

文章编号: 1000-8152(2010)03-0310-07

一类T-S模糊控制系统的稳定性分析及设计

陈国洋, 李 柠, 李少远

(上海交通大学 自动化系, 上海 200240)

摘要: 研究了一类输入采用双交叠模糊划分的T-S模糊控制系统稳定性分析及控制器设计问题. 基于分段模糊Lyapunov函数, 提出了一个新的判定开环T-S模糊系统稳定性的充分条件, 该方法只需在各个模糊区间里满足模糊Lyapunov方法中的条件, 其保守性比公共Lyapunov函数法和分段Lyapunov函数法的保守性更低. 运用并行分布补偿法(PDC)进一步探讨了闭环T-S模糊控制系统的稳定性分析问题并设计了模糊控制器. 最后, 一个仿真示例说明了本文方法的有效性.

关键词: 模糊控制; 稳定性; Lyapunov函数; PDC

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Stability analysis and design for a class of Takagi-Sugeno fuzzy control systems

CHEN Guo-yang, LI Ning, LI Shao-yuan

(Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: The stability analysis and design techniques of Takagi-Sugeno(T-S) fuzzy control systems whose input variables employ two-overlapped fuzzy partition are discussed. Based on the piecewise fuzzy Lyapunov function, we propose a new sufficient condition to check the stability of T-S fuzzy control systems. This condition only needs to satisfy the condition of fuzzy Lyapunov function in each fuzzy region. Using the methods of parallel distributed compensation(PDC) and linear matrix inequality(LMI), we investigate the stability analysis and design of closed-loop T-S fuzzy control systems further. It is shown that the piecewise fuzzy Lyapunov approach is less conservative than those of the common Lyapunov function and the piecewise Lyapunov function. Simulation results verify the efficiency and feasibility of the proposed method.

Key words: fuzzy control; stability; Lyapunov function; PDC

1 引言(Introduction)

T-S模糊控制系统是目前模糊控制领域最活跃的一个分支. 该模型是Takagi和Sugeno在1985年提出的^[1]. 近年来, 许多学者对T-S模糊控制系统的稳定性分析进行了研究, 基于Lyapunov直接方法, Tanaka等人研究了T-S模糊控制系统的稳定性问题^[2], 最后将稳定性判据归结为在所有的局部子系统中寻找一个公共正定矩阵 P 的问题, 这也就是公共Lyapunov函数法. 但对于规则数较大的模糊系统, 此方法很难找到满足所有规则的公共正定矩阵 P . 为了降低公共Lyapunov函数方法的保守性, 文献[3~6]利用分段的Lyapunov函数法来分析T-S模糊控制系统的稳定性, 首先将系统的模糊区间分成多个子模糊区间, 然后在各个子模糊区间里分别基于Lyapunov函数法讨论系统的稳定性. 这

种方法在一定程度上降低了公共Lyapunov函数法的保守性, 但是实际上在各个子模糊区间里它仍是基于公共Lyapunov函数法的; 文献[7~10]利用模糊Lyapunov函数法来进行T-S模糊控制系统的稳定性判定, 它在一定程度上也降低了公共Lyapunov函数法的保守性, 但是对于一个具有条规则的开环模糊控制系统, 它需要找到 r^2 个正定矩阵来满足个Lyapunov不等式. 若 r 越大, 则需满足的不等式也越多, 保守性也越强, 并且针对连续型T-S模糊控制系统, 模糊Lyapunov函数法要求它的隶属度函数连续并且可导, 这也在一定程度上增加了模糊Lyapunov函数法的保守性. 针对以上两个问题, 本文通过运用双交叠模糊分化^[3,4]的概念, 将系统的模糊区间分划成多个子模糊区间, 在此基础上, 通过构造一个分段光滑的模糊Lyapunov函数, 提出一个新的

并且保守性更低的判定T-S模糊控制系统稳定性的充分条件. 然后, 基于并行分布补偿法(PDC)^[11,12]和线性矩阵不等式法(LMI)^[12], 进一步探讨闭环T-S模糊控制系统的稳定性分析和设计问题.

2 T-S模糊控制系统(T-S fuzzy control systems)

用 R_i 表示模糊控制系统的第 i 条规则, T-S模糊控制系统的模型可描述如下^[1]:

$$R_i : \text{If } x_1 \text{ is } F_1^{(i)} \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } F_n^{(i)}, \text{ Then}$$

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (1)$$

其中: $x_k(t), F_k^i, (i = 1, \dots, f, k = 1, \dots, n)$ 分别是模糊系统的输入状态变量和模糊集;

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$$

为模糊系统的状态向量. 采用单点模糊法、Sum-Product推理、重心法去模糊, 模糊控制系统总体模型为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^f w_i(t)(A_i x(t) + B_i u(t)) / \sum_{i=1}^f w_i(t). \quad (2)$$

