文章编号: 1000−8152(2010)08−1093−04

一类有限时间切换系统的最优控制问题

于瑞林[1], 郭 磊[2,3]

(1. 山东农业大学 信息学院, 山东 泰安 271018; 2. 山东大学 计算机科学与技术学院, 山东 济南 250101;

3. 山东经济学院 统计与数学学院, 山东 济南 250014)

摘要: 本文研究了一类带有终端约束的切换系统在有限时间内的最优控制问题. 终端约束的出现使得最优控制问题的值函数不再是处处可微的, 甚至是不连续的. 因此, 原来关于无穷时间域上的值函数是Bensoussan-Lions拟变分不等式(QVI) 的粘性解的这一结论已不再适用. 本文采用了动态规划方法和生存定理将QVI的解延拓到了下半连续的情形, 并且得到了有限时间最优切换控制问题的值函数是QVI的下半连续解的重要结论.

关键词: 切换系统; 最优控制; 粘性解

中图分类号: TP271 **文献标识码**: A

Optimal control of a class of deterministic switched systems

YU Rui-lin[1], GUO Lei[2,3]

(1. College of Information Science and Engineering, Shandong Agricultural University, Tai'an Shandong 271018, China;
2. School of Computer Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250101, China;
3. Department of Mathematics and Statistics, Shandong Institute of Economics, Jinan Shandong 250101, China)

Abstract: A class of deterministic switched control problems with end-point constraint in finite horizon is addressed. An end-point constraint makes the value-functions being not differentiable everywhere or even discontinuous. As a result, the former conclusion that the value-functions for infinite horizon are the unique viscosity solutions to a Bensoussan-Lions type quasi-variational inequality(QVI) is no longer valid. We extend the viscosity solutions to the lower semi-continuous case by using the dynamic programming and the viability theory.

Key words: switched systems; optimal control; viscosity solutions

1 引言(Introduction)

混合动态系统是由连续变量动态系统和离散事件的动态系统按一定的规律相互混合, 相互作用而构成的一类复杂的动态系统. 其中, 切换系统是一类特殊的混合动态系统, 它包含有有限个连续动态子系统, 而且子系统之间由一个切换规则相连接, 切换系统的模型来源于许多实际问题, 比如生产存货问题, 化工过程, 自动系统等等.

切换系统的最优控制既包括有连续的最优控制输入, 又包括有最优切换序列. 由于既包含连续控制又包含离散控制, 所以切换系统的最优化问题通常是非线性的和非凸的优化问题. 解决这类问题通常是将传统的最大值原理[1~3]和动态规划方法[4~7]拓展到这一领域里, 并且已经取得了相当丰富的结果. Bensoussan和Lions在1984年对脉冲控制的研究中利用动态规划方法获得由一系列的偏微分方程组成的最优化条件[8], 并称它们为拟变分不等式(QVI). I. C. Dolcetta和J. Yong带有切换的动态系统利用动态规划方法也得到了类似的结果. 随后的大量关于脉冲和切换控制问题的研究主要集中在值函数是QVI的唯一的, 连续的, 一致有界的粘性解这一结论的讨论上[4~7], 但几乎所有的文献都关注的是无限时间内的带有折扣因子的最优混合控制问题, 而非本文所提出的有限时间内的最优控制问题.

本文提出的最优控制问题的最显著的特点是状态轨线的终端带有约束. 终端约束的出现使得最优控制问题的值函数不仅仅不是处处可微的, 甚至是不连续的. 因此, 以前关于QVI的粘性解的讨论就不再适用, 需要将粘性解延展到半连续函数中. 本文研究了最优控制问题的值函数的性质, 并且证明了在满足足够假设条件下, 值函数是QVI的下半连续解.

