

约束非线性系统切换鲁棒预测控制

赵敏^{1,2}, 李少远¹

(1. 上海交通大学自动化系, 上海 200240; 2. 上海理工大学控制科学与工程系, 上海 200093)

摘要: 采用“分段蕴含”(PWE)方法, 用一组线性变参数模型(LPV)近似约束非线性系统, 降低模型近似的保守性. 对每个LPV模型引入参数Lyapunov函数, 得到稳定的控制律, 并施加于非线性系统. 当检测到LPV模型发生切换时, 根据可行域的离线设计方法确定适当的切换律, 使系统按照设定的规则切换, 保证切换后的初始状态可行. 在文章最后给出了基于切换策略的控制算法的可行性和稳定性. 与传统非线性预测控制相比, 基于切换策略的鲁棒预测控制方法保守性更低, 计算量更小.

关键词: 约束非线性系统; 鲁棒预测控制; 多LPV蕴含; 参数Lyapunov函数; 切换策略

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Switching robust model-predictive-control strategy for constrained nonlinear system

ZHAO Min^{1,2}, LI Shao-yuan¹

(1. Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

2. Department of Control Science and Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: By adopting the piece-wise embedding scheme, we use a set of linear parameter-varying(LPV) models to approximate a nonlinear system subject to input and state constraints. For each embedding model, a parameter-dependent Lyapunov function is used to obtain the stable control law for the nonlinear system. When the LPV model is switched from one to the other, the switching law, which is obtained by using an off-line design approach, is used to guarantee the feasibility of the initial state at the switching point. In the last part of this paper, we prove the feasibility and stability of this switching control algorithm. The switching robust model-predictive-control strategy is less conservative than the traditional nonlinear predictive control and will greatly reduce the online computational burden.

Key words: constrained nonlinear systems; robust predictive control; multi-LPV embedding; parameter dependent Lyapunov function; switching strategy

1 引言(Introduction)

模型预测控制是处理约束多变量问题的一种行之有效的方 法, 现已被广泛应用于各个领域. 由于大部分工业控制都是有约束且具有非线性特性的过程, 采用线性预测控制算法将无法 满足控制要求, 因此研究有约束非线性系统的预测控制算法十分必要^[1~3].

预测控制需要滚动求解开环优化问题, 而非线性系统预测控制需要在线求解复杂的非凸非线性规划问题, 即使在系统变量较少的情况下也难以实时解决, 为克服这些困难现在已经提出很多方法, 本文采用了一种基于“蕴含”(embedding)描述的方法. 所谓“蕴含”, 就是指将非线性系统的状态轨迹用线性不确定系统集内的状态轨迹完全覆盖, 被蕴含的非线性系统具有与不确定系统相同的性质^[4~6]. 相

对于直接非线性预测控制, 这种方法的优点显而易见. 事实上, 采用蕴含方法将非线性系统用线性不确定系统近似描述后, 所要解决的是凸优化问题, 从而避免了在线求解复杂的非凸非线性规划, 有利于降低计算的复杂程度.

Angeli等^[7]首先将“线性蕴含”^[4]的概念引入到非线性预测控制问题中, 用一个多面体描述的线性时变系统近似了一类非线性系统动态, 并采用文献^[8]中的方法通过在线求解LMI凸优化获得反馈控制律. 虽然仿真结果证明它十分有效, 但是不能不承认这种方法的保守性. 文献^[9]指出采用蕴含方法近似非线性系统, 时变参数中可包含若干可在线测量的状态量, 因此非线性系统动态能够用LPV或Quasi-LPV模型近似^[10,11]. 由文献^[8]提出的鲁棒预测控制算法已被广泛应用到LPV系统控制律设计中, 该方

法通过LMI求解无穷时域min-max优化问题,在每个时刻求解固定的线性状态反馈控制律,寻找一个全局Lyapunov函数,使闭环系统二次稳定.为降低这类方法的保守性,文献[12~15]基于系统状态和时变不确定参数构造了参数Lyapunov函数(PDLF),保证系统的多包二次稳定性(poly-quadratic stability)^[16].本文以文献[7]和[11]为基础,对于每个LPV模型引入基于参数的Lyapunov函数,得到稳定的控制律施加于原系统.与传统的非线性预测控制方法相比,这种方法只需在每个采样时刻计算线性矩阵不等式约束的凸优化问题,即可获得稳定的控制律,避免了在线求解复杂的非凸非线性规划,从而能够降低在线计算量.随后本文进一步证明了算法的可行性和闭环系统的稳定性,最后的仿真结果表明了算法的有效性.