其中 $w_i(t) = \prod_{k=1}^n F_k^i(x_k(t))$ 为第 i 条规则的激活度. 令

$$h_i(t) = w_i(t) / \sum_{j=1}^f w_j(t),$$

则式(2)可改写为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^f h_i(t)(A_i x(t) + B_i u(t)). \quad (3)$$

当输入为零时系统的自由模型可描述为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^f h_i(t)A_i x(t). \quad (4)$$

在大多数情况下, 模糊控制系统中输入变量模糊分划的模糊集具有两两交叠的性质, 模糊集可以用隶属度函数来表示^[3]. 对于系统的某一状态输入, 所有激活度 $w_j > 0$ 的规则构成一个交叠规则组, 该状态输入 x 称为此交叠规则组的一个作用点. 所有作用点的集合称为该交叠规则组的作用域, 则在任一时刻, 系统的状态只落在其中一个作用域中, 且系统的稳定性只和当前起作用的交叠规则组的稳定性有关系.

3 T-S模糊控制系统稳定性分析(Stability analysis for T-S fuzzy control systems)

3.1 稳定性分析(Stability analysis)

设系统共有 r 个交叠规则组作用域 $S_j (j = 1, 2, \dots, r)$, 则 $\bigcup_{j=1}^r S_j = S$, 设 l 为每个交叠规则组中

所含的规则数, $(A_{\rho j}, B_{\rho j})$ 表示 S_j 上的第 ρ 条规则的模型参数, $h_{\rho j}$ 表示在 S_j 上第 ρ 条规则的隶属度函数. 则系统在 S_j 上的局部开环模型可表示为

$$\dot{x} = \sum_{\rho=1}^l h_{\rho j} A_{\rho j} x. \quad (5)$$

定理 1 对于式(4)所示的自由模糊控制系统, 假设 $|\dot{h}_{\rho j}| \leq \phi_{\rho j}$, 则系统在平衡状态大范围渐近稳定的充分条件是: 在每一个 S_j 上分别存在一组正定矩阵 $P_{\rho j}$, 满足

$$P_{\rho j} \geq P_{l j}, \quad \rho = 1, 2, \dots, l-1, \quad (6)$$

$$\sum_{\rho=1}^{l-1} \phi_{\rho j} (P_{\rho j} - P_{l j}) + \frac{1}{2} \{ A_{k j}^T P_{i j} + P_{i j} A_{k j} + A_{i j}^T P_{k j} + P_{k j} A_{i j} \} < 0. \quad (7)$$

其中: $1 \leq j \leq r, 1 \leq i \leq k \leq l$.

证 选择

$$V_j(x) = \sum_{\rho=1}^l h_{\rho j} x^T P_{\rho j} x$$

为 S_j 上的一个Lyapunov函数, 则对所有的 $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{V}_j(x) &= \sum_{\rho=1}^l \dot{h}_{\rho j} x^T P_{\rho j} x + \sum_{i=1}^l h_{i j} (\dot{x}^T P_{i j} x + x^T P_{i j} \dot{x}) = \\ &= \sum_{\rho=1}^l \dot{h}_{\rho j} x^T P_{\rho j} x + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^l h_{i j} h_{k j} x^T \times \\ & \quad (A_{k j}^T P_{i j} + P_{i j} A_{k j}) = \\ &= \sum_{\rho=1}^l \dot{h}_{\rho j} x^T P_{\rho j} x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^l h_{i j} h_{k j} x^T \times \\ & \quad (A_{k j}^T P_{i j} + P_{i j} A_{k j} + A_{i j}^T P_{k j} + P_{k j} A_{i j}) x. \end{aligned}$$

因为 $\sum_{\rho=1}^l \dot{h}_{\rho j} = 0$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}_j(x) &= \sum_{\rho=1}^{l-1} \dot{h}_{\rho j} x^T P_{\rho j} x + \dot{h}_{l j} x^T P_{l j} x + \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^l h_{i j} h_{k j} x^T (A_{k j}^T P_{i j} + P_{i j} A_{k j} + \\ & \quad A_{i j}^T P_{k j} + P_{k j} A_{i j}) x = \\ &= \sum_{\rho=1}^{l-1} \dot{h}_{\rho j} x^T (P_{\rho j} - P_{l j}) x + \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^l h_{i j} h_{k j} x^T (A_{k j}^T P_{i j} + P_{i j} A_{k j} + \\ & \quad A_{i j}^T P_{k j} + P_{k j} A_{i j}) x. \end{aligned}$$

当式(6)成立时, 并且假设 $|\dot{h}_{\rho j}| \leq \phi_{\rho j}$, 则可以得到

$$\dot{V}_j(x) \leq \sum_{\rho=1}^{l-1} \phi_{\rho j} x^T (P_{\rho j} - P_{l j}) x +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^l h_{ij} h_{kj} x^T (A_{kj}^T P_{ij} + P_{ij} A_{kj} + A_{ij}^T P_{kj} + P_{kj} A_{ij}) x.$$