2 问题描述(Problem statement)

考虑终端带约束的切换控制系统:

收稿日期: 2008−12−11; 收修改稿日期: 2009−11−27.
基金项目: 山东省自然科学基金资助项目(Q2006A03).

$$\begin{cases}\dot{y}(s)=f(s,y(s),u(s),\alpha(s)), s\in[0,T],\\ y(0)=x_0,\\ y(T)\in\mathscr{K}.\end{cases}\tag{1}$$

其中: $y(s)\in\mathbb{R}^n$为系统的连续状态, $u(s)\in\mathbb{R}^m$为系统的连续控制, $\alpha(s)\in\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)$为切换控制, $\lambda_i\in\mathbb{R}^k$是切换模式, $i=1,2,\cdots,l<+\infty, 0<T<\infty$是切换系统的终止时刻, $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$是一个连续函数, $\mathscr{K}\subset\mathbb{R}^n$是终端约束集. 定义连续控制集合: $\mathscr{U}\triangleq\{u(\cdot):u(s)\in\Omega(\mathbb{R}^m$中的紧集$), s\in[a,b]\subset[0,T]$, $u(s)$是$[a,b]$上的可测函数$\}$, 对于给定的$d\in\Lambda$, 定义切换控制集合:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^d\triangleq\{\,&\alpha(\cdot):\alpha(s)=\sum_{i=1}^{N+1}d_{i-1}\chi_{[t_{i-1},t_i)}(s),\\ &d_0=d, d_i\in\Lambda, d_i\neq d_{i-1},\\ &a=t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_N\leqslant t_{N+1}=b,\\ &[a,b]\subset[0,T]\}.\end{aligned}$$

其中χ_I是示性函数, 设$I\subset[0,T]$, 定义

$$\chi_I(s)=\begin{cases}1, s\in I,\\ 0, s\notin I.\end{cases}$$

分别称$u\in\mathscr{U}$和$\alpha\in\mathscr{A}^d$为允许连续控制和切换控制, $(u,\alpha)\in\mathscr{U}\times\mathscr{A}^d$称为允许控制. 对于每一切换控制$\alpha\in\mathscr{A}^d$来说, 它等价于一个序列, 仍记为$\alpha=\{t_i,d_i\}_{i=0}^N$, 其中$N=N(\alpha)$是非负整数, 称$t_i$为切换时刻, d_i为t_i时刻切换模式的取值, 在系统(1)中: $a=0, b=T$.

在切换系统(1)中, 对于每一给定的初始状态$x_0\in\mathbb{R}_n, d\in\Lambda$, 以及$[0,T]$上的系统控制$(u,\alpha)\in\mathscr{U}\times\mathscr{A}^d$, 都定义了相应的一条连续状态轨线$y(\cdot)=y_{0,x_0}^d(\cdot)\in S_{[0,T]}^d(x_0)$, 其中$S_{[0,T]}^d(x_0)$表示初始条件为$y_{0,x_0}^d(0)=x_0$, 初始切换模式$d\in\Lambda$的满足微分方程(1)的绝对连续解的集合. 对于该$y(\cdot)$都可以按下式计算出其费用:

$$\begin{aligned}J^d(u,\alpha)=&\int_0^T l(s,y(s),u(s),\alpha(s))\mathrm{d}s+\\ &g(y(T))+C(\alpha),\end{aligned}\tag{2}$$

其中: $l:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$是连续函数, 它反映过程的连续费用. $C(\alpha)$表示切换费用

$$C(\alpha)=\sum_0^{N(\alpha)}k(d_{i-1},d_i),$$

其中: $k:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$. 由于切换系统终端约束的出现, 有必要将$g(y(T))$在$y_{0,x_0}^d(T)\notin\mathscr{K}$时赋值为$+\infty$. 这样的$g(y(T))$就成为定义在$\mathbb{R}^n$上值域为$\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup+\infty$的延展函数$\bar{g}(y)$:

$$\bar{g}(y)=\begin{cases}g(y),\ y\in\mathbb{R};\\ +\infty, y\notin\mathbb{R}.\end{cases}$$

在假设$g:K\to\mathbb{R}$是连续的条件下, $\bar{g}$就是下半连续的, 为方便起见仍记$\bar{g}$为g. 因此费用函数$J^d(u,\alpha)$在$y_{0,x_0}^d(T)\notin\mathscr{K}$时的取值为$+\infty$, 而当$y_{0,x_0}^d(T)\in\mathscr{K}$时$J^d(u,\alpha)<+\infty$.

