^{(h)}(s_i)\sum_{l=0}^{k-1-h}\frac{1}{l!}N^{(l)}(s_i)f_{i(k-l-h)}-$$
$$B^{(h)}(s_i)\sum_{l=0}^{k-1-h}\frac{1}{l!}D^{(l)}(s_i)f_{i(k-l-h)}].$$

将式(6)代入上式, 得到方程(2), 此即说明由(6)给出的矩阵V和W是方程(1)的解. 注意到式(4)和(6)均为方程(1)的解, 且二者有相同数目的自由参数$\{f_{ik}\}$, 而式(4)是方程(1)的一个完全解, 故式(6)亦为方程(1)的完全解.

作者简介:

于海华 (1970—), 女, 博士, 研究方向为高阶系统, 鲁棒控制理论, E-mail: yuhaihua@hit.edu.cn;

段广仁 (1962—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为线性系统, 广义线性系统, 鲁棒控制理论, E-mail: g.r.duan@hit.edu.cn.