当式(7)成立时,有

$$\dot{V}_j(x) < 0. \tag{8}$$

所以 $V_j(x)$ 是 S_j 上的一个Lyapunov函数. 在各交叠规则组作用域 S_j 上定义如下特征函数:

$$\lambda_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in S_j, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \tag{9}$$

则有 $\sum_{j=1}^r \lambda_j(x) = 1$. 则系统在整个模糊区间上的总模型可表示为

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^r \lambda_j(x) \sum_{\rho=1}^l h_{\rho j} A_{\rho j} x. \tag{10}$$

在整个模糊区间上构造Lyapunov函数为

$$V(x) = \sum_{j=1}^r \lambda_j V_j(x). \tag{11}$$

由文献[3~5]可知, $V(x)$ 即是式(4)所示模糊系统的一个分段模糊Lyapunov函数. 当 $\phi_{\rho j}$ 给定的时候, 定理1中的条件是一组线性矩阵不等式(LMIS), 此时可以利用LMI工具箱验证是否存在这样一组正定矩阵 P 满足定理1的条件, 文献[7]给出了求取 $\phi_{\rho j}$ 的方法. 当T-S模糊控制系统的隶属度函数在整个模糊区间上导数不存在的时候, 此时就无法利用模糊Lyapunov函数来分析其稳定性, 但是可以利用分段模糊Lyapunov的思想, 将系统的模糊区间分成多个子模糊区间且在各个子模糊区间里隶属度导数存在, 此时就可以利用分段模糊Lyapunov函数来判定系统的稳定性. 经过进一步分析可以得知, 当 $P_{ij} = P_{kj}$, $i, k = 1, 2, \dots, l, j = 1, 2, \dots, r$ 时, 定理1实际上就等价成了分段Lyapunov函数法; 当 $P_{im} = P_{kj}$, $i, k = 1, 2, \dots, l, m, j = 1, 2, \dots, r$ 时, 定理1就等价成了公共Lyapunov函数法. 所以说公共Lyapunov函数法和分段Lyapunov函数法是分段模糊Lyapunov函数法的一种特殊情况. 因此可以得出利用分段模糊Lyapunov函数法的保守性比公共Lyapunov函数法和分段Lyapunov函数法的保守性更低.

3.2 仿真实例(Simulation)

一个单输入自由T-S模糊控制系统, 其规则的形式如下:

$$R_i : \text{If } x_1 \text{ is } F_i, \text{ Then } \dot{x} = A_i x, \quad i = 1, 2, 3. \tag{12}$$

输入变量的隶属度函数如图1所示. 其中:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}.$$

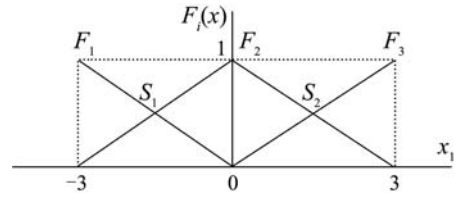


图1 模糊系统隶属度函数

Fig. 1 The membership function of rule premise

由于隶属度函数在整个模糊区间上导数不存在, 所以无法利用模糊Lyapunov函数来判定系统稳定性. 并且通过仿真可以看到, 对于该模糊控制系统, 找不到一个公共的正定矩阵 P 去满足公共Lyapunov函数法中的条件, 也找不到一组正定矩阵 P 去满足分段Lyapunov函数法中的条件. 因此此时利用公共Lyapunov函数和分段Lyapunov函数也都无法判定系统的稳定性. 但是通过图1可以看到, 此时可以将系统的模糊区间分成两个子区间 S_1 和 S_2 , 并且在两个子区间上系统的隶属度函数导数都存在, 因此此时可以利用分段模糊Lyapunov函数去分析系统的稳定性. 通过验证, 的确可以在 $\phi = 0.9$ 找到这样的两组正定矩阵:

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 4.5192 & 0.6736 \\ 0.6736 & 3.8915 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 9.4927 & 1.7539 \\ 1.7539 & 8.4159 \end{bmatrix},$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 5.2106 & -0.6053 \\ -0.6053 & 3.9603 \end{bmatrix},$$

$$P_{22} = \begin{bmatrix} 8.9617 & 0.3067 \\ 0.3067 & 7.4109 \end{bmatrix}.$$

因此, 根据定理1可以判定式(12)所示的T-S模糊控制系统是稳定的, 通过这个例子可以看出定理1的局限性更小. 并且通过对式(12)所示的模糊控制系统进行仿真, 证实了在各种初始条件下系统状态都是稳定的. 图2为初始条件为 $x_0 = [-1 \ -1]^T$ 时系统的状态响应曲线.