现提出以下最优控制问题:

问题$(P_{t,x})$: 对于任意初始条件$(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$, $d\in\Lambda$, 寻找最优控制$(u^*,\alpha^*)\in(U)\times\mathscr{A}^d$, 使得

$$J^d(u^*,\alpha^*)=\inf_{u\in\mathscr{U},\alpha\in\mathscr{A}^d}J^d(u,\alpha).$$

记$V^d(t,x)=J^d(u^*,\alpha^*)$, 称为最优控制问题$P_{t,x}$的值函数.

3 值函数(Value function)

由于值函数不再具有连续性, 所以本文并不能直接采用I.C.Dolcetta和J.Yong提出的动态规划方法[4,5], 而是参考使用了文献[11]中研究HJB方程的下半连续解时采用的生存理论方法去克服这一困难. 为此, 在这一部分首先对本文将要用到的基本定义和基本定理进行介绍.

定义 1 考虑延展函数$\varphi:\mathbb{R}^n\to\bar{\mathbb{R}}$:

1) $\mathrm{Dom}(\varphi)=\{x_0\in\mathbb{R}^n\mid\varphi(x_o)\neq+\infty\}$, 称为$\varphi$的定义域.

2) $\mathrm{epi}(\varphi)=(x,\lambda)\in\mathbb{X}\times\mathbb{R}\mid\varphi(x)\leqslant\lambda$, 称为$\varphi$的上图.

3) 定义函数φ在点$x_0\in\mathrm{Dom}(\varphi)$处的次梯度:

$$\partial_-\varphi(x_0)=$$
$$\{p\in\mathbb{R}^n\mid\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)-<p,x-x_0>}{x-x_0}\geqslant0\}.$$

4) 定义函数φ在点x_0处的方向为$\xi\in\mathbb{R}^n$的邻近上导数:

$$D_\dagger\varphi(x_0)(\xi)=\lim_{h\to0^+}\inf_{\xi'\to\xi}\frac{\varphi(x_0+h\xi')-\varphi(x_0)}{h}.$$

定义 2 1) 设$\mathscr{K}\in\mathbb{R}^n$, 如果对于所有的$t\in[0,T], x(t)\in\mathscr{K}$, 则称函数$x(\cdot):[0,T]\to\mathbb{R}^n$为集合$\mathscr{K}$中的可生存函数.

2) 如果对于任一初始状态$x_0\in\mathscr{K}\in\mathbb{R}^n$, 存在$T>0$, 和一个以$x_0$为初始状态并满足微分方程$x'=f(x(t))$的解$x_0\in\mathscr{K}\in\mathbb{R}^n$, 并且这个解为集合$\mathscr{K}$中的可生存函数, 则称$\mathscr{K}$在映射$f$下为局部可生存的.

定义 3 如果对于任给的$x\in\mathscr{K}\in\mathbb{R}^n$, $t\geqslant0$并且微分方程$x'=f(x(t))$满足终值条件$x(t)=x$的解$x(\cdot):\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^n$, 都存在时刻$s\in[0,t]$, 都有$x(\tau)\in\mathscr{K}$, 则称集$\mathscr{K}$在映射$f$下为局部后向不变的.

定义 4　设$\mathscr{K} \in \mathbb{R}^n$, 当$x_0 \in \mathscr{K}$时, 在$x_0$处关于$\mathscr{K}$的切锥$T_{\mathscr{K}}(x_0)$定义为

$$T_{\mathscr{K}}(x_0) = \{v \in T_{\mathscr{K}}(x_0) \mid \lim_{h\to 0^+} \inf d(v, \frac{\mathscr{K} - x_0}{h}) = 0\},$$

注意到对于任一延展函数$\varphi: \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$, 有以下等式成立:

$$\mathrm{epi}(D_\dagger\varphi(x_0)) = T_{\mathrm{epi}}(x_0, \varphi(x_0)), x_0 \in \mathrm{Dom}(\varphi).$$

定理 1　集合$\mathscr{K}$为$\mathbb{R}^n$中的一个闭子集, f为由$\mathscr{K}$到$\mathbb{R}^n$的一个连续映射, 则$\mathscr{K}$为局部可生存的充分必要条件为

$$\forall x \in \mathscr{K}, f(x) \in T_{\mathscr{K}}(x).$$

证明略.