2 非线性系统的多LPV模型近似(Approximation of nonlinear systems via multi-LPV models)

非线性预测控制面临的最大问题在于如何有效地在线求解非凸非线性规划,由于系统状态的非线性,即使在变量较少的情况下也难以实时解决^[17~19].因此,考虑采用“蕴含”的方法将非线性系统用线性不确定系统近似.为降低模型近似的保守程度,本节采用“分段蕴含”的方法用多个LPV模型近似原系统.

考虑非线性系统

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统的状态和输入,满足约束:

$$\begin{cases} x \in X = \{x | x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}, \\ u \in U = \{u | u_{\min} \leq u \leq u_{\max}\}. \end{cases} \quad (2)$$

系统离散化模型为

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x(k), u(k)), \\ x(k) \in X, u(k) \in U. \end{cases} \quad (3)$$

对于 $x^{\text{eq}} \in X$ 和 $u^{\text{eq}} \in U$, 若 $x^{\text{eq}} = f(x^{\text{eq}}, u^{\text{eq}})$, 定义 x^{eq} 为(1)的平衡点,由平衡点构成的集合称为平衡面^[20].对非线性系统(1),将非线性系统(1)的状态记为两部分,

$$x = [x_a^T \quad x_b^T]^T. \quad (4)$$

其中: $x_a \in \mathbb{R}^g$ ($g < n$) 为调度变量,由系统状态向量的一部分构成^[21,22], $x_b \in \mathbb{R}^{n-g}$ 由剩余状态向量构成.将式(4)代入式(1),用 x_a 来描述原非线性系统表示为:

$$\dot{x} = \varphi(x_a) + A(x_a)[x_a^T \quad x_b^T]^T + B(x_a)u. \quad (5)$$

其中 $\varphi(x_a) \in \mathbb{R}^n$ 是某非线性函数.

显然系统的平衡点可表示为 x_a 的函数,即

$$\begin{cases} x_b^{\text{eq}} = x_b^{\text{eq}}(x_a), \\ u^{\text{eq}} = u^{\text{eq}}(x_a). \end{cases} \quad (6)$$

系统方程转换成如下拟线性化形式,

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(x_a)\tilde{x} + \tilde{B}(x_a)\tilde{u}. \quad (7)$$

其中:

$$\tilde{A}(x_a) = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & A_{22} - \frac{\partial x_b^{\text{eq}}(x_a)}{\partial x_a} A_{12} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}(x_a) = \begin{bmatrix} B_a \\ B_b - \frac{\partial x_b^{\text{eq}}(x_a)}{\partial x_a} B_a \end{bmatrix}.$$

假设采样时间为 T_s 采用Euler离散化方法将系统离散化

$$\tilde{x}(k+1) = A(x_a(k))\tilde{x}(k) + B(x_a(k))\tilde{u}(k). \quad (8)$$

其中: $A(x_a(k)) = I + T_s \tilde{A}(x_a(k))$, $B(x_a(k)) = T_s \tilde{B}(x_a(k))$, 且满足约束

$$\begin{cases} \tilde{x}(k) \in X, \\ \tilde{u}(k) \in U = \{\tilde{u} | v_{\min} \leq \tilde{u} \leq v_{\max}\}. \end{cases} \quad (9)$$

其中: $v_{\min} = u_{\min} - u^{\text{eq}}(x_a)$, $v_{\max} = u_{\max} - u^{\text{eq}}(x_a)$.

将 x_a 空间划分为 L 个相互重叠的区域,即

$$X_a = \bigcup_{l=1}^L X_{al}, 1 \leq l \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

其中: $X_{al} = \{x_a | x_{a \min}^l \leq x_a \leq x_{a \max}^l\}$. 对应 x_a 空间把系统状态的约束空间(\tilde{x} 空间)也相应的分为 L 个区域,即

$$X = \bigcup_{l=1}^L X_l. \quad (11)$$

其中: $X = \{\tilde{x} | x_{\min} \leq \tilde{x} \leq x_{\max}\}$, X_l 为对应于 X_{al} 在 \tilde{x} 空间中所划分的第 l 个区间.