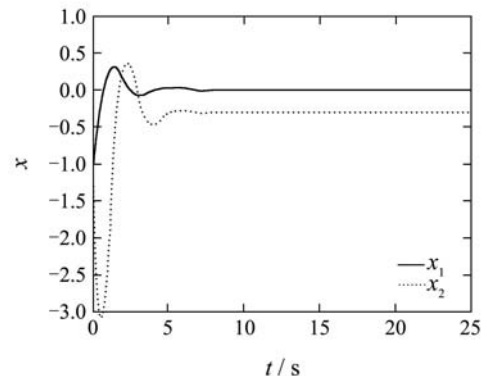


图2 初始条件为 $x_0 = [-1 \ -1]^T$ 系统的状态响应曲线
Fig. 2 The system state response under the initial condition of $x_0 = [-1 \ -1]^T$

4 T-S模糊控制系统设计及稳定性分析(Design and stability analysis for T-S fuzzy control systems)

对于式(1)所示的控制对象的T-S模型, 在每个交叠规则组作用域 S_j 上分别设计一个状态反馈控制器:

$$u_j = - \sum_{k=1}^l h_{kj} K_{kj} x, \quad (13)$$

则系统全局的控制律为

$$u = - \sum_{j=1}^r \lambda_j \sum_{k=1}^l h_{kj} K_{kj} x. \quad (14)$$

其中: λ_j 的定义和式(9)相同, K_{kj} 为状态反馈向量. 利用分段模糊Lyapunov函数法可以等到以下定理:

定理 2 对于式(1)所示的模糊控制系统, 假设 $|\dot{h}_{\rho j}| \leq \phi_{\rho j}$, 采用式(10)所示的模糊控制器, 如果在每一个交叠规则组作用域 S_j 上分别存在一组正定矩阵 $P_{\rho j}$ 及状态反馈向量 K_{kj} , 满足

$$P_{\rho j} \geq P_{l j}, \quad \rho = 1, 2, \dots, l-1, \quad (15)$$

$$\sum_{\rho=1}^{l-1} \phi_{\rho j} (P_{\rho j} - P_{l j}) + G_{i i j}^T P_{m j} + P_{m j} G_{i i j} < 0, \quad (16)$$

$$\sum_{\rho=1}^{l-1} \phi_{\rho j} (P_{\rho j} - P_{l j}) + \frac{1}{2} (G_{i k j} + G_{k i j})^T P_{m j} + \frac{1}{2} P_{m j} (G_{i k j} + G_{k i j}) < 0, \quad (17)$$

则系统在平衡状态是大范围渐近稳定的. 其中:

$$G_{i k j} = A_{i j} - B_{i j} K_{k j}, \quad 1 \leq i \leq k \leq l, \quad 1 \leq m \leq l, \quad 1 \leq j \leq r.$$

证 选择 $V_j(x) = \sum_{\rho=1}^l h_{\rho j} x^T P_{\rho j} x$ 为 S_j 上的一个Lyapunov函数, 对所有的 $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{V}_j(x) = & \sum_{\rho=1}^l \dot{h}_{\rho j} x^T P_{\rho j} x + \sum_{i=1}^l h_{i j} \times (\dot{x}^T P_{i j} x + x^T P_{i j} \dot{x}) = \\ & \sum_{m=1}^l \sum_{i=1}^l h_{m j} h_{i j}^2 x^T \{ \sum_{\rho=1}^l \dot{h}_{\rho j} P_{\rho j} + G_{i i j}^T \times \\ & P_{m j} + P_{m j} G_{i i j} \} x + 2 \sum_{m=1}^l \sum_{i < k} h_{m j} \times \\ & h_{i j} h_{k j} x^T \{ \sum_{\rho=1}^l \dot{h}_{\rho j} P_{\rho j} + \frac{1}{2} (G_{i k j} + G_{k i j})^T \times \\ & P_{m j} + \frac{1}{2} P_{m j} (G_{i k j} + G_{k i j}) \} x. \end{aligned}$$

因为 $\sum_{\rho=1}^l \dot{h}_{\rho j} = 0$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}_j(x) = & \sum_{m=1}^l \sum_{i=1}^l h_{m j} h_{i j}^2 x^T \{ \sum_{\rho=1}^{l-1} \dot{h}_{\rho j} (P_{\rho j} - P_{l j}) + \\ & G_{i i j}^T P_{m j} + P_{m j} G_{i i j} \} x + 2 \sum_{m=1}^l \sum_{i < k} \times \\ & h_{m j} h_{i j} h_{k j} x^T \{ \sum_{\rho=1}^{l-1} \dot{h}_{\rho j} (P_{\rho j} - P_{l j}) + \frac{1}{2} \times \\ & (G_{i k j} + G_{k i j})^T P_{m j} + \frac{1}{2} P_{m j} (G_{i k j} + G_{k i j}) \} x. \end{aligned}$$