为了保证对应于任一初始条件$(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$最优控制问题的存在性和唯一性, 对函数$f, l, g, k$作以下假设:

假设 1　1) 对于所有$x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, (u,d) \in \Omega\times\Lambda$, 存在常数$h, h_0 > 0$, 使得:

$$|f(t,x,u,d) - f(t,\hat{x},u,d)| \leqslant h|x-\hat{x}|,$$
$$|f(t,x,u,d)| \leqslant h_0(1+|x|),$$
$$|l(t,x,u,d) - l(t,\hat{x},u,d)| \leqslant h|x-\hat{x}|,$$
$$|l(t,x,u,d)| \leqslant h_0(1+|x|).$$

2) $\{(v,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : v = f(t,x,u,d), s \geqslant l(t,x,u,d), u \in \Omega\}$为凸集合.

3) 对所有的$x, \hat{x} \in \mathscr{K}$存在常数$h_1 > 0$, 使得$|g(x) - g(\hat{x})| \leqslant |x - \hat{x}|$.

4) 对所有的$d, \hat{d} \in \Lambda$, 都有$k(d,\hat{d}) > 0, d \neq \hat{d}; k(d,d) = 0$.

注 1　这里在对切换费用的假设中放松了常有的一个三角不等式的条件, 而只保留了非负性的假设. 这是为了保证切换次数的有限性, 且避免了在终止时刻系统的切换.

定理 2　如果假设1 成立, 则:

1) 最优控制问题$(P_{t,x})$的值函数V^d为下半连续的, 并且

$$V^d(t,x) = \min_{u\in\mathscr{U},\alpha\in\mathscr{A}^d}\{\int_t^T l(s, y^d_{t,x}(s), u(s), \alpha(s)) + g(y^d_{t,x}(T)) + c(\alpha)\};$$

2) 对于任一$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $g(\bar{(x)}) = \lim_{t\to T^-} \inf_{x\to\bar{x}} V^d(t,x)$;

3) 对于任一$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, 使得$V(t,\bar{x}) < +\infty$, 并且满足$V^d(0,\bar{(x)}) < \min_{d\neq\tilde{d}}\{V^{\tilde{d}}(0,\bar{x}) + k(d,\tilde{d})\}$, 则有以下等式成立

$$V^d(0,\bar{x}) = \lim_{t\to 0^+} \inf_{x\to\bar{x}} V^d(t,x).$$

证明从略.

定义Hamilton函数:

$$H^d(t,x,p) = \sup_{u\in\Omega}\{-l(t,x,u,d) + < p, f(t,x,u,d) >\}, d \in \Lambda.$$

在假设条件1下并不能保证值函数是连续可微的, 而且由于终端约束的出现使得值函数可能不再是连续的, 仅能保证它是下半连续的. 下面将QVI的解延拓到有限时间切换系统值函数为下半连续的情形. 首先, 利用动态规划方法[10], 很容易得到切换系统的值函数具有以下性质.

定理 3　在假设1之下, 设V^d是最优控制问题$(P_{t,x})$的值函数. 任意给定$(t,x) \in \mathrm{Dom}(V^d)$, 则:

1) 存在$[t,T]$上的控制$(\bar{u},\bar{\alpha}) \in \mathscr{U} \times \mathscr{A}^d$, 其相应的运动轨线为$\bar{y}^d_{t,x} \in S^d_{[t,T]}(x)$, 在对$h \geqslant 0$, 当$t+h \in [t,T)$时有

$$V^d(t+h, \bar{y}^d_{t,x}(t+h)) \leqslant V^d(t,x) - \int_t^{t+h} l(s, \bar{y}^d_{t,x}(s), \bar{u}(s), \bar{\alpha})\mathrm{d}s - \sum_{1\leqslant i\leqslant N} k(\bar{d}_{i-1}, \bar{d}_i).$$

2) 对$[t,T]$上的任一控制$(u,\alpha) \in \mathscr{U} \times \mathscr{A}^d$, 其相应的运动轨线为$y^d_{t,x} \in S^d_{[t,T]}(x)$, 则对$h \geqslant 0$, 当$t+h \in [t,T)$时有

$$V^d(t,x) \leqslant V^d(t+h, y^d_{t,x}(t+h)) + \int_t^{t+h} l(s, \bar{y}^d_{t,x}(s), \bar{u}(s), \bar{\alpha})\mathrm{d}s - \sum_{1\leqslant i\leqslant N} k(\bar{d}_{i-1}, \bar{d}_i).$$

下面通过下半连续函数上图的切锥, 可以得到值函数的局部前向生存性和局部后向生存性.