当 $x_a(k) \in X_{al}$, $x(k) \in X_l$ 时,定义参数空间 $\mathcal{P}_l \triangleq X_{al}$, 非线性系统动态由第 l 个LPV模型近似:

$$\tilde{x}(k+1) \in \Omega_l [\tilde{x}^T(k) \quad \tilde{u}^T(k)]^T. \quad (12)$$

其中: $\Omega_l = \text{Co}\{[A^l(\rho_k) \quad B^l(\rho_k)]\}$, $A(\rho_k) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i(\rho_k) A_i^l$, $B(\rho_k) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i(\rho_k) B_i^l$, $\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i(\rho_k) = 1$, \mathcal{N} 是多面体顶点个数,且满足约束(9).因此非线性系统控制问题可转换为一组LPV系统的控制问题.

注1 区域划分的基本原则:在划分参数空间区域时应注意到,若划分区域范围过大则所得的LPV模型会过于保守,但是LPV模型数量较少计算量降低;而分区范围越

小, LPV模型数量将会增加, 用LPV模型描述非线性系统越精确, 但是计算量会有所增加, 但是若划分区域范围过小, 那么所得的LPV模型将无法完全覆盖该区域内的非线性动态, 会给下面控制器的设计带来困难. 因此在确定划分区域范围, 即确定LPV模型个数时应综合考虑计算量问题及模型近似程度等因素的影响. 而另一方面, 当 $\rho \in \mathcal{P}_l$ 时, 划分的区域应使当前采用的LPV模型的平衡点包含在 \mathcal{P}_{l+1} 区域内^[23], 使保证当前LPV模型稳定的控制律在调节状态到达当前平衡点的运动过程中, 能调节系统状态进入 \mathcal{P}_{l+1} 区域, 从而顺利切换到下一个LPV模型近似该区域内的非线性模型动态, 如此循环直至到达期望的平衡点.

采用“分段蕴含”将状态空间划分成相互重叠的区域, 在每个区域上由对应的LPV模型近似非线性模型动态, 从而将非线性系统转化为多个LPV模型描述. 相对于采用一个全局LTV模型近似原系统的方法, 这种方法保守性更低, 且更利于简化计算.

3 切换鲁棒预测控制算法(Switching robust MPC approach)

当非线性系统描述为一组LPV模型时, 根据参数所属区域采用不同LPV模型求取控制律. 当 $\rho_k \in \mathcal{P}_l$, $\tilde{x}(k) \in X_l$ 时, 采用第 l 个LPV模型, 当前时刻非线性预测控制问题

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{u}_k} J(k), \\ \text{s.t. (9), (12)}. \end{aligned} \quad (13)$$

转化为min-max优化

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{u}_k^l} \max_{[A^l, B^l] \in \Omega_l} J_\infty^l(k), \\ \text{s.t. (9)}. \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$J_\infty^l(k) = \sum_{i=0}^{\infty} (\|\tilde{x}(k+i|k)\|_{\tilde{Q}}^2 + \|\tilde{u}(k+i|k)\|_{\tilde{R}}^2),$$

$\forall l = 1, \dots, \mathcal{N}$. 求解得到控制律 \tilde{u}_k^{l*} 代入(13). 若 $\tilde{x}(k+1) \in X_l$, 则模型不发生切换; 若 $\tilde{x}(k+1) \in X_{l+1}$ 则计算切换律 \tilde{u}_k^* 并切换至第 $l+1$ 个LPV模型求取控制律, 如此滚动进行下去, 直到到达期望目标.

构造参数Lyapunov函数求取每个LPV模型的控制律. 定义参数Lyapunov函数^[13]

$$V(x(k), \rho_k) = x(k)^T P(\rho_k) x(k). \quad (15)$$

其中 $P(\rho_k)$ 随着参数变化. 假设存在 \mathcal{N} 个正定对称阵 P_i 并满足

$$\begin{cases} P(\rho_k) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i(\rho(k)) P_i, \\ \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i(\rho(k)) = 1. \end{cases} \quad (16)$$

$k = k + 1$ 时

$$V(x(k+1), \rho_{k+1}) = x(k+1)^T P(\rho_{k+1}) x(k+1),$$

其中 $P(\rho_{k+1})$ 满足:

$$P(\rho_{k+1}) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mu_j(\rho_{k+1}) P_j. \quad (17)$$

当 $\rho_k \in \mathcal{P}_l$ 时, 对第 l 个LPV近似模型给出定理如下.