当式(15)成立时, 且由假设 $|\dot{h}_{\rho j}| \leq \phi_{\rho j}$, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_j(x) \leq & \sum_{m=1}^l \sum_{i=1}^l h_{m j} h_{i j}^2 x^T \{ \sum_{\rho=1}^{l-1} \phi_{\rho j} (P_{\rho j} - P_{l j}) + \\ & G_{i i j}^T P_{m j} + P_{m j} G_{i i j} \} x + 2 \sum_{m=1}^l \sum_{i < k} h_{m j} \times \\ & h_{i j} h_{k j} x^T \{ \sum_{\rho=1}^{l-1} \phi_{\rho j} (P_{\rho j} - P_{l j}) + \frac{1}{2} (G_{i k j} + \\ & G_{k i j})^T P_{m j} + \frac{1}{2} P_{m j} (G_{i k j} + G_{k i j}) \} x. \end{aligned}$$

当式(16)(17)成立时, 可以得到

$$\dot{V}_j(x) < 0. \quad (18)$$

同样可以得知

$$V(x) = \sum_{j=1}^r \lambda_j V_j(x) \quad (19)$$

是闭环系统的Lyapunov函数, 当给定 $\phi_{\rho j}$ 时, 如果能找到一组 $P_{\rho j}$ 和 K_{kj} 满足定理2中的不等式, 则说明闭环系统是全局渐近稳定的. 为了能从定理2中得到使系统稳定的反馈矩阵 K_{kj} , 定理2中的条件需要进行相关的等价变换, 并得到如下定理.

定理 3 矩阵不等式(15)~(17)成立的充分且必要条件是存在对称正定矩阵 $M_{\rho j}$ 和矩阵 $W_{i m j}$, 使得如下的线性矩阵不等式组:

$$M_{\rho j} > 0, \quad (20)$$

$$Y_{\rho j} > 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & M_{m j} A_{i j}^T + A_{i j} M_{m j} + W_{i m j} B_{i j}^T + \\ & B_{i j} W_{i m j} + \sum_{\rho=1}^{l-1} \phi_{\rho j} Y_{\rho j} < 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & M_{m j} (A_{i j} + A_{k j})^T + (A_{i j} + A_{k j}) M_{m j} + \\ & W_{k m j}^T \times B_{i j}^T + B_{i j} W_{k m j} + W_{i m j}^T B_{k j}^T + \\ & B_{k j} M_{i m j} + 2 \sum_{\rho=1}^{l-1} \phi_{\rho j} Y_{\rho j} < 0 \end{aligned} \quad (23)$$

成立. 其中:

$$M_{m j} = P_{m j}^{-1}, \quad Y_{\rho j} = M_{m j} [M_{\rho j}^{-1} - M_{l j}^{-1}] M_{m j},$$

$$W_{imj} = K_{ij}M_{mj}, 1 \leq i \leq k \leq l, \\ 1 \leq m \leq l, 1 \leq j \leq r.$$

当 $\phi_{\rho j}$ 给定的时候,式(20)~(23)就是一组线性不等式矩阵. 如果线性矩阵不等式组(20)~(23)有一组可行解,则

$$K_{ij} = W_{imj}M_{mj}^{-1} \quad (24)$$

是连续时间T-S模糊系统(1)的稳定化模糊控制器.

证 对于定理2,在不等式组(15)~(17)两边分别左乘和右乘非奇异矩阵 P^{-1} ,然后进行变量代换,令

$$M_{mj} = P_{mj}^{-1}, \\ Y_{\rho j} = M_{mj}[M_{\rho j}^{-1} - M_{l_j}^{-1}]M_{mj}, \\ W_{imj} = K_{ij}M_{mj},$$

即可得到不等式组(20)~(23). 由变量代换可知,稳定化模糊控制器为 $K_{ij} = W_{imj}M_{mj}^{-1}$.

证毕.

5 仿真实例(Simulation)

为了验证本文提出的闭环T-S模糊控制系统稳定性分析及控制器设计方法的有效性,采用文献[3]中的非线性质量块-弹簧-阻尼器系统为研究对象,该系统的微分方程为

$$\ddot{x} = -\dot{x}^3 - 0.01x - 0.1x^3 + (1 + 0.13\dot{x}^3)u. \quad (25)$$

其中: x 为质量块的位置, u 是外力并设 $x \in [-1.5, 1.5]$, $\dot{x} \in [-1.5, 1.5]$,式(25)的所示非线性对象可以用以下T-S模糊系统模型来近似:

R_i : If $x_1(t)$ is F_1^i and $x_2(t)$ is F_2^i , Then

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), i = 1, 2, \dots, 9. \quad (26)$$