定理 4　在假设1下, 考虑下半连续函数V^d, $\forall (t,x) \in \mathrm{Dom}(V^d)$, 则以下两个命题等价

1) 设$\bar{h} > 0, t+\bar{h} \leqslant T$, 对任意给定的$u(\cdot) \in \mathscr{U}$, $[t, t+\bar{h}]$上的相应的无切换运动轨线$y^d_{t,x}(\cdot) \in S^d_{[t,t+\bar{h}]}(x)$对任意的$0 < h < \bar{h}$都有

$$V^d(t,x) \leqslant V^d(t+h, y^d_{t,x}(t+h)) + \int_t^{t+h} l(s, y^d_{t,x}(s), u(s), \alpha(s))\mathrm{d}s, \quad (3)$$

2) 当$(t,x) \in \mathrm{Dom}(V^d)$时

$$\sup_{u\in\Omega}[D_\dagger V^d(t,x)(-1, -f(t,x,u,d)) - l(t,x,u,d)] \leqslant 0, \quad (4)$$

4　主要结论(Main conclusion)

在本节中将对值函数的次梯度进行讨论, 以便得

到拟变分不等式的次梯度表达形式, 从而得到值函数是下半连续的, 先看两个引理.

引理 1 令函数$\varphi:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\bar{\mathbb{R}}, x_0\in\mathrm{Dom}(\varphi)$, 则以下命题等价:

1) $p\in\partial_-\varphi(x_0)$;

2) $\forall\xi\in\mathbb{R}^n, <p,\xi>\leqslant D_\dagger\varphi(x_0)(\xi)$;

3) $(p,-1)\in[T_{\mathrm{epi}(\varphi)}(x_0,\varphi(x_0))]^{-1}$.

其中$[T_k(x)]^{-1}$称为是关于K在x处的负极锥, 记为

$$N_K(x)=\{q\in\mathbb{R}^n:<q,p>\leqslant 0, p\in T_K(x)\}.$$

引理 2 设K为$\mathbb{R}^n$中的局部紧子集, $\varphi:K\to\mathbb{R}^n$为连续单值映射, 则以下命题等价:

1) $\forall x\in K, \varphi(x)\in T_K(x)$;

2) $\forall x\in K, \varphi(x)\in\overline{\mathrm{co}}(T_K(x))$;

3) $\forall x\in K, \forall p\in N_K(x), <p,\varphi(x)>\leqslant 0$.

定理 5 考虑下半连续函数V^d, 若f, l满足假设1, 则以下命题等价

1) $\forall(t,x)\in\mathrm{Dom}(V^d), t<T$, 且满足$R_{V^d}(t,x)<0$,

$$\inf_{u\in\Omega}D_\dagger V^d(t,x)(1,f(t,x,u,d))+l(t,x,u,d)\leqslant 0. \tag{5}$$

2) $\forall(t,x)\in\mathrm{Dom}(V^d), t<T$, 且满足$R_{V^d}(t,x)<0, \forall(p_t,p_x)\in\partial_-V^d(t,x)$,

$$-p_t+H^d(t,x,-p_x)\geqslant 0. \tag{6}$$

定理 6 考虑下半连续函数V^d, 若f, l满足假设1, 对$\forall(t,x)\in\mathrm{Dom}(V^d), t>0$, 则以下命题等价:

1) $$\sup_{u\in\Omega}D_\dagger V^d(t,x)(-1,-f(t,x,u,d))-l(t,x,u,d)\leqslant 0. \tag{7}$$