定理 1 检测当前系统状态, 当 $\tilde{x}(k) \in X_l$ 时, 考虑约束 v_{\max} 及正定阵 \tilde{Q}, \tilde{R} . 若存在矩阵 Y_i, G_i , 对称阵 S_i, S_j , 以及正常数 γ 使

$$\begin{bmatrix} 1 & \tilde{x}(k)^T \\ \tilde{x}(k) & S_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & * & * & * \\ A_i^l G_i + B_i^l Y_i & S_j & * & * \\ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} G_i & 0 & \gamma I & * \\ \tilde{R}^{\frac{1}{2}} Y_i & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} v_{\max}^2 I & Y_i \\ Y_i^T & G_i + G_i^T - S_i \end{bmatrix} \geq 0. \quad (20)$$

对任意 $i \in [1, \mathcal{N}], j \in [1, \mathcal{N}]$ 成立, 则采用控制律

$$\tilde{u}(k+i|k) = F_l(\rho_k) \tilde{x}(k+i|k). \quad (21)$$

其中:

$$F_l(\rho_k) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i(\rho_k) F_i, \quad F_i = Y_i G_i^{-1},$$

则不等式

$$J_\infty^l(k) < \tilde{x}(k)^T P(\rho_k) \tilde{x}(k) \leq \gamma, \quad (22)$$

$$\|\tilde{u}\|_2 \leq v_{\max} \quad (23)$$

成立, 其中 $P_i = \gamma S_i^{-1}$.

证 首先证明不等式(22). 由

$$(S_i - G_i)^T S_i^{-1} (S_i - G_i) \geq 0,$$

因此

$$\begin{bmatrix} G_i^T S_i^{-1} G_i & * & * & * \\ A_i^l G_i + B_i^l Y_i & S_j & * & * \\ \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} G_i & 0 & \gamma I & * \\ \tilde{R}^{\frac{1}{2}} Y_i & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0. \quad (24)$$

令 $S_j = \gamma P_j^{-1}, S_i = \gamma P_i^{-1}, Y_i = F_i G_i$, 代入式(24), 根据Schur补定理有

$$\begin{aligned} P(\rho_k) - (\tilde{Q} + F_i^T \tilde{R} F_i) - \\ (A_i^l + B_i^l F_i)^T P(\rho_{k+1}) (A_i^l + B_i^l F_i) > 0. \end{aligned} \quad (25)$$

两端同乘 $x(k)$ 代入 $\tilde{u}(k) = F_i \tilde{x}(k)$ 可得

$$-V(\tilde{x}(k), \rho_k) + V(\tilde{x}(k+1), \rho_{k+1}) <$$

$$-(\tilde{x}(k)^T \tilde{Q} \tilde{x}(k) + \tilde{u}(k)^T \tilde{R} \tilde{u}(k)). \quad (26)$$

将式(26)从 $k = 0 \rightarrow \infty$ 依次相加, 得 $J_\infty^l(k) < V(\tilde{x}(k), \rho_k)$. 另一方面,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tilde{x}(k)^T S_i^{-1} \\ S_i^{-1} \tilde{x}(k) & S_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ S_i \end{bmatrix} \geq 0. \quad (27)$$

由Schure补定理有 $\tilde{x}(k)^T P(\rho_k) \tilde{x}(k) \leq \gamma$, 不等式(22)成立.

接下来证明不等式(23). 将(25)代入(23)得

$$\begin{bmatrix} I \\ G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\max}^2 I & F_i \\ * & S_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ G_i^{-1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (28)$$

由Schure补定理,

$$\frac{v^T v}{v_{\max}^2} \leq \frac{1}{\gamma} \tilde{x}(k)^T P(\rho_k) \tilde{x}(k) \leq 1. \quad (29)$$

因此 $\tilde{u}^T \tilde{u} \leq v_{\max}^2$, 式(28)成立.

假设未发生模型切换, 根据定理1求解

$$\begin{aligned} & \min_{\gamma, Y_i, G_i, S_i} \gamma, \\ & \text{s.t. (18) } \sim \text{(20)}. \end{aligned} \quad (30)$$

获得控制律 $\tilde{u}^*(k) = F_l^*(\rho_k) \tilde{x}(k)$. 将控制律代入系统方程, 若状态处于第 l 个区域, 将 $\tilde{u}^*(k)$ 施加于系统; 若 $\tilde{u}^*(k)$ 使状态进入第 $l+1$ 个区域, 则采用如下方法计算切换律. 首先设计第 $l+1$ 个LPV模型的可行集. 假设 X_{l+1} 的左边界与系统平衡面相交面处的系统状态记为:

$$x^{l+1} = \begin{bmatrix} x_{a \min}^{l+1} \\ x_{b \text{ eq}}^{l+1} (x_{a \min}^{l+1}) \end{bmatrix}. \quad (31)$$

根据文献[15,24~28]提出的离线鲁棒预测控制方法, 用状态 x^{l+1} 代替(18)中的 $\tilde{x}(k)$, 求解(30)得到不变可行集表示为

$$\Xi_{l+1} = \text{Co} \{ x^{l+1} \mid x^T S_i x \leq 1, i=1, \dots, \mathcal{N} \}. \quad (32)$$

其中Co表示凸集.