其中: $x_1 = x$, 模糊分划为 $\{F_{1j}, j = 1, 2, 3\}$; $x_2 = \dot{x}$, 模糊分划为 $\{F_{2k}, k = 1, 2, 3\}$; 分别采用如图3,4所示的三角形隶属度函数,

$$F_1^1 = F_1^4 = F_1^7 = F_{11}, F_1^2 = F_1^5 = F_1^8 = F_{12}, \\ F_1^3 = F_1^6 = F_1^9 = F_{13}, F_2^1 = F_2^2 = F_2^3 = F_{21}, \\ F_2^4 = F_2^5 = F_2^6 = F_{22}, F_2^7 = F_2^8 = F_2^9 = F_{23}.$$

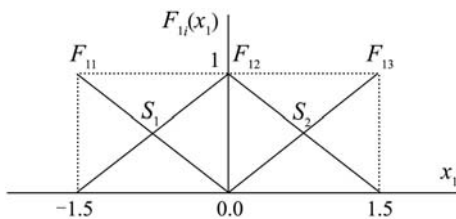


图3 输入变量 x_1 的隶属度函数
Fig. 3 The membership function of x_1

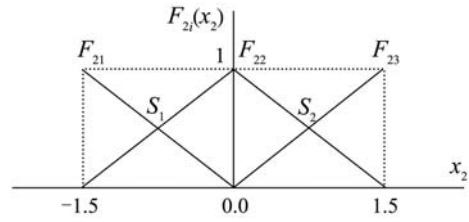


图4 输入变量 x_2 的隶属度函数

Fig. 4 The membership function of x_2

由图5可以看出,系统的模糊空间可以分成4个部分,分别是 $S_i, i = 1, 2, 3, 4$,其中: S_1 包含了 R_1, R_2, R_4, R_5 4条规则, S_2 包含了 R_2, R_3, R_5, R_6 4条规则, S_3 包含了 R_4, R_5, R_7, R_8 4条规则, S_4 包含了 R_5, R_6, R_8, R_9 4条规则. 各线性子系统的状态矩阵为

$$A_1 = A_3 = A_7 = A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.235 & -2.25 \end{bmatrix}, \\ A_2 = A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.235 & 0 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_4 = A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01 & -2.25 \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_4 = B_7 = [0 \ 0.7046]^T, \\ B_2 = B_5 = B_8 = [0 \ 1]^T, \\ B_3 = B_6 = B_9 = [0 \ 1.2954]^T.$$



图5 系统的模糊空间分划示意图

Fig. 5 The state space of the fuzzy system

基于公共Lyapunov函数法,利用LMI法可以求出一组状态反馈向量:

$$K_1 = [4.2541 \ 3.9803], K_2 = [1.6315 \ 2.8740], \\ K_3 = [8.3642 \ 6.9468], K_4 = [3.6281 \ 1.4861], \\ K_5 = [1.3649 \ 2.5813], K_6 = [5.2681 \ 6.2716], \\ K_7 = [4.1635 \ 1.8490], K_8 = [6.3842 \ 2.5416], \\ K_9 = [8.2543 \ 5.6230].$$

给定初始状态为 $x_0 = [-1.4 \ 1.4]^T$,系统的闭环状态响应曲线如图6所示.

基于分段Lyapunov函数法,可以同样利用LMI法求出一组状态反馈向量:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= [2.1690 \ 1.9543], K_2 = [1.3846 \ 3.1982], \\
 K_3 &= [4.5143 \ 2.0931], K_4 = [1.1650 \ 0.3691], \\
 K_5 &= [0.6849 \ 1.5290], K_6 = [3.4925 \ 3.9516], \\
 K_7 &= [3.3810 \ 4.0315], K_8 = [4.5021 \ 3.7219], \\
 K_9 &= [7.9460 \ 6.1736].
 \end{aligned}$$

给定初始状态为 $x_0 = [-1.4 \ 1.4]^T$, 系统的闭环状态响应曲线如图7所示. 最后, 根据定理3, 给定 $\phi = 0.75$, 可以分别在 $S_i, i = 1, 2, 3, 4$ 上利用LMI法找出一组状态反馈向量 K_{ki} 和正定矩阵 P_{pj} :

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= [7.3984 \ 3.5826], K_{21} = [2.3287 \ 3.6752], \\
 K_{41} &= [6.4635 \ 1.4752], K_{51} = [3.5841 \ 3.9653], \\
 K_{22} &= [4.5962 \ 3.8943], K_{32} = [2.1526 \ 1.6851], \\
 K_{52} &= [3.7412 \ 1.9658], K_{62} = [3.3687 \ 2.0241], \\
 K_{43} &= [6.3548 \ 1.6894], K_{53} = [3.4725 \ 3.5641], \\
 K_{73} &= [4.9745 \ 1.8726], K_{83} = [2.3487 \ 3.9624], \\
 K_{54} &= [3.5869 \ 3.4551], K_{64} = [3.4897 \ 2.1453], \\
 K_{84} &= [2.5874 \ 3.4612], K_{94} = [3.1548 \ 1.4152].
 \end{aligned}$$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 9.2635 & -0.4512 \\ -0.4512 & 5.5481 \end{bmatrix}, P_{21} = \begin{bmatrix} 4.2514 & -1.2536 \\ -1.2536 & 6.3241 \end{bmatrix},$$