2) 对$\forall(p_t,p_x)\in\partial_-V^d(t,x)$,

$$-p_t+H^d(t,x,-p_x)\geqslant 0. \tag{8}$$

证 假设结论(1)成立, 则任意给定$(t,x)\in\mathrm{Dom}(V^d), t<T$, 对于所有$z\geqslant V^d(t,x)$, 都有

$$\{(-1,-f(t,x,u,d),l(t,x,u,d):u\in\Omega)\}\subset \mathrm{epi}(D_\dagger V^d(t,x))=T_{\mathrm{epi}(v^d)}(t,x,z).$$

即对任意$(p_t,p_x,-1)\in[T_{\mathrm{epi}(v^d)}(t,x,V^d(t,x))]_-$有

$$-p_t+H^d(t,x,-p_x)\geqslant 0. \tag{9}$$

由引理1可知命题(2)成立.

反过来, 如果命题(2)成立, 由引理1知, 固定$(t,x)\in\mathrm{Dom}(V^d), t>0$, 对于任意$(p_t,p_x,-1)\in[T_{\mathrm{epi}(v^d)}(t,x,V^d(t,x))]_-$, 都有式(6)成立, 注意到式(6)即为

$$<(p_t,p_x,-1),(-1,-f(t,x,u,\alpha),l(t,x,u,c))>\leqslant 0.$$

根据引理2可知, 对于所有$z\geqslant V^d(t,x)$都有

$$\{(-1,-f(t,x,u,\alpha)),l(t,u,x,\alpha):u\in\Omega\}\subset \overline{\mathrm{co}}(T_{\mathrm{epi}(V^d)}(t,x,z)),$$

再由引理2的等价命题可知有以下包含关系成立:

$$\{(-1,-f(t,x,u,\alpha)),l(t,u,x,\alpha):u\in\Omega\}\subset \liminf_{(\bar{t},\bar{x},\bar{z})\to(t,x,z)}\overline{\mathrm{co}}(T_{\mathrm{epi}(V^d)}(t,x,z))\subset T_{\mathrm{epi}(V^d)}(t,x,z).$$

这里的$\liminf$表示函数V^d上图的下集值极限, 根据引理1立即可得命题(1)成立. 根据定理2∼5可知: 最优切换控制问题$(P_{t,x})$的值函数是拟变分不等式(QVI)的下半连续解.

参考文献(References):

[1] CLARKE F H, VINTER R H. Optimal multiprocesses[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1987, 27(5) : 1072 – 1091.

[2] GARAVELLO M, PICCOLI B. Hybrid necessary principle[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization* , 2005, 43(5): 1867 – 1887.

[3] SUSSMANN H. A maximum principle for hybrid optimal control problems[C] //*Proceeding of the 38th IEEE conference on Decision and Control*. [S.n.]: [s.l.], 1999: 425 – 430.

[4] YONG J. Systems governed by ordinary differential equations with continuous, switching and impulse controls[J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 1989, 20: 223 – 135.

[5] CAPUZZO I, DOLCETTA, EVANS L C. Optimal switching for ordinary differential equations[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1984, 22(1): 143 – 161.

[6] 尹增山, 高春华, 李平. 混杂系统优化控制的动态规划方法研究[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(1) : 29 – 33.
(YIN Zenshan, GAO Chunhua, LI Ping. Optimal control for hybrid systems based on dynamical programming[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(1): 29 – 33.)

[7] 谢广明, 郑大钟. 一类混合动态系统的能控性和能观性研究[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(1): 139 – 142.
(XIE Guangming, ZHENG Dazhong. Research on controllability and reachability of hybrid dynamical systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(1): 139 – 142.)

[8] BENSOUSSAN A, LIONS J L. *Impulse Control and Quasivariational Inequalities*[M]. COLE J M. Transactions, Paris, France: Gauthier-Villars, 1984.

[9] FRANKOWSKA H. Lower semicontinuous solutions to the Hamilton-Jacobi equation[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1993, 31(1): 257 – 272.

[10] FLEMING W H, RISHEL R W. *Determineistic and Stochastic Optimal Control*[M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1975.

作者简介:

于瑞林 (1973—), 女, 博士, 目前研究方向为混杂系统、粘性解, E-mail: ruilinyu@126.com;

郭 磊 (1978—), 男, 博士, 目前研究方向为混杂系统、最优控制, E-mail: guolei1978@139.com.