为获得切换律, 接下来求解如下优化问题

$$\begin{aligned} & \min_{\tilde{u}_k^l} \tilde{x}(k)^T Q \tilde{x}(k) + \tilde{u}_k^{lT} R \tilde{u}_k^l, \\ & \text{s.t. } A(\rho_k) \tilde{x}(k) + B(\rho_k) \tilde{u}_k^l \in \Xi_{l+1}. \end{aligned} \quad (33)$$

则切换律为

$$\tilde{u}^*(k) = \begin{cases} v_{\max}, & \tilde{u}_k^{l*} > v_{\max}, \\ \tilde{u}_k^{l*}, & \tilde{u}_k^{l*} \in U, \\ v_{\min}, & \tilde{u}_k^{l*} < v_{\min}. \end{cases} \quad (34)$$

将切换律施加于系统, 保证系统状态在切换律的作用下进入第 $l+1$ 个LPV模型的可行集, 再继续执行(30)获得新的控制律.

4 可行性与稳定性分析(Analysis of feasibility and stability)

定理 2 考虑多LPV模型描述的非线性系统及约束, 在 k 时刻, 若优化问题(30)可行, 那么对于 $t > k$ 优化问题都可行.

证 只有不等式(18)与当前状态有关系, 故只需证明 $t > k$ 时 $\forall \rho_k \in \mathcal{P}_l$ 式(18)可行. 当系统状态处于第 l 个区域时, 考虑第 l 个LPV近似模型. 若定理1中的优化问题在 k 时刻可行, 则以下不等式始终成立

$$\tilde{x}(k+i|k)^T P(\rho_{k+i|k}) \tilde{x}(k+i|k) \leq \gamma_k. \quad (35)$$

在 $k+1$ 时刻, 系统状态

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1|k+1) = \\ (A(\rho(k)) + B(\rho(k)) F_l(\rho(k))) \tilde{x}(k|k), \end{aligned}$$

满足

$$\tilde{x}(k+1|k+1)^T P(\rho_{k+1|k}) \tilde{x}(k+1|k+1) \leq \gamma_k. \quad (36)$$

模型未发生切换时, k 时刻的可行解在 $k+1$ 时刻仍然可行. 当参数离开第 l 个区域时, 求解(34)得到合适的切换律, 重复求解(30)可以保证之后各个时刻算法可行.

定理 3 $\rho_k \in \mathcal{P}_l$ 时, 若定理1对于第 l 个LPV模型成立, 那么求解(30)所得的控制律使系统闭环渐进稳定; 在适当的切换律作用下, 由这 L 个LPV模型所近似的非线性系统也是渐进稳定.

证 若参数 ρ_k 进入 \mathcal{P}_l 的初始时刻可行, 由定理2可以保证 $\forall t > k$ 优化问题都可行. 假设 k 时刻的最优解为 γ_k^* , $F_l^*(\rho_{k|k})$, $P^*(\rho_{k|k})$, 它们可以作为 $k+1$ 时刻的一组可行解. 对于 $k+1$ 时刻的最优解 $P^*(\rho_{k+1|k+1})$, 以下不等式成立,

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1|k+1)^T P^*(\rho_{k+1|k+1}) \tilde{x}(k+1|k+1) < \\ \tilde{x}(k+1|k+1)^T P^*(\rho_{k|k}) \tilde{x}(k+1|k+1). \end{aligned} \quad (37)$$

另一方面, 当 $\rho_k \in \mathcal{P}_l$ 时, 有

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1|k)^T P^*(\rho_{k|k}) \tilde{x}(k+1|k) < \\ \tilde{x}(k|k)^T P^*(\rho_{k|k}) \tilde{x}(k|k). \end{aligned} \quad (38)$$

在 $k+1$ 时刻若 $\rho_k \in \mathcal{P}_l$, $\tilde{x}(k+1|k+1) = (A(\rho_k) + B(\rho_k) F_l(\rho_k|k)) \tilde{x}(k|k)$, 则下式成立:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1|k+1)^T P^*(\rho_{k|k}) \tilde{x}(k+1|k+1) < \\ \tilde{x}(k|k)^T P^*(\rho_{k|k}) \tilde{x}(k|k). \end{aligned} \quad (39)$$