$$P_{41} = \begin{bmatrix} 8.6246 & -1.3541 \\ -1.3541 & 3.1523 \end{bmatrix}, P_{51} = \begin{bmatrix} 1.2536 & -0.3689 \\ -0.3689 & 2.6251 \end{bmatrix},$$

$$P_{22} = \begin{bmatrix} 5.6930 & -0.6348 \\ -0.6348 & 2.9847 \end{bmatrix}, P_{32} = \begin{bmatrix} 6.1524 & -0.9841 \\ -0.9841 & 4.5816 \end{bmatrix},$$

$$P_{52} = \begin{bmatrix} 7.8426 & -0.7165 \\ -0.7165 & 6.3615 \end{bmatrix}, P_{62} = \begin{bmatrix} 2.6289 & -0.2415 \\ -0.2415 & 1.7648 \end{bmatrix},$$

$$P_{43} = \begin{bmatrix} 2.1536 & -0.1354 \\ -0.1354 & 1.7124 \end{bmatrix}, P_{53} = \begin{bmatrix} 3.2635 & -0.5147 \\ -0.5147 & 2.3480 \end{bmatrix},$$

$$P_{73} = \begin{bmatrix} 4.2639 & -0.9658 \\ -0.9658 & 5.8419 \end{bmatrix}, P_{83} = \begin{bmatrix} 1.3593 & -0.0539 \\ -0.0539 & 1.9813 \end{bmatrix},$$

$$P_{54} = \begin{bmatrix} 8.5296 & -0.9573 \\ -0.9573 & 7.9437 \end{bmatrix}, P_{64} = \begin{bmatrix} 5.4962 & -1.5926 \\ -1.5926 & 9.7481 \end{bmatrix},$$

$$P_{84} = \begin{bmatrix} 6.4238 & -0.6842 \\ -0.6842 & 4.9824 \end{bmatrix}, P_{94} = \begin{bmatrix} 3.8319 & -0.3159 \\ -0.3159 & 2.6724 \end{bmatrix}.$$

因而可以判定, 通过状态反馈

$$u = - \sum_{j=1}^r \lambda_j \sum_{k=1}^l h_{kj} K_{kj} x$$

后, 系统是闭环稳定的. 并且通过计算机仿真, 也验证了在各种初始条件下闭环系统的状态都是稳定的. 图7和图8分别给出了初始条件为 $x_0 = [-1.4 \ -1.4]^T$ 以及 $x_0 = [1.5 \ -1.5]^T$ 时系统的状态响应曲线. 从图上可以看出, 当初始条件相同时, 基于分段模糊Lyapunov函数法设计的控制器比基于公

共Lyapunov函数法和分段Lyapunov函数法设计的控制器具有更好的性能.

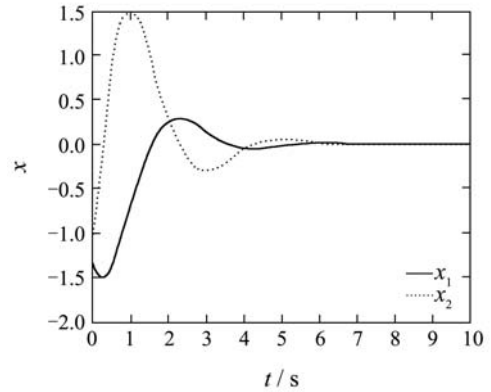


图6 基于公共Lyapunov函数法系统闭环状态响应 $x_0 = [-1.4 \ 1.4]^T$

Fig. 6 The system state response under the initial condition of $x_0 = [-1.4 \ 1.4]^T$ (common Lyapunov case)

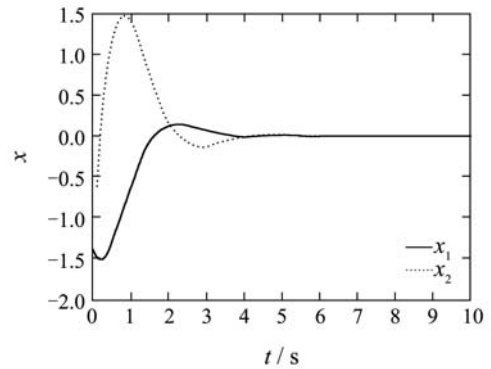


图7 基于分段Lyapunov函数法系统闭环状态响应 $x_0 = [-1.4 \ 1.4]^T$

Fig. 7 The system state response under the initial condition of $x_0 = [-1.4 \ 1.4]^T$ (piecewise Lyapunov case)