由式(37)和(39)可得

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1|k+1)^T P^*(\rho_{k+1|k+1}) \tilde{x}(k+1|k+1) < \\ \tilde{x}(k|k)^T P^*(\rho_{k|k}) \tilde{x}(k|k). \end{aligned} \quad (40)$$

即Lyapunov函数

$$V(\tilde{x}(k+1|k+1), \rho_{k+1|k+1}t) \leq V(\tilde{x}(k|k), \rho_{k|k})$$

是严格递减的. 这说明当模型未发生切换时, 对第*l*个LPV模型, 控制律能够保证 $x(k) \in X_l$ 时LPV系统闭环稳定, 系统状态将最终收敛到本区域的平衡点. 考虑注1中给出的区域划分原则: 所划分的区域互相重叠, 并且第*l*个区域的平衡点包含在第*l*+1个区域内. 因此在调节系统状态收敛到当前区域平衡点的运动过程中, 状态将进入第*l*+1个区域; 当检测到近似模型发生切换后, 设计切换律保证在初始状态进入新的可行域, 直至最终到达期望的平衡点. 由于线性蕴含策略是LPV系统近似非线性系统的充分条件, LPV系统所拥有的性质对于非线性系统也同样适用, 因此通过切换律保证稳定的控制律能够使原非线性系统最终稳定.

5 仿真实验(Simulation)

下面以连续搅拌釜(CSTR)系统为例验证算法有效性. 假设系统的非线性模型为:

$$\begin{cases} \dot{T} = \frac{q}{V}(T_f - T) - \frac{\Delta H}{\rho C_p} k_0 e^{-\frac{E}{RT}} C_A + \frac{UA}{V\rho C_p}(T_c - T), \\ \dot{C}_A = \frac{q}{V}(C_{Af} - C_A) - k_0 e^{-\frac{E}{RT}} C_A. \end{cases} \quad (41)$$

满足约束

$$\begin{aligned} 280 \text{ K} \leq T_c \leq 370 \text{ K}, \quad 330 \text{ K} \leq T \leq 400 \text{ K}, \\ 0 \leq C_A \leq 1 \text{ mol/L}, \end{aligned}$$

模型参数同文献[19]. 选反应器温度*T*为参数, 假设 $x_a = T$. 用 x_a 表示其平衡面方程为:

$$C_A^{\text{eq}}(x_a) = \frac{q}{V} \left(\frac{C_{Af}}{\frac{q}{V} + k_0 e^{-\frac{E}{Rx_a}}} \right). \quad (42)$$

$$\begin{aligned} T_c^{\text{eq}}(x_a) = x_a + \left(\frac{UA}{V\rho C_p} \right)^{-1} \left(-\frac{q}{V}(T_f - x_a) + \right. \\ \left. \frac{\Delta H}{\rho C_p} k_0 e^{-\frac{E}{Rx_a}} C_A^{\text{eq}}(x_a) \right). \end{aligned} \quad (43)$$

当 $x_a \in \mathcal{P}_l$ 时系统平衡点记为 s_{κ} , 定义新的状态变量:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a - x_{a\kappa} \\ C_A - C_A^{\text{eq}}(x_a) \end{bmatrix}, \\ v = T_c - T_c^{\text{eq}}(x_a). \end{cases} \quad (44)$$

非线性系统的模型表示为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \zeta_1 \\ 0 & \zeta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{UA}{V\rho C_p} \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} v. \quad (45)$$

其中:

$$\zeta_1 = -\frac{\Delta H}{\rho C_p} k_0 e^{-\frac{E}{Rx_a}},$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 = -\frac{q}{V} - k_0 e^{-\frac{E}{Rx_a}} - \\ \frac{\Delta H q E C_{Af} (k_0 e^{-\frac{E}{Rx_a}})^2}{\rho C_p V R x_a^2 \left(\frac{q}{V} + k_0 e^{-\frac{E}{Rx_a}} \right)^2} k_0 e^{-\frac{E}{Rx_a}}, \\ \zeta_3 = \frac{q E C_{Af}}{V R x_a^2} \frac{k_0 e^{-\frac{E}{Rx_a}}}{\left(\frac{q}{V} + k_0 e^{-\frac{E}{Rx_a}} \right)^2}. \end{aligned}$$

本文控制目的是将系统状态由 $x_0 = [330 \ 0.4]^T$ 最终调节到 $x_t = [350 \ 0.5]^T$, 综合考虑计算简繁程度和近似程度, 此处将参数空间划分成为7个区域, 仿真结果如图1, 图2.

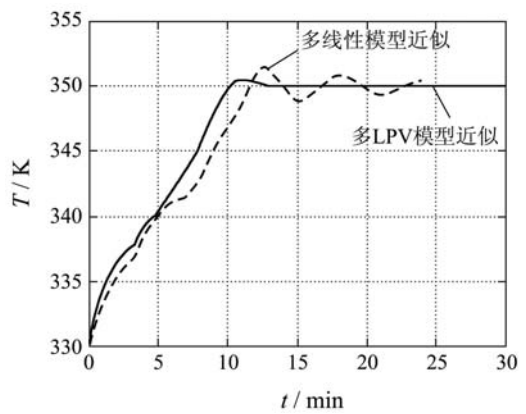


图1 反应物温度曲线

Fig. 1 Trajectories of temperature

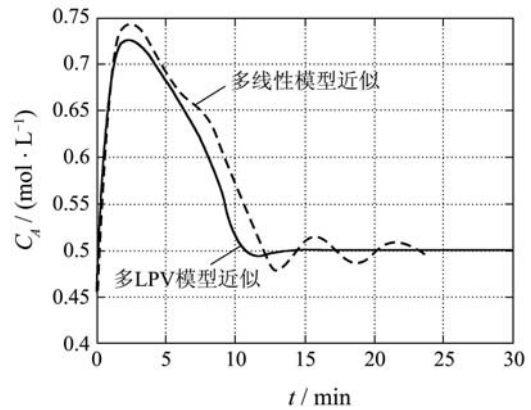


图2 反应物A浓度曲线

Fig. 2 Trajectories of concentration

图1和图2比较了采用本文控制方法获得的控制效果和基于多线性化模型的线性预测控制方法获得的控制效果, 可见本文方法效果明显好于后者(注: 后者所选取的平衡点与前者相同, 因此在非线性较强的区域仍然采用平衡点处的线性模型近似原非线性动态将产生震荡).

6 结论(Conclusion)

文章采用“分段蕴含”方法将参数空间划分成若干个相互重叠的区域, 在每个区域内用LPV模型

近似非线性系统动态. 对于每个LPV模型引入参数Lyapunov函数, 得到稳定的控制律, 作用于非线性系统. 当检测到模型发生切换时, 采用切换律保证切换的初始状态进入下一LPV模型的可行集, 使系统在控制律作用下最终收敛到稳态. 与传统的非线性预测控制方法相比, 本文方法只需在模型切换时计算有限个LMI问题即可得到稳定的控制律, 避免了在线求解非凸非线性规划, 大大减小在线计算量, 算法的可行性和稳定性也得到了证明. 最后的仿真实验也证明了算法的有效性. 对于参数空间划分部分本文只给出了一个基本原则, 即划分区域应综合考虑模型近似程度以及计算量等因素, 并且第 l 个LPV模型的平衡点应包含在第 $l+1$ 个LPV模型对应的区域内, 但是并未给出有指导意义的划分空间的理论, 这将作为进一步研究的内容.

参考文献(References):