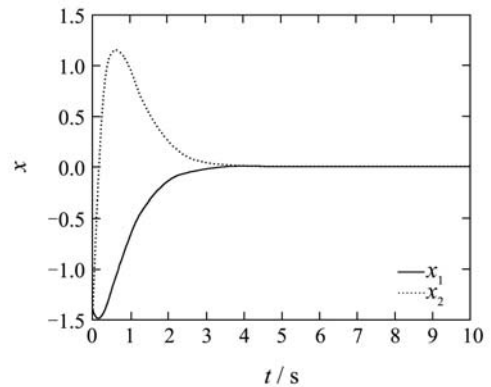


图8 基于分段模糊Lyapunov函数法系统闭环状态响应 $x_0 = [-1.4 \ 1.4]^T$

Fig. 8 The system state response under the initial condition of $x_0 = [-1.4 \ 1.4]^T$ (piecewise fuzzy Lyapunov case)

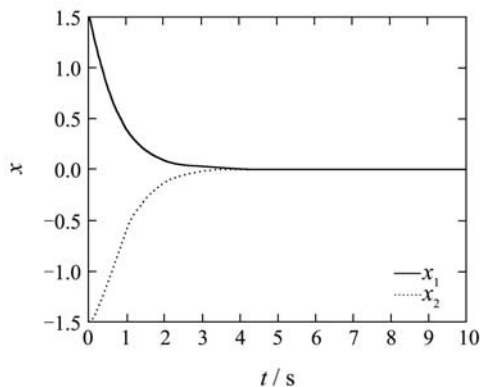


图9 基于分段模糊Lyapunov函数法系统闭环状态响应 $x_0 = [1.5 \ -1.5]^T$

Fig. 9 The system state response under the initial condition of $x_0 = [1.5 \ -1.5]^T$ (piecewise fuzzy Lyapunov case)

6 结论(Conclusion)

本文结合输入采用双交叠模糊分划的模糊控制系统特点,通过构造分段光滑的模糊Lyapunov函数提出了一个新的判定开环T-S模糊控制系统稳定的充分条件.该方法充分利用了模糊规则前件输入变量模糊隶属度函数的结构信息,减小了利用公共Lyapunov函数法和分段Lyapunov函数法判定T-S模糊控制系统稳定的局限性和保守性.并基于并行分布补偿策略.进一步探讨了闭环T-S模糊控制系统的稳定性分析问题.最后,仿真结果表明了本文提出的方法是有效的.

参考文献(References):

- [1] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1985, 15(1): 116 – 132.
- [2] TANAKA K, SUGENO M. Stability analysis and design of fuzzy control systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 45(2): 135 – 156.
- [3] 修智宏, 任光. T-S模糊控制系统的稳定性分析及系统化设计[J]. *自动化学报*, 2004, 30(5): 731 – 732. (XIU Zhihong, REN Guang. Stability analysis and systematic design

of Takagi-Sugeno fuzzy control systems[J]. *Automatica*, 2004, 30(5): 731 – 732.)

- [4] XIU Z H, REN G. Stability analysis and systematic design of Takagi-Sugeno fuzzy control systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 151(1): 119 – 138.
- [5] WANG W J, SUN C H. Relaxed stability and stabilization conditions for a T-S fuzzy discrete system[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 156(2): 208 – 225.
- [6] ZHANG S T, WANG S J. Stability analysis of discrete T-S fuzzy systems[C] // *Chinese Control and Decision Conference*. Piscataway, USA: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2008: 2045 – 2048.
- [7] TANAKA K, HORI T, WANG H O. A fuzzy Lyapunov approach to fuzzy control system design[C] // *Proceeding of the American Control Conference*. Piscataway, USA: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2001: 4790 – 4795.
- [8] TANAKA K, HORI T, WANG H O. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2003, 11(4): 582 – 589.
- [9] TANAKA K, WANG H O. A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov function[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, 15(3): 333 – 341.
- [10] LAM H K, NNRIMANI M, LA J C Y. Stability analysis of T-S fuzzy-model-based control systems using fuzzy Lyapunov function[C] // *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. [S.l.]: [s.n.], 2008: 931 – 938.
- [11] TANAKA K, IKEDA T. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stability, H_∞ control theory and linear matrix inequalities[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 1 – 13.
- [12] WANG H O, TANAKA K. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 14 – 23.
- [13] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 218 – 231.

作者简介:

陈国洋 (1984—), 男, 硕士研究生, 研究方向为模糊控制, E-mail: wqqcgy@qq.com;

李柠 (1974—), 女, 副研究员, 硕士生导师, 主要研究领域为复杂系统建模与控制、智能控制, E-mail: ning_li@sjtu.edu.cn;

李少远 (1965—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为预测控制、自适应智能控制、模糊智能控制, E-mail: syli@sjtu.edu.cn.