- [1] ALLGOWER F, ZHENG A. *Nonlinear Model Predictive Control*[M]. Basel: Birkhauser-Verlag, 2000.
- [2] MAYNE D Q, RAWLINGS J B, RAO C V, et al. Constrained model predictive control: stability and optimality[J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789 – 814.
- [3] MACIEJOWSKI J M. *Predictive Control with Constraints*[M]. New York, USA: Prentice Hall, 2002.
- [4] BOYD S, EL GHAOU L, BALAKRISHNAN V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [5] RAUGH W J, SHAMMA J S. Research on gain scheduling[J]. *Automatica*, 2000, 36(10): 1401 – 1425.
- [6] LEITH D J, LEITHEAD W E. On formulating nonlinear dynamics in LPV form[C] // *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney, Australia: IEEE, 2000.
- [7] ANGELI D, CASAVOLA A, MOSCA E. Constrained predictive control of nonlinear plants via polytopic linear system embedding[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2000, 10(13): 1091 – 1103.
- [8] KOTHARE V, BALAKRISHNAN V, MORARI M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 1996, 32(10): 1361 – 1379.
- [9] DUSSY S, EL GHAOU L. Robust gain-scheduling control of a class of nonlinear parameter-dependent systems: application to an uncertain inverted pendulum[C] // *Proceedings of the IEEE Control and Decision Conference*. Kobe, Japan: IEEE, 1996.
- [10] CASAVOLA A, FAMULARO D, FRANZE G. Predictive control of constrained nonlinear systems via LPV linear embeddings[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, 13: 281 – 294.
- [11] CHISCIL, FALUGI P, ZAPPA G. Gain-scheduling MPC of nonlinear systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, 13(3): 295 – 308.
- [12] FERON E, APKARIAN P, GAHINET P. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov function[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(7): 1041 – 1046.
- [13] DAAFOUZ J, BERNUSSOU J. Parameter dependent Lyapunov function for discrete time systems with time varying parametric uncertainties[J]. *Systems and Control Letters*, 2001, 43(3): 355 – 359.
- [14] MAO W J. Robust stabilization of uncertain time systems and comments on “an improved approach for constrained robust model predictive control” [J]. *Automatica*, 2003, 39(2): 1109 – 1112.
- [15] ZHENG Q, WU F. Output feedback control of saturated discrete-time linear system using parameter-dependent Lyapunov functions[J]. *Systems and Control Letters*, 2008, 57(5): 896 – 903.
- [16] 丁宝苍, 杨鹏, 孙鹤旭, 等. 离线鲁棒预测控制器综合方法的改进方案[J]. *控制与决策*, 2005, 20(3): 312 – 320. (DINF Baocang, YANG Peng, SUN Hexu, et al. Improved off-line synthesis approach of robust model predictive control[J]. *Control and Decision*, 2005, 20(3): 312 – 320.)
- [17] KOTHARE M V, WAN Z Y. *Computationally Efficient Scheduled Model Predictive Control Algorithm for Control of a Class of Constrained Nonlinear Systems*[M] // *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. New York, USA: Springer, 2007, 358: 49 – 62.
- [18] KOUTHARE M V, WAN Z Y. Efficient scheduled stabilizing output feedback model predictive control for constrained nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(7): 1172 – 1177.
- [19] SHIN J Y. *Quasi-linear parameter varying representation of general aircraft dynamics over non-trim region*[R]. NASA CR-214926, 2007.
- [20] ZOU T, LI S Y, DING B C. A dual-mode nonlinear model predictive control with the enlarged terminal constrained sets[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2006, 32(1): 21 – 27.
- [21] 邹志强, 徐立宏, 袁梦. 一种基于多面体描述系统的非线性预测控制[J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2006, 24(6): 813 – 817. (ZOU Zhiqiang, XU Lihong, YUAN Meng. A nonlinear model predictive control based on polytopic description system[J]. *Journal of Tongji University(Natural Science)*, 2006, 24(6): 813 – 817.)
- [22] CHISCI L, FAULUGI P, ZAPPA G. Predictive tracking control of constrained nonlinear systems[J]. *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 2005, 152(3): 305 – 316.
- [23] WANG Z Y, WU G, ZHENG T. A new nonlinear model predictive control algorithm with large applicable domains[J]. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2007, 37(12): 1505 – 1512.
- [24] TENNY M J, WRIGHT S J, RAWLINGS J B. Nonlinear model predictive control via feasibility-perturbed sequential quadratic programming[J]. *Computational Optimization and Applications*, 2004, 28(6): 87 – 121.
- [25] DING B C, XI Y G, MARCIN T, et al. Improving off-line approach to robust MPC based-on nominal performance cost[J]. *Automatica*, 2007, 43(2): 159 – 163.
- [26] 丁宝苍, 邹涛, 李少远. 时变不确定系统的变时域离线鲁棒预测控制[J]. *控制理论与应用*, 2006, 23(2): 240 – 244. (DING Baocang, ZOU Tao, LI Shaoyuan. Varying-horizon off-line robust predictive control for time-varying uncertain systems[J]. *Control Theory & Applications*. 2006, 23(2): 240 – 244.)
- [27] 丁宝苍, 杨鹏. 基于标称性能指标的离线鲁棒预测控制器综合[J]. *自动化学报*, 2006, 32(2): 304 – 410. (DING Baocang, YANG Peng. Synthesizing off-line robust model predictive controller based on nominal performance cost[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2006, 32(2): 304 – 410.)
- [28] WAN Z Y, KOTHARE M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 2003, 39(4): 837 – 846.

作者简介:

赵敏 (1979—), 女, 博士研究生, 目前研究方向为非线性系统及LPV系统预测控制研究, E-mail: zhaomin@usst.edu.cn;

李少远 (1965—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事智能控制与动态优化研究, E-mail: syli@sjtu.edu.